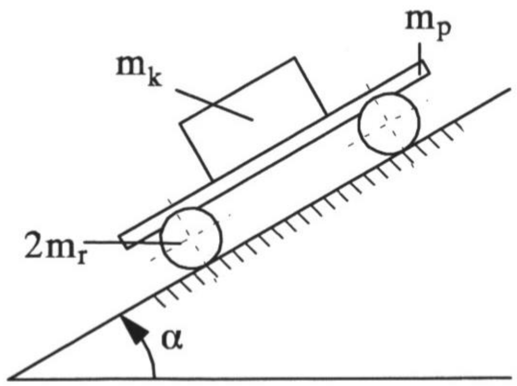
Aufgabe 1: Eine Kiste (Punktmasse m_k) liegt auf einem Eisenbahnwagen, der aus einer Platte (Masse m_p) und 2 Radsätzen besteht. Jeder Radsatz besteht aus zwei Rädern (homogene Vollscheiben, Masse je Vollscheibe m_r, Radius R), die durch eine masselose Achse verbunden sind. Für die Coulombsche Reibung zwischen Kiste und Platte ist der Reibungswinkel $\rho = 10°$.



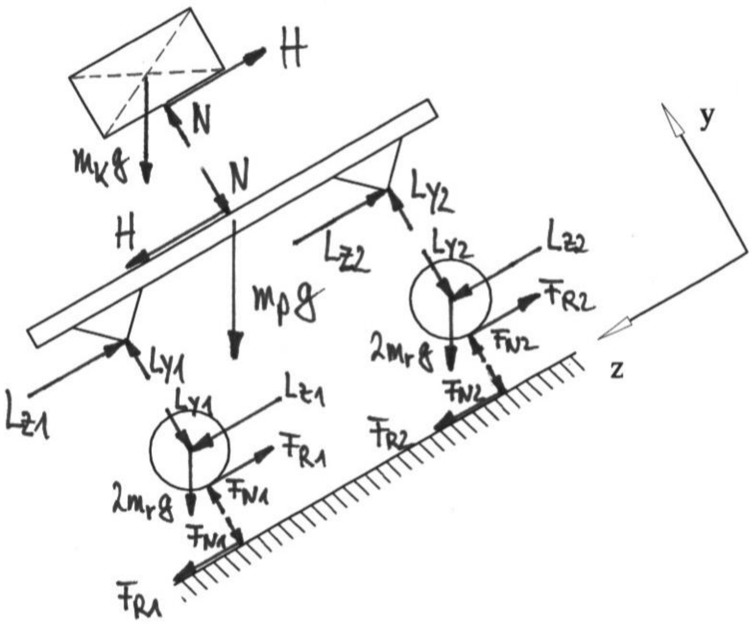
Die Verhältnisse der Massen sind $m_p : m_k : m_r = 3 : 2 : 1$.

Wie groß darf der Winkel α einer schiefen Ebene höchstens sein, wenn die Kiste auf dem herunterrollenden Wagen liegen bleiben soll?

a) Wie viele Teilkörper besitzt das System?

○ n = 2 ☒ n = 4 ○ n = 6

b) Zeichnen Sie in der folgenden Abbildung die eingeprägten Kräfte und die nach dem Schnittprinzip entstehenden Reaktionskräfte ein.



c) Welche Schnittkraft ist für das Liegenbleiben der Kiste maßgebend und welcher Gleichung bzw. Ungleichung genügt sie?

$$|H| \le N \tan\rho \qquad (1)$$

d) Liegt eine ebene Bewegung in einer Hauptträgheitsebene aller Teilkörper vor?

☒ ja ○ nein

e) Wie groß sind die Beschleunigungen und Winkelbeschleunigungen aller Teilkörper? Alle Beschleunigungen sollen durch die Kistenbeschleunigung $\ddot{z}$ ausgedrückt werden.

