Aufgabe 1:

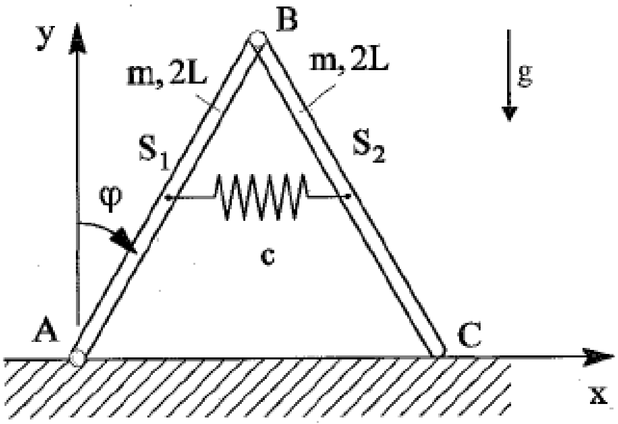
Die nichtlineare Bewegungsgleichung eines elastisch gefesselten Pendels lautet

$$ml^2\ddot{\varphi} + (cl^2 - mgl)\sin\varphi - cl^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

Welche Beziehungen bestimmen die Gleichgewichtslagen?

☒ $\sin\varphi = 0$	☐ $\sin\varphi = \dfrac{cl^2 - mgl}{ml^2}$
☐ $\cos\varphi = 0$	☒ $\cos\varphi = 1 - \dfrac{mg}{cl}$
☐ $\sin\varphi\cos\varphi = 0$	☒ $\cos\varphi = 1$

Aufgabe 2:



Die homogenen Stäbe AB und BC (Länge 2L und Masse m) sind bei A in einem Drehgelenk gelagert und bei B gelenkig miteinander verbunden. Das Stabende C gleitet reibungsfrei auf der horizontalen Unterlage.

Zwischen den Stabschwerpunkten S_1 und S_2 ist eine Feder (Federkonstante c, ungespannte Länge L) befestigt.

a) Wie groß sind die Koordinaten der Schwerpunktsgeschwindigkeiten $\mathbf{v}_{S1} = [\dot{x}_{S1}, \dot{y}_{S1}]$ und $\mathbf{v}_{S2} = [\dot{x}_{S2}, \dot{y}_{S2}]$?

☐ $\dot{x}_{S1} = L\dot{\varphi}$	☐ $\dot{y}_{S1} = L\dot{\varphi}$
☒ $\dot{x}_{S1} = L\dot{\varphi}\cos\varphi$	☐ $\dot{y}_{S1} = L\dot{\varphi}\sin\varphi$
☐ $\dot{x}_{S1} = L\dot{\varphi}\sin\varphi$	☒ $\dot{y}_{S1} = -L\dot{\varphi}\sin\varphi$

- [ ] $\dot{x}_{S2} = (2L\cos\varphi + L\sin\varphi)\,\dot{\varphi}$
- [x] $\dot{x}_{S2} = 3L\dot{\varphi}\cos\varphi$
- [ ] $\dot{x}_{S2} = \dot{x}_{S1}$
- [ ] $\dot{y}_{S2} = +L\dot{\varphi}\cos\varphi$
- [x] $\dot{y}_{S2} = -L\dot{\varphi}\sin\varphi$
- [x] $\dot{y}_{S2} = \dot{y}_{S1}$

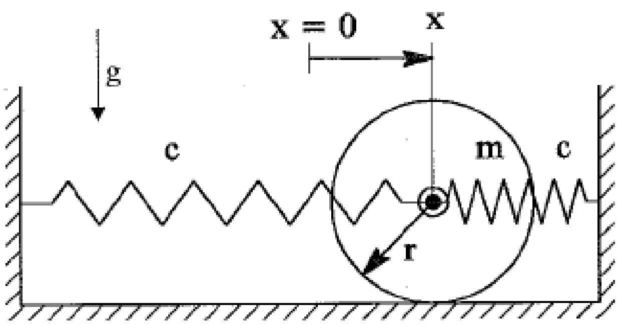
b) Wie lautet die kinetische Energie des Systems?

