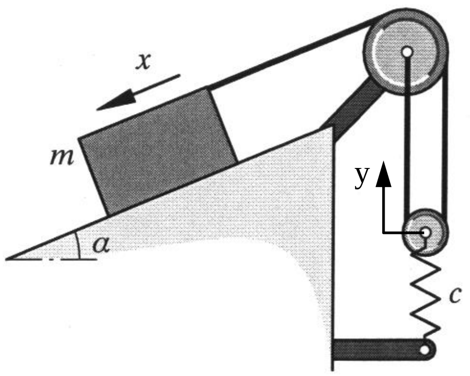
Aufgabensammlung zur Analytischen Mechanik

Aufgabe 1: Ein Körper (Masse m) gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene (Winkel α) und wird über ein masseloses Seil und masselose Umlenkrollen durch eine Feder (Steifigkeit c) gehalten. Die Feder sei für $x = 0$ entspannt.



a) Wie lautet die kinematische Beziehungen zwischen der Federauslenkung y und der Bewegung x des Körpers. Wie groß ist die Federkraft? Wie groß die Seilkraft?

b) Formulieren Sie das Prinzip der virtuellen Arbeit für das System. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage.

c) Formulieren Sie das Prinzip von d'Alembert. Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichungen.

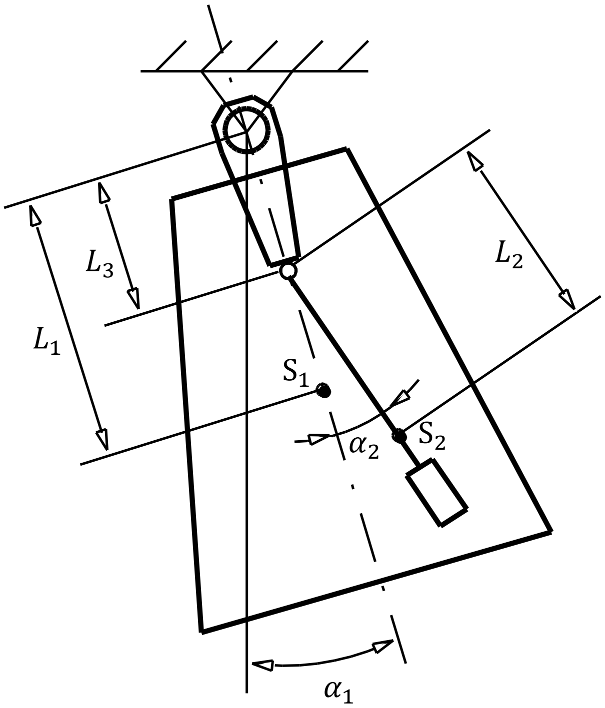
Aufgabe 2: Es wird das System aus Aufgabe 1 betrachtet.

a) Ermitteln Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems.

b) Formulieren Sie die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art.

Aufgabe 3: Eine Kirchenglocke besteht aus der Glocke selbst (Schwerpunkt S_1, Masse m_G, Trägheitsmoment J_1^{S1}) und einem Klöppel (Schwerpunkt S_2, Masse m_K, Trägheitsmoment J_2^{S2}). Bestimmen Sie das Bewegungsverhalten mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den Lagekoordinaten von Glocke und Klöppel und geeigneten verallgemeinerten Koordinaten.



b) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems.

c) Bestimmen Sie die potenzielle Energie des Systems.

d) Berechnen Sie die für die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art notwendigen partiellen Ableitungen der Lagrange Funktion. Geben Sie die Bewegungsgleichungen an.

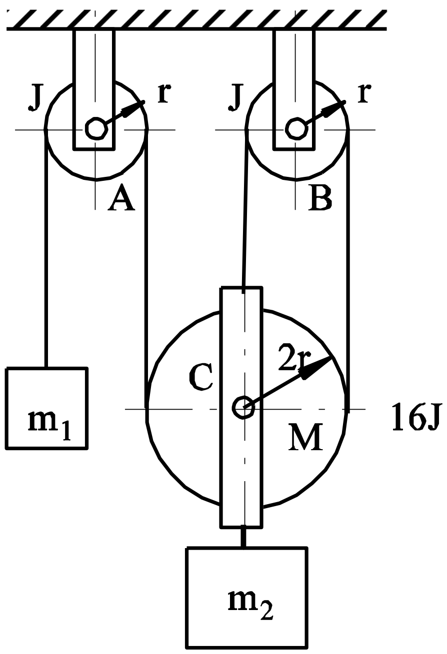
e) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die Glocke nicht läutet. (So geschehen bei der Einweihung der Kaiserglocke des Kölner Doms im Jahre 1876.)

