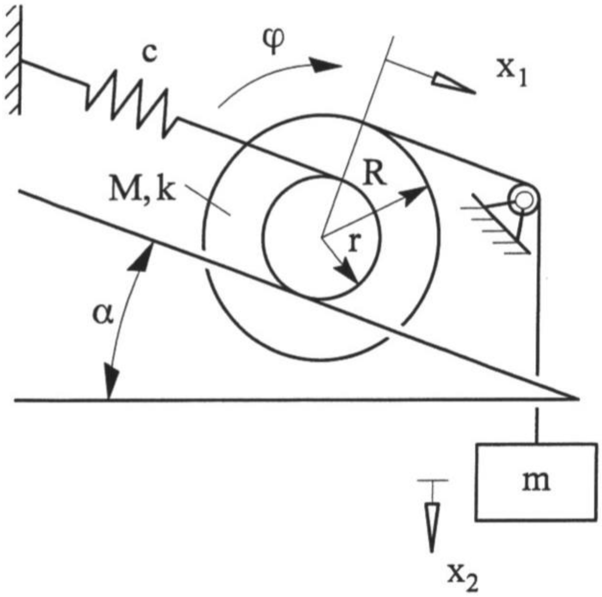
Aufgabe 1:



Eine Kabelrolle mit der Masse M und dem Trägheitsradius k liegt auf einem geneigten Schienenpaar. Um die Trommel (Radius R) ist ein Seil geschlungen, dessen freies Ende über eine masselose, reibungsfrei gelagerte Umlenkrolle mit einem Gewicht (Masse m) verbunden ist.

Die Kabelrolle wird durch ein elastisches Band (Federkonstante c) gehalten, das um die Achse (Radius r) gewickelt ist. Die Rolle wird aus einer Lage losgelassen, in der die Feder entspannt ist.

a) Durch welche Koordinaten wird die Bewegung des Systems eindeutig beschrieben, wenn zwischen der Trommel und dem Schienenpaar Gleiten auftreten kann?

- ○ x_1
- ☒ x_1, φ
- ○ x_1, x_2, φ

b) Durch welche Koordinaten wird die Bewegung des Systems eindeutig beschrieben, wenn kein Gleiten auftritt?

- ☒ x_1
- ○ x_1, φ
- ○ x_1, x_2, φ

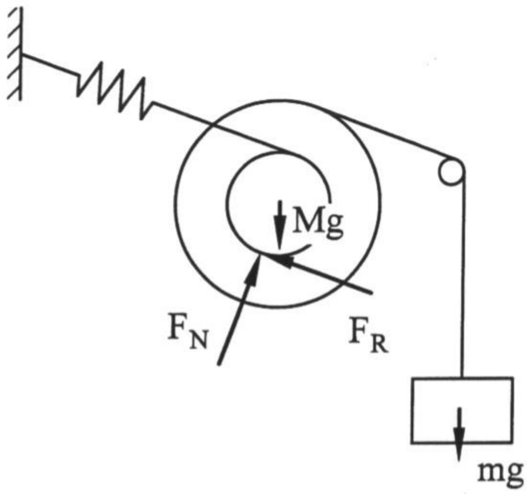
Im Folgenden wird angenommen, dass kein Gleiten auftritt.

c) Welche kinematischen Beziehungen bestehen zwischen den Koordinaten x_1, x_2 und φ?

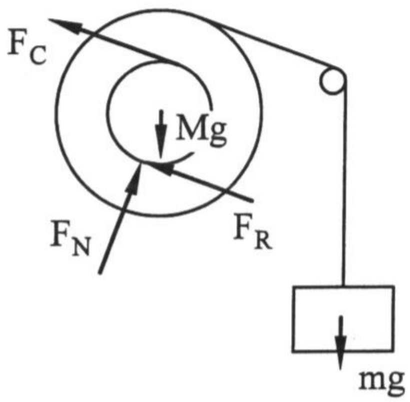
$x_1 = r\varphi$, $x_2 = R\varphi + x_1 = (R+r)\varphi$

d) Wie wendet man das Schnittprinzip an?