- [ ] $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{S1}^2 + \dot{y}_{S1}^2 + \dot{x}_{S2}^2 + \dot{y}_{S2}^2\right)$
- [ ] $T = \frac{1}{2}m\left(\frac{5}{3}L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}_{S2} + \dot{y}_{S2}\right)$
- [x] $T = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}_{S1}^2 + \dot{y}_{S1}^2 + \dot{x}_{S2}^2 + \dot{y}_{S2}^2\right)$

c) Wie lautet die potentielle Energie des Systems?

- [ ] $V = -2\,mgL\cos\varphi + \frac{1}{2}cL^2\,(2\sin\varphi - 1)^2$
- [ ] $V = +2\,mgL\cos\varphi + \frac{1}{2}cL^2\,(3\sin\varphi - 1)^2$
- [x] $V = +2\,mgL\cos\varphi + \frac{1}{2}cL^2\,(2\sin\varphi - 1)^2$

Aufgabe 3:



Ein Rad (Masse m, Radius r, Trägheitsradius $k = r/\sqrt{2}$) rollt auf einer rauen horizontalen Ebene (Haftreibungskoeffizient μ_0). Seine Achse ist durch zwei gleiche Federn (Federkonstante c) gefesselt. Die Auslenkung der Achse aus der Gleichgewichtslage heiße x.

a) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Bewegung $x = x(t)$ auf.

$\frac{3}{2}m\ddot{x} + 2cx = 0$

b) Die Bewegung ist eine

☒ freie	○ erzwungene	☒ harmonische
☒ lineare	○ nichtlineare	○ nichtperiodische
○ gedämpfte	☒ ungedämpfte	○ keine

Schwingung.

c) Wie groß ist die Eigenfrequenz der Schwingung?

$\nu = \nu_0 = 2\sqrt{\frac{c}{3m}}$

d) Wie lautet die Lösung $x = x(t)$ zur Anfangsbedingung $t_0 = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$?

$x = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3m}{c}} \sin\left(2\sqrt{\frac{c}{3m}}\, t\right)$

e) Wie groß ist die erforderliche Haftreibungskraft R in Abhängigkeit von x?

$R = \frac{2}{3} c x$

f) Wie groß darf $|v_0|$ höchstens sein, damit die Walze nie durchdreht?

$|v_0| \leq \mu_0 g \sqrt{\frac{3m}{c}}$

Aufgabe 4:

Die nichtlineare Bewegungsgleichung eines Fliehkraftpendels lautet

$$m l^2 \ddot{\varphi} + (c l^2 \cos\varphi + m g l) \sin\varphi - m l^2 \omega^2 (\sin\varphi + 1) \cos\varphi = 0 \,,$$

wobei m, g, c, l und ω konstante Parameter sind.

a) Wie lautet die linearisierte Bewegungsgleichung für $\varphi << 1$?