Teilkörper	a_y	a_z	$\dot{\omega}$
Kiste	0	$\ddot{z}$	0
Platte	0	$\ddot{z}$	0
Radsätze	0	$\ddot{z}$	$\ddot{z}/R$

f) Für welche Koordinaten müssen die Grundgleichungen zur Berechnung der interessierenden Schnittkräfte angeschrieben werden?

Teilkörper	Kräfte-gleichgewicht			Impulssatz			Drallsatz bezüglich S		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
Kiste		X			(x)	X			
Platte						X			
Radsätze						X	X		

g) Wie groß ist das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe (Masse m, Radius R) bezüglich einer Achse, die parallel zur x–Achse ist und durch den Massenmittelpunkt geht?

$J = \frac{1}{2} m R^2$

h) Wie lauten die äußeren Kräfte auf die Teilkörper und die Momente auf die zwei Radsätze bezüglich ihres Schwerpunktes?

$\sum F_{ky} = N - m_K g \cos\alpha$

$\sum F_{kz} = -H + m_K g \sin\alpha$

$\sum F_{pz} = H + m_P g \sin\alpha - L_{z1} - L_{z2}$

$\sum F_{r1z} = 2 m_r g \sin\alpha + L_{z1} - F_{R1}$

$\sum F_{r2z} = 2 m_r g \sin\alpha + L_{z2} - F_{R2}$

$\sum M_{S1x} = F_{R1} R$

$\sum M_{S2x} = F_{R2} R$

i) Schreiben Sie die erforderlichen Grundgleichungen für die einzelnen Teilkörper an.

IS Kiste (y) $0 = -m_K g \cos\alpha + N$ (2)

IS Kiste (z) $m_K \ddot{z} = m_K g \sin\alpha - H$ (3)

IS Platte (z) $m_P \ddot{z} = m_P g \sin\alpha + H - L_{Z1} - L_{Z2}$ (4)

IS Radsatz 1 (z) $2m_r \ddot{z} = 2m_r g \sin\alpha + L_{Z1} - F_{R1}$ (5)

IS Radsatz 2 (z) $2m_r \ddot{z} = 2m_r g \sin\alpha + L_{Z2} - F_{R2}$ (6)

DS Radsatz 1 (um S) $m_r R^2 \frac{\ddot{z}}{R} = F_{R1} R$ (7)

DS Radsatz 2 (um S) $m_r R^2 \frac{\ddot{z}}{R} = F_{R2} R$ (8)

j) Beweisen Sie durch Elimination der Reaktionskräfte, dass die Kistenbeschleunigung den folgenden Wert besitzt

$$\ddot{z} = \frac{m_p + m_k + 4m_r}{m_p + m_k + 6m_r} g \sin\alpha . \quad (9)$$

k) Wie groß darf der Winkel α höchstens sein, damit die Kiste liegen bleibt?

$$\tan\alpha \le \frac{(m_P + m_K + 6m_r)\tan\varrho}{2m_r}$$

l) Welcher Zahlenwert ergibt sich für den Winkel α?

○ $\alpha = 22.06°$ ☒ $\alpha = 44.12°$ ○ $\alpha = 88.24°$

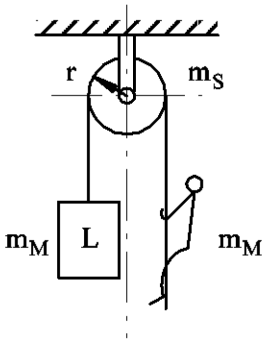
m) Der Impulssatz lässt sich auch für das Gesamtsystem anwenden, wobei nur die Reaktionskräfte der Ebene auf die Radsätze einen Beitrag zu den äußeren Kräften liefern.
Ergänzen Sie die folgende Gleichung für die z−Koordinate des Impulssatzes

$$(m_P + m_K + 4m_r)\,\ddot{z} = (m_p + m_k + 4m_r)\, g \sin\alpha + (-F_{R1} - F_{R2}) \quad (10)$$

n) Eliminieren Sie die Reaktionskräfte der Radsätze in (10) und vergleichen Sie das Ergebnis mit (9).

