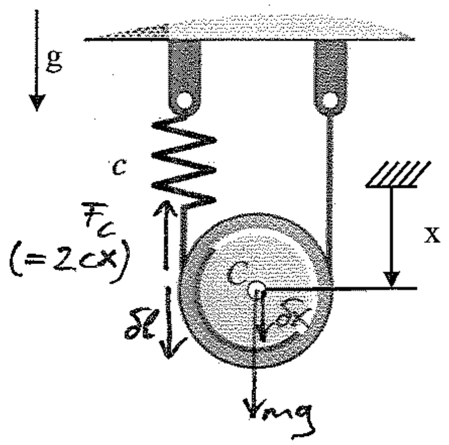
Aufgabe 1: Ein Seilrolle in Form eines homogenen Zylinders (Radius r, Masse m) wird über ein Seil und eine Feder (Federsteifigkeit c) gehalten. Die Seilrolle soll sich nur vertikal bewegen und am Seil abrollen. Die Auslenkung des Seilrollenschwerpunkts wird mit x bezeichnet, für $x = 0$ ist die Feder entspannt.



a) Tragen Sie die eingeprägten Kräfte und virtuellen Verschiebungen in die Zeichnung ein.

b) Bestimmen Sie die kinematischen Zusammenhänge zwischen den virtuellen Verschiebungen.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit die Gleichgewichtslage.

d) Ermitteln Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems.

e) Formulieren Sie die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art und überprüfen Sie ihr Ergebnis durch Berechnung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe von Impuls- und Drallsatz.

b) $\delta\ell = 2\delta x$ (analog $\ell = 2x$), da Momentanpol am Kontaktpunkt von Scheibe und rechtem Seiltrum

c) Gleichgewicht: $\delta W_e \overset{!}{=} 0$

$$\delta W_e = \sum \underline{F}_{ei} \cdot \delta \underline{r}_i$$

$$\delta W_e = mg\,\delta x - c\ell\,\delta\ell$$
$$= mg\,\delta x - c(2x)(2\delta x)$$
$$= (mg - 4cx)\,\delta x \overset{!}{=} 0$$

$$\delta x \neq 0 \Rightarrow mg - 4cx = 0$$
$$x = \frac{mg}{4c}$$

d) kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2$

mit $\omega = \frac{\dot{x}}{r}$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mr^2\frac{\dot{x}^2}{r^2} = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

potentielle Energie: $V = -mgx + \frac{1}{2}(2cx)(2x)$

$$= -mgx + 2cx^2$$

e) $L^* = T - V$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0 , \qquad i = 1(1)f$$

hier: $q_1 = x$

$$L^* = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 - 2cx^2 + mgx$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_1} = \frac{\partial L^*}{\partial x} = -4cx + mg$$

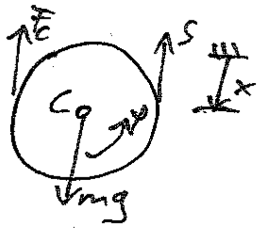
$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{3}{2} m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} + 4cx - mg = 0$$

$$\boxed{\frac{3}{2} m \ddot{x} + 4cx = mg}$$

2. Weg:



Impulssatz: $m\ddot{x} = mg - F_c - S$

$$m\ddot{x} = mg - 2cx - S \qquad (1)$$

Drallsatz (um C):

$$\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\varphi} = -2cxr + Sr \qquad \text{mit } \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

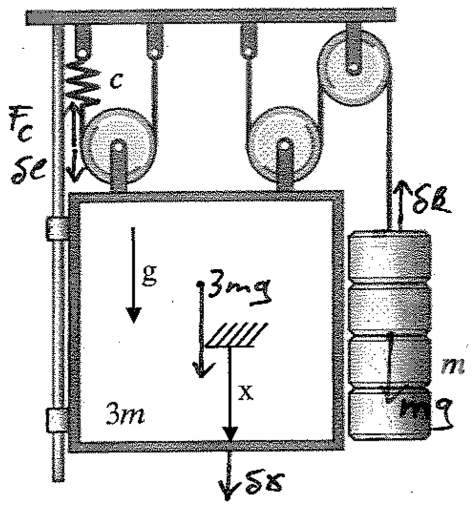
$$\frac{1}{2} m \cancel{r^2} \frac{\ddot{x}}{\cancel{r}} = -2cx\cancel{r} + S\cancel{r}$$

$$\frac{1}{2} m \ddot{x} = -2cx + S \qquad (2)$$

(1)+(2): $\frac{3}{2} m \ddot{x} = mg - 4cx$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + 4cx = mg \quad \checkmark$$

Aufgabe 2: Ein Aufzug (Masse $3m$) wird über masselose Seilrollen von einem Gegengewicht (Masse m) und einer Feder (Steifigkeit c) gehalten. Die Feder sei für $x = 0$ entspannt.



a) Formulieren Sie das Prinzip der virtuellen Arbeit für das System. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage.

b) Formulieren Sie das Prinzip von d'Alembert. Wie lautet die Bewegungsgleichung des Systems?

a) ∘ Eingeprägte Kräfte und virtuelle Verschiebungen einzeichnen.

- Prinzip der virtuellen Arbeit aufstellen $\delta W_e = \sum \underline{F}_{e,i} \cdot \delta \underline{r}_i \overset{!}{=} 0$

$$\delta W_e = 3mg\,\delta x - c\ell\,\delta\ell - mg\,\delta k = 0$$

- Kinematische Zusammenhänge bestimmen

$$\delta\ell = 2\delta x, \quad \ell = 2x$$
$$\delta k = 2\delta x$$

- Gleichgewichtslage berechnen

$$\delta W_e = 3mg\,\delta x - 4cx\,\delta x - 2mg\,\delta x$$
$$= mg\,\delta x - 4cx\,\delta x$$
$$= (mg - 4cx)\,\delta x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{mg}{4c}}$$

b) Prinzip von d'Alembert

$$\sum (\underline{F}_{e,i} - m_i \underline{a}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

mit $\delta r_1 = \delta \ell = 2\delta x$ und $m_1 = 0$

$\delta r_2 = \delta x$ $\quad m_2 = 3m$

$\delta r_3 = \delta k = 2\delta x$ $\quad m_3 = m$

$$(-c\ell - 0)\delta \ell + (3mg - 3m\ddot{x})\delta x + (-mg - m\ddot{k})\delta k = 0$$

$$-4cx\,\delta x + (3mg - 3m\ddot{x})\delta x + (-mg - 2m\ddot{x})2\delta x = 0$$

$$(-7m\ddot{x} - 4cx + mg)\delta x = 0$$

$$\boxed{7m\ddot{x} + 4cx = mg}$$