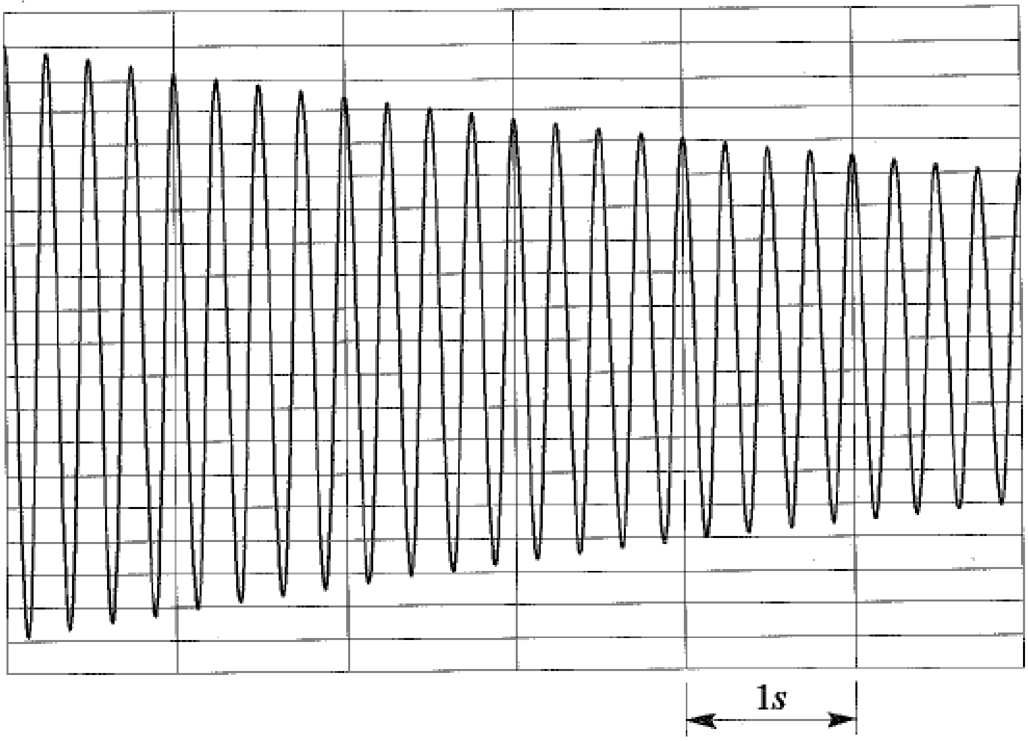
$m l^2 \ddot{\varphi} + (c l^2 + m g l - m l^2 \omega^2)\varphi = m l^2 \omega^2$

b) Unter welcher Voraussetzung ist eine Schwingung möglich?

$\omega^2 < \frac{c}{m} + \frac{g}{l}$

Aufgabe 5:

Der abgebildete Messschrieb einer freien linearen Schwingung soll ausgewertet werden.



a) Wie groß ist die Schwingungsdauer? $T = \frac{1}{4}\,s$

b) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz. $\nu = \frac{2\pi}{T} = 8\pi\,\frac{1}{s}$

c) Wie lautet die Formel für das logarithmische Dekrement bei der Auswertung der Amplituden x_n und x_{n+m}?

$$\vartheta = \frac{1}{m} \ln \frac{x_n}{x_{n+m}}$$

d) Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement mit möglichst großer Genauigkeit, d.h. mit möglichst großem m.

$$\vartheta = \frac{1}{24} \ln \frac{9}{5} \approx 0{,}0245$$

e) Welchen Wert hat das Dämpfungsmaß? $D = \frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi^2 + \vartheta^2}} = 0{,}0039$

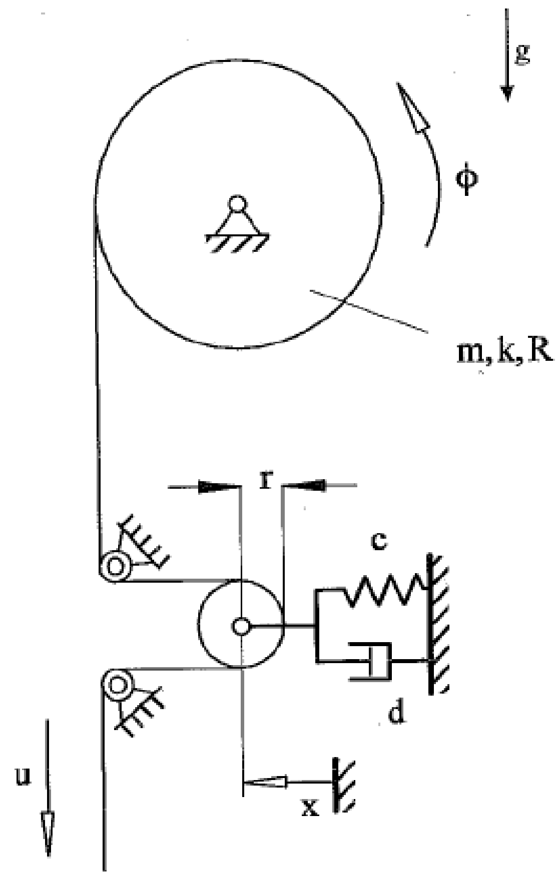
Aufgabe 6 :