(7) und (8) in (10) eingesetzt

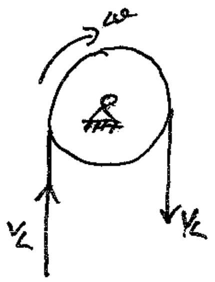
Aufgabe 19 *: Über eine homogene, zylindrische Scheibe mit der Masse m_S und dem Radius r läuft ein masseloses Seil. Ein Mann mit der Masse m_M klettert auf der rechten Seite hoch. Seine Geschwindigkeit gegenüber dem Seil sei v_{SM}. Links hängt eine Last L, die ebenfalls die Masse m_M hat.



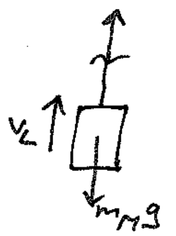
Wie bewegt sich die Last, wenn $m_S = m_M/4$ und die Anordnung zu Beginn in Ruhe ist?

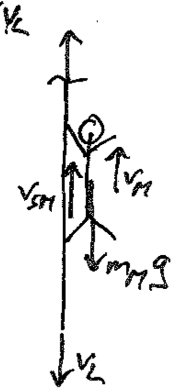
Vorgehen: – Kinematik
– Drallsatz
– Lösen / Interpretation

Kinematik:



$v_L = \omega r \Leftrightarrow \omega = \frac{v_L}{r}$ (1)





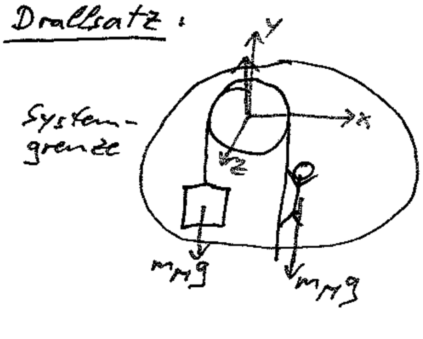
$v_M = v_{SM} - v_L$ (2)

Absolutgeschw. Person

Absolutgeschw. Seil

Relativgeschw. Pers. / Seil

Drallsatz:



äußere Momente verschwinden

$M_{a0z} = -m_M g r + m_M g r = 0$

$\Rightarrow L_{0z} = \text{konst.} = L_{0z}(t=0) = 0$ (3)

am Anfang in Ruhe

Drall: $L_{Oz} = L_{Scheibe} + L_{Last} + L_{Person}$

$$= \underbrace{-\tfrac{1}{2} m_S r^2 \omega}_{J_S \omega} \underbrace{- m_M r v_L}_{L_S + m\, r_{OS} \times v_{OS},\ L_S \to 0} + m_M r v_M$$

$$\overset{(1)}{=} -\tfrac{1}{2} m_S r^{\cancel{2}} \frac{v_L}{\cancel{r}} + m_M r (v_M - v_L)$$

$$\overset{(2)}{=} -\tfrac{1}{2} m_S r v_L + m_M r (v_{SM} - 2 v_L)$$

$$= -r \left[\left(\tfrac{1}{2} m_S + 2 m_M\right) v_L - m_M v_{SM} \right] \overset{(3)}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad v_L = \frac{2 m_M}{m_S + 4 m_M} v_{SM}$$

Ergebnis für $m_S = \frac{1}{4} m_M$: $\boxed{v_L = \frac{8}{17} v_{SM}}$

$$v_M = \frac{9}{17} v_{SM}$$

Grenzfälle: $m_S \to \infty \Rightarrow v_L \to 0$: keine Bewegung von Last und Scheibe

$m_S = 0 \Rightarrow v_L = v_M$: Last bewegt sich mit Person nach oben