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems aus Aufgabe 3 mit dem Prinzip von d'Alembert in Lagrangescher Fassung.

Aufgabe 5: An dem skizzierten Flaschenzug hängen die Massen m_1 und m_2. Die Rolle C habe zusammen mit dem Bügel die Masse M. Die Masse des Seiles kann vernachlässigt werden. Die Rollen A und B haben die Trägheitsmomente J und die Radien r. Die Rolle C besitzt das Trägheitsmoment $16J$ und den Radius $2r$. Die Rollen sollen sich reibungsfrei drehen, das Seil soll nicht auf den Rollen gleiten.

a) Welche Beziehung besteht zwischen den Massen m_1, m_2 und M im Gleichgewichtsfall? Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit und überprüfen Sie das Ergebnis anhand des Kräfte- und Momentengleichgewichts.

b) Wie groß ist das Übersetzungsverhältnis der Verschiebungen der Massen m_1 und m_2?



c) Berechnen Sie mit Hilfe des Impuls- und Drallsatzes die Beschleunigung der Masse m_2, wenn das Gleichgewicht gestört ist, z.B. $m_2 > m_{2GL}$? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art.

d) Man denke sich die Masse m_1 durch eine Schraubenfeder (Federkonstante c) ersetzt, deren unteres Ende fixiert ist.

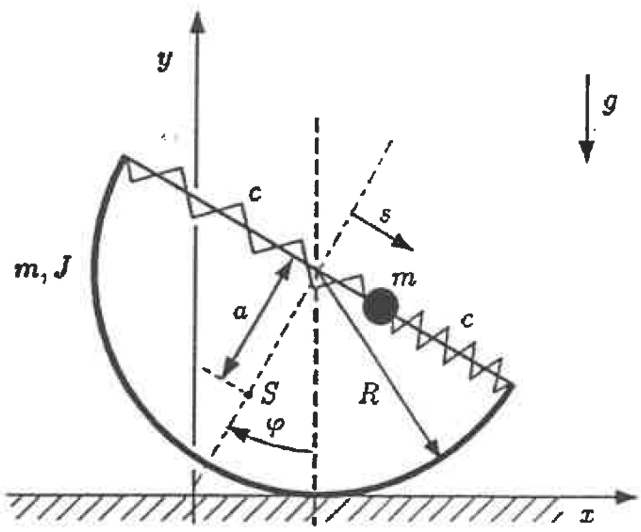
α) Wie groß ist die Dehnung der Feder im Gleichgewichtsfall?

β) Welche Schwingungsdauer T haben die nach vertikalem Anstoß der Masse m_2 entstehenden Schwingungen?

Aufgabe 6 (Prüfung TM II 7. März 95)

Eine halbkreisförmige Rinne (homogen, Masse m, Radius R, Trägheitsmoment J bzgl. Massenmittelpunkt S) rollt auf einer waagerechten Unterlage ab ohne zu gleiten. An den Oberkanten der Rinne ist eine masselose Führungsschiene befestigt, auf der sich ein Gleitstein (Punktmasse m) reibungsfrei bewegen kann. Der Gleitstein ist über zwei Federn (Federkonstanten c, ungespannte Federlängen R) mit den Enden der Führungsschiene verbunden. Der Abstand des Massenmittelpunktes S der Rinne von der Führungsschiene ist a.

Zur Lagebeschreibung des Systems werden die verallgemeinerten Koordinaten s und φ verwendet. Für $\varphi = 0$ fällt die Symmetrieachse der Rinne mit der y-Achse des Koordinatensystems zusammen.



Bestimmen Sie:

a) die Ortsvektoren und die Geschwindigkeitsvektoren der Massenmittelpunkte von Rinne und Gleitstein im angegebenen Koordinatensystem,

b) die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit von s, $\dot{s}$, φ und $\dot{\varphi}$,

c) die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit von s und φ,

d) <u>eine</u> der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art.