In einem Filmprojektor wird der Filmstreifen von der Rolle (Masse m, Trägheitsradius k, Radius R) abgespult und läuft über eine Spannvorrichtung (Federsteifigkeit c, Dämpferkonstante d). Die Massen der Spannrolle, der Umlenkrollen und des abgespulten Filmstreifens sind vernachlässigbar. Bei der Auslenkung $x = 0$ ist die Feder entspannt. Auf die Filmrolle wirkt ein konstantes Reibmoment M_R, die übrigen Rollen sind reibungsfrei gelagert.

Der undehnbare Filmstreifen ist stets gespannt und die Transportgeschwindigkeit ist durch

$$\dot{u} = v_0\,(1 + \cos\Omega t)$$

gegeben.

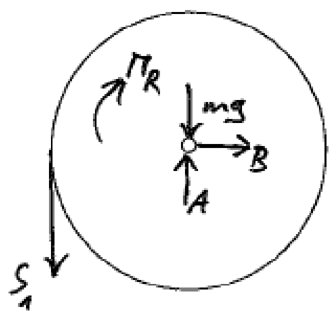


a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{u}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$?

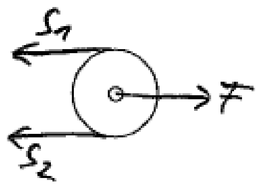
O $\dot{x} = \dot{u} - R\dot{\phi}$ O $\dot{x} = \frac{1}{2}(R\dot{\phi} - \dot{u})$ X $\dot{x} = \frac{1}{2}(\dot{u} - R\dot{\phi})$

b) Tragen Sie alle auf die freigeschnittenen Rollen wirkenden Kräfte und Momente in folgende Skizze ein und benennen Sie diese.

Filmrolle



Spannrolle



c) Wie groß ist die Kraft des Feder- Dämpfer- Elements auf die Spannrolle?

$F = cx + d\dot{x}$

d) Formulieren Sie die für die Aufstellung der Schwingungsgleichung notwendigen Impuls- und Drallsätze für Filmrolle und Spannrolle.

$m k^2 \ddot{\varphi} = S_1 R - M_R$

$0 = S_1 r - S_2 r$

$0 = S_1 + S_2 - cx - d\dot{x}$

e) Berechnen Sie die Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der Spannrollenauslenkung x.

$4m \frac{k^2}{R^2} \ddot{x} + d\dot{x} + cx = 2 \frac{M_R}{R} - 2m \frac{k^2}{R^2} v_0 \Omega \sin \Omega t$

f) Wie lautet die normierte Darstellung der Schwingungsdifferentialgleichung?

○ $\ddot{x} + \frac{dR^2}{4mk^2}\dot{x} + \frac{cR^2}{4mk^2}x = \frac{1}{2} v_0 \Omega \sin \Omega t$

☒ $\ddot{x} + \frac{dR^2}{4mk^2}\dot{x} + \frac{cR^2}{4mk^2}x = \frac{M_R R}{2mk^2} - \frac{1}{2} v_0 \Omega \sin \Omega t$

○ $\ddot{x} + \frac{dR^2}{4mk^2}\dot{x} + \frac{cR^2}{4mk^2}x = M_R$

○ $\ddot{x} + \frac{dR^2}{4mk^2}\dot{x} + \frac{cR^2}{4mk^2}x = \frac{M_R R}{2mk^2} - \frac{1}{2} v_0 \cos \Omega t$