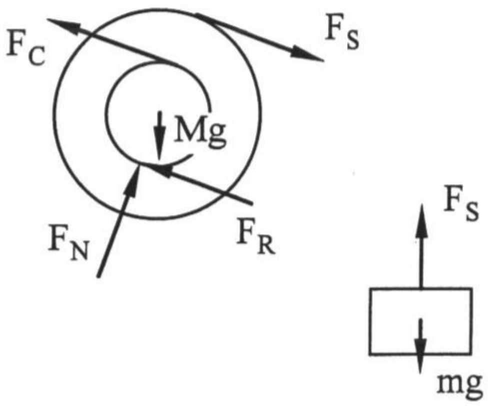
- [ ] Schnitt am Berührpunkt zwischen Rolle und Schiene



- [ ] Schnitt wie oben und am elastischen Band



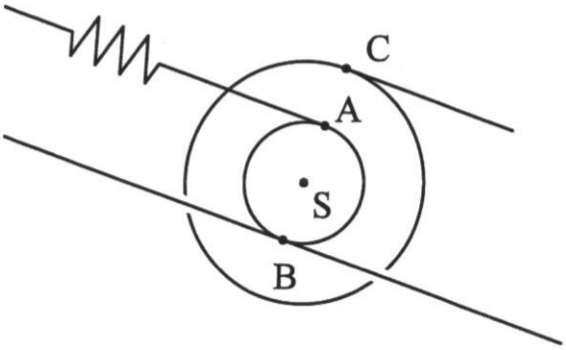
- [x] Schnitt wie oben und am Seil



e) Warum ist in diesem Fall die Seilkraft zwischen Kabelrolle und Umlenkrolle als auch zwischen Umlenkrolle und Gewicht betragsmäßig gleich?

- ☒ Wegen der Masselosigkeit der Umlenkrolle.
- ☒ Wegen der reibungsfreien Lagerung der Umlenkrolle.
- ○ Die Gleichheit der beiden Kräfte gilt bei Umlenkrolle immer, unabhängig von der Masse der Rolle und ihrer Lagerung.
- ○ Weil Seile nur Zugkräfte aufnehmen können.

f) Auf welchen Bezugspunkt P wendet man richtig und zweckmäßig den Drallsatz in der Form $\Theta_P \, \ddot{\varphi} = \sum M_P$ an?



- ○ P = A
- ☒ P = B
- ○ P = C
- ☒ P = S

Momentanpol $\underline{a}_{0P} \parallel \underline{r}_{PS}$ und Drehung um Achse parallel zur Hauptträgheitsachse

$\underline{r}_{PS} = \underline{r}_{SS} = \underline{0}$

g) Durch welche der Gleichungssysteme wird die Bewegung des Systems beschrieben?

☒
$$\begin{cases} M\,(k^2 + r^2)\,\ddot{\varphi} = -2r\,F_C + r\sin\alpha\,Mg + (r+R)\,F_S \\ m\,(r+R)\,\ddot{\varphi} = mg - F_S \end{cases}$$

☒
$$\begin{cases} M\,k^2\,\ddot{\varphi} = r\,(F_R - F_C) + R\,F_S \\ M\quad \ddot{x}_1 = -F_R - F_C + F_S + Mg\sin\alpha \\ m\quad \ddot{x}_2 = mg - F_S \end{cases}$$

○
$$\begin{cases} M\,k^2\,\ddot{\varphi} = (F_R - F_C)\,r + mg\,R \\ M\,r\,\ddot{\varphi} = -F_R - F_C + (M+m)\,g\sin\alpha \end{cases}$$

Daraus lässt sich die Bewegungsgleichung des Systems bestimmen

$$\left[M\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right)+m\left(\frac{r+R}{r}\right)^2\right]\ddot{x}_1+4c\,x_1 = mg\frac{r+R}{r}+Mg\sin\alpha$$

h) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage des Systems.

$$x_{10} = \frac{g}{4c}\left(m\,\frac{r+R}{r}+M\sin\alpha\right)$$

i) Wie groß ist die Eigenfrequenz des Systems?

