18. August 2022

Bachelorprüfung in Technische Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
Musterlösung	
Matr.-Nummer	Fachrichtung
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

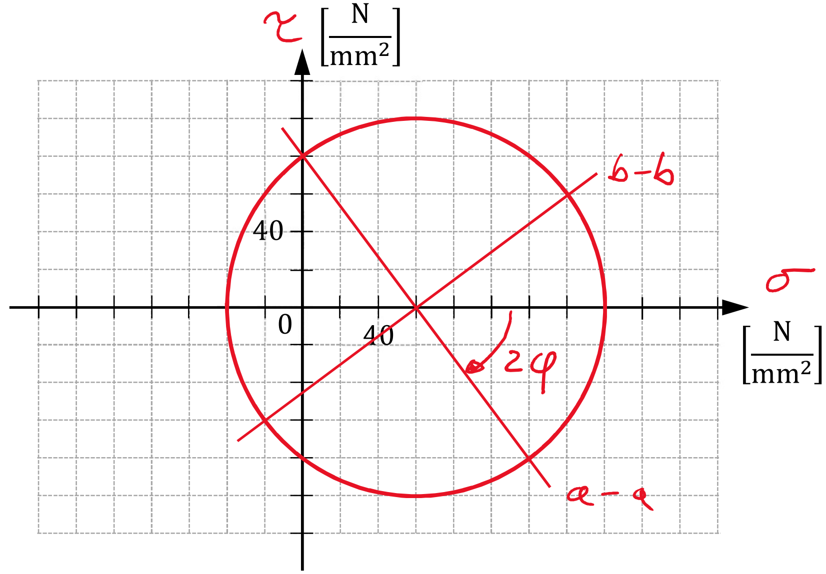
....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$ 72	HE

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Der Spannungszustand eines Bauteils soll im Punkt P untersucht werden. Für den Schnitt $a-a$ sind die Normalspannung $\sigma_a = 120\,\mathrm{N/mm^2}$ sowie die Schubspannung $\tau_a = -80\,\mathrm{N/mm^2}$ bekannt. Im Schnitt $b-b$ beträgt die Normalspannung $\sigma_b = 140\,\mathrm{N/mm^2}$ und die Schubspannung $\tau_b = 60\,\mathrm{N/mm^2}$.
Gegeben: $\sigma_a, \tau_a, \sigma_b, \tau_b$

a) Zeichnen Sie den Mohr‘schen Spannungskreis für den Punkt P und kennzeichnen Sie die Schnitte $a-a$ und $b-b$. Beschriften Sie außerdem die Achsen.



b) Wie groß sind die erste und zweite Hauptspannung im Punkt P?

$\sigma_1 = 160\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $\sigma_2 = -40\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$

c) Um welchen Winkel ist der Schnitt $a-a$ gegenüber der ersten Hauptspannungsrichtung verdreht?

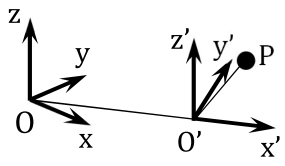
$\varphi = -26{,}6^\circ \left(= -\frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$

d) Welcher Winkel liegt zwischen den Schnitten $a-a$ und $b-b$?

$\varphi_{ab} = 45^\circ$

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Die Lage des Punktes P bezüglich O' wird im Koordinatensystem K' durch den Vektor $\mathbf{r}_{O'P,K'} = [at^2 + bt, 0, 2bt]^T$ beschrieben. Der Ursprung O' von K' bezüglich O ist durch den Ortsvektor $\mathbf{r}_{OO',K} = [R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), 0]^T$ im Koordinatensystem K gegeben. Die Orientierung von K' gegenüber K wird durch eine mathematisch positive Verdrehung um die z-Achse mit dem Winkel ωt festgelegt. Zum Zeitpunkt t=0 haben beide Koordinatensysteme die gleiche Orientierung. Die Größen R, a, b und ω sind konstant.
Gegeben: R, a, b, ω



a) Geben Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{OO'}$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}_{OO'}$ von O' bezüglich O, dargestellt im Koordinatensystem K, an.

$$\mathbf{v}_{OO',K} = \begin{bmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_{OO',K} = \begin{bmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet die Matrix $\mathbf{C}_{KK'}$, welche die Verdrehung von K' gegenüber K beschreibt?