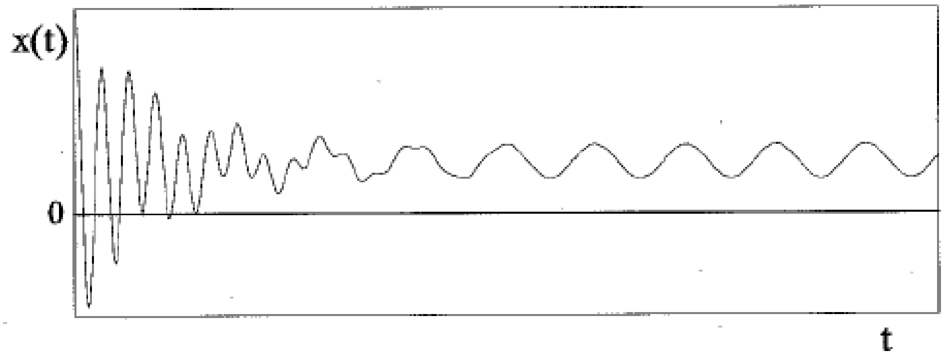
g) Geben Sie die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems und das Lehrsche Dämpfungsmaß an.

$\nu_0 = \frac{R}{2k}\sqrt{\frac{c}{m}}$

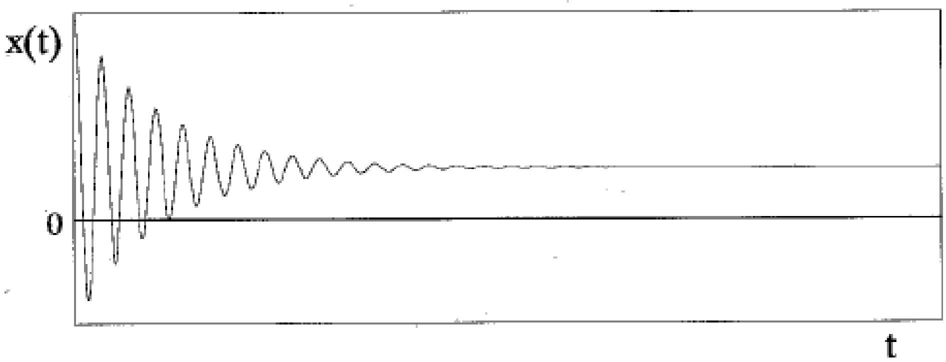
$D = \frac{dR}{4k\sqrt{cm}}$

h) Welche Bewegung der Spannrolle ergibt sich für schwache Dämpfung?

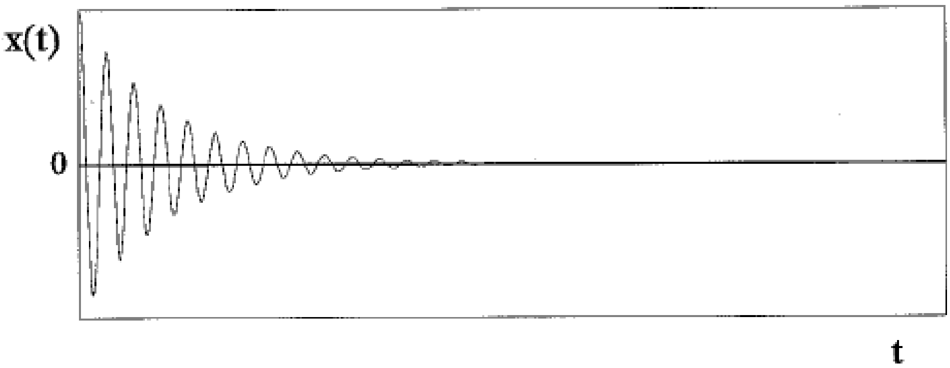
☒



○



○



○