- ○ $\nu^2 = \dfrac{c}{M+m}$
- ○ $\nu^2 = \dfrac{4c\,r^2}{mg\,(R+r)+Mg\,r\sin\alpha}$
- ⊗ $\nu^2 = \dfrac{4c\,r^2}{M\,(k^2+r^2)+m\,(r+R)^2}$

j) Wie groß ist die kinetische Energie des Systems?

- ⊗ $T = \dfrac{1}{2}\left[M\left(k^2+r^2\right)+m\left(r+R\right)^2\right]\dot{\varphi}^2$
- ⊗ $T = \dfrac{1}{2}M\,k^2\,\dot{\varphi}^2+\dfrac{1}{2}M\,\dot{x}_1^2+\dfrac{1}{2}m\,\dot{x}_2^2$
- ○ $T = \dfrac{1}{2}M\,k^2\,\dot{\varphi}+\dfrac{1}{2}M\,\dot{x}_1+\dfrac{1}{2}m\,\dot{x}_1$

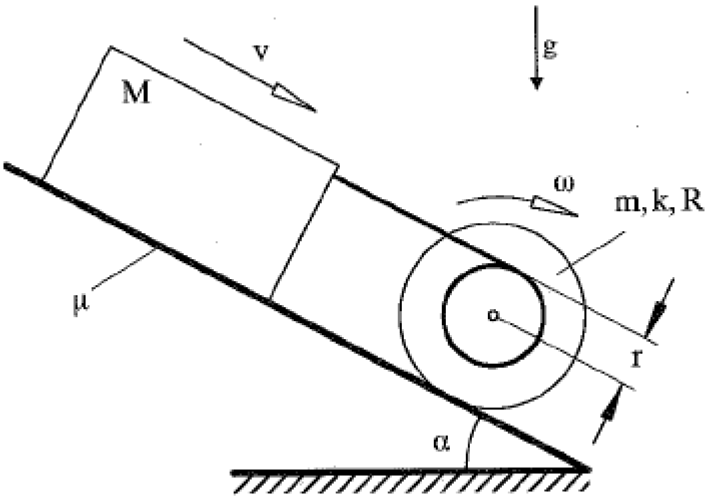
k) Wie groß ist die potentielle Energie des Systems?

- ⊗ $V = 2\,c\,x_1^2-Mg\,x_1\sin\alpha-mg\,x_1\,\dfrac{r+R}{r}$
- ○ $V = \dfrac{1}{2}c\,x_1^2-Mg\,x_1\sin\alpha-mg\,x_1\,\dfrac{r+R}{r}\sin\alpha$
- ○ $V = \dfrac{1}{2}c\,x_1^2+Mg\,x_1\sin\alpha+mg\,x_1\,\dfrac{r+R}{r}$

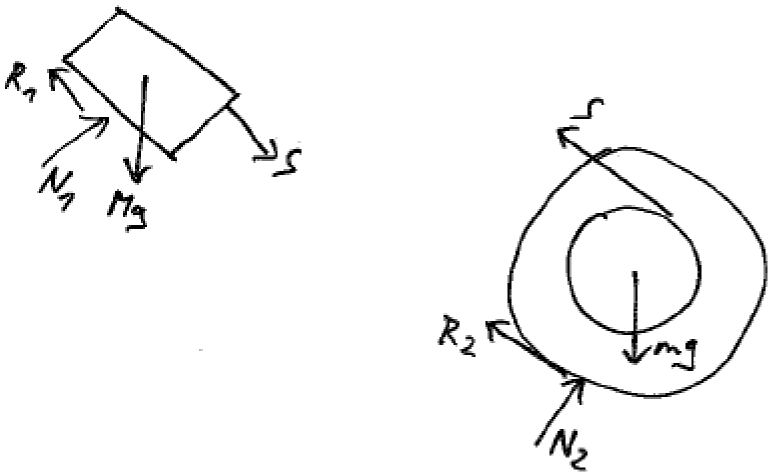
Die kinetische und potentielle Energie kann später zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen mittels der Lagrange−Funktion verwendet werden.

Aufgabe 2:

Eine Walze (Masse m, Trägheitsradius k, Rollradius R) ist über ein undehnbares Seil mit einem Klotz (Masse M) verbunden. Der Klotz gleitet auf einer schiefen Ebene (Gleitreibungskoeffizient μ), die Walze rollt. Das Seil umschlingt den Walzenkern mit dem Radius $r \leq R$.



a) Schneiden Sie Klotz und Walze frei, tragen Sie alle Kräfte ein und benennen Sie diese.



b) Welcher kinematische Zusammenhang besteht zwischen der Klotzgeschwindigkeit v und der Winkelgeschwindigkeit ω der Rolle?

$v = \omega(r + R)$

c) Formulieren Sie Impuls- und Drallsatz für die Walze.

$$m R \dot{\omega} = m g \sin\alpha - S - R_2$$

$$0 = N_2 - m g \cos\alpha$$

$$m \ell^2 \dot{\omega} = R_2 R - S r$$

d) Formulieren Sie den Impulssatz für den Klotz.

$$M \dot{v} = M g \sin\alpha + S - R_1$$

$$0 = N_1 - M g \cos\alpha$$

e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung.

$$\left[m(\ell^2 + R^2) + M(r+R)^2\right] \dot{\omega} =$$

$$m g R \sin\alpha + M g (r+R)(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)$$

f) Unter welcher Bedingung wird das System nach unten beschleunigt?

☒ $\tan\alpha > \mu \dfrac{1 + \frac{r}{R}}{1 + \frac{r}{R} + \frac{m}{M}}$

○ $\tan\alpha > \mu \dfrac{1}{1 + \frac{r}{R} + \frac{m}{M}}$

○ $\tan\alpha > \mu \dfrac{1 + \frac{r}{R}}{1 + \frac{m}{M}}$

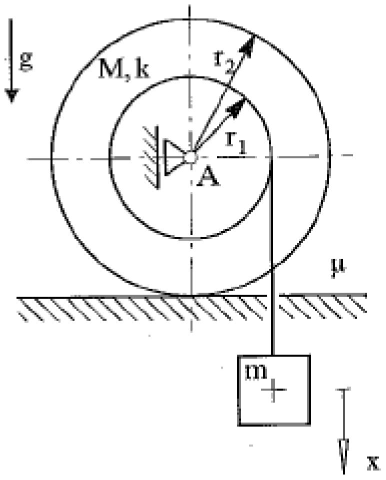
g) Welcher qualitative Verlauf ergibt sich für die Klotzgeschwindigkeit $v(t)$ unter dieser Bedingung?

○ konstant

☒ linear

○ quadratisch

Aufgabe 3:



Auf einer ebenen Unterlage liegt eine Walze mit starr verbundener Seiltrommel (Gesamtmasse M, Trägheitsradius k, Walzenradius r_2, Trommelradius r_1). Die Drehachse A ist vertikal verschieblich. Um die Seiltrommel ist ein Seil geschlungen, an dem die Masse m hängt. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Walze und Ebene ist $\mu < \mu_0$.

a) Welche Bedingung gilt für den Haftreibungskoeffizienten μ_0, wenn keine Bewegung eintreten soll?

$$\mu_0 \geq \frac{m}{M+m} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

b) Das System sei nun in Bewegung. Wie groß ist dann die Beschleunigung $\ddot{x}$ der Masse m?

$$\ddot{x} = \frac{m r_1 (r_1 - \mu r_2) - M \mu r_1 r_2}{m r_1 (r_1 - \mu r_2) + M k^2} g$$

c) Bestimmen Sie die im Lager A auftretende Horizontalkraft für $\ddot{x} = \frac{1}{2} g$.

$$F_A = \mu g \left(M + \frac{m}{2}\right)$$

(Kraft nach links auf Trommel)