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Wie lautet der Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{KK'}$ der Drehung des Koordinatensystems K' gegenüber K, dargestellt im Koordinatensystem K'?

$$\boldsymbol{\omega}_{KK',K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

d) Welche Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{O'P}$ hat der Punkt P bezüglich O', dargestellt im Koordinatensystem K'?

$$\mathbf{v}_{O'P,K'} = \begin{bmatrix} 2at + b \\ 0 \\ 2b \end{bmatrix}$$

e) Wie lauten die Führungsbeschleunigung $\mathbf{a}_F$, die Coriolis-Beschleunigung $\mathbf{a}_C$ und die Relativbeschleunigung $\mathbf{a}_{rel}$, jeweils dargestellt in K'?

$$\mathbf{a}_{F,K'} = \begin{bmatrix} -\omega^2(at^2+bt) - \omega^2 R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

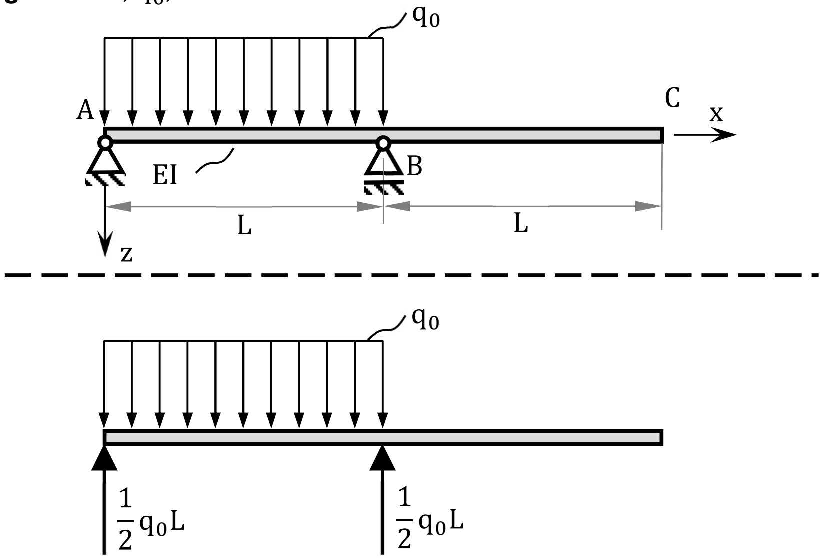
$$\mathbf{a}_{C,K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega(2at+b) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{rel,K'} = \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Der skizzierte ebene, masselose Balken (Gesamtlänge $2L$, Biegesteifigkeit EI) ist im Bereich $0 < x < L$ durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Abgebildet ist zudem das zugehörige Freikörperbild mit den bereits berechneten Lagerreaktionen.

Gegeben: EI, q_0, L



a) Geben Sie für den Bereich $0 < x < 2L$ die Streckenlast $q(x)$ unter Verwendung von Föppl-Klammern an.

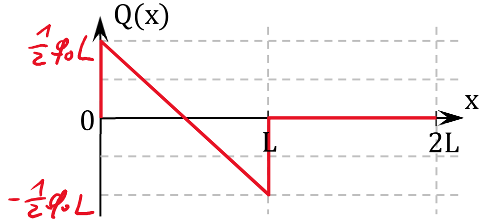
$q(x) = q_0 - q_0\langle x-L\rangle^0$

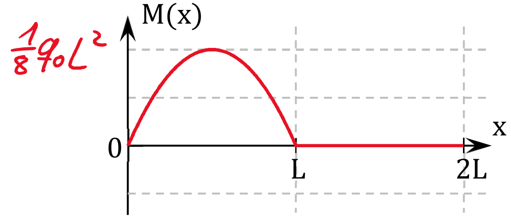
b) Geben Sie für den Bereich $0 < x < 2L$ die Querkraft $Q(x)$ sowie das Biegemoment $M(x)$ unter Verwendung von Föppl-Klammern an.

$Q(x) = \frac{1}{2}q_0L + \frac{1}{2}q_0L\langle x-L\rangle^0 - q_0x + q_0\langle x-L\rangle^1$

$M(x) = \frac{1}{2}q_0Lx + \frac{1}{2}q_0L\langle x-L\rangle^1 - \frac{1}{2}q_0x^2 + \frac{1}{2}q_0\langle x-L\rangle^2$

c) Skizzieren Sie für den Bereich $0 < x < 2L$ den Verlauf der Querkraft $Q(x)$ sowie des Biegemoments $M(x)$. Beschriften Sie die Achsen.





d) Geben Sie die zwei für die Bestimmung der Biegelinie $w(x)$ notwendigen Randbedingungen in den Punkten A und B des Systems an.

$w(0) = 0$, $w(L) = 0$

e) Geben Sie für den Bereich $0 < x < 2L$ die Biegelinie $w(x)$ sowie die Steigung $w'(x)$ der Biegelinie unter Verwendung von Föppl-Klammern an.

$EI\,w'(x) = -\frac{q_0L}{4}x^2 + \frac{q_0}{6}x^3 - \frac{q_0}{6}\langle x-L\rangle^3 - \frac{q_0L}{4}\langle x-L\rangle^2 + \frac{q_0L^3}{24}$

$EI\,w(x) = -\frac{q_0L}{12}x^3 + \frac{q_0}{24}x^4 - \frac{q_0}{24}\langle x-L\rangle^4 - \frac{q_0L}{12}\langle x-L\rangle^3 + \frac{q_0L^3}{24}x$

f) An welcher Stelle $x = \hat{x}$ wird im Bereich $0 < x < L$ die betragsmäßig größte Durchbiegung erreicht?

$\hat{x} = \frac{L}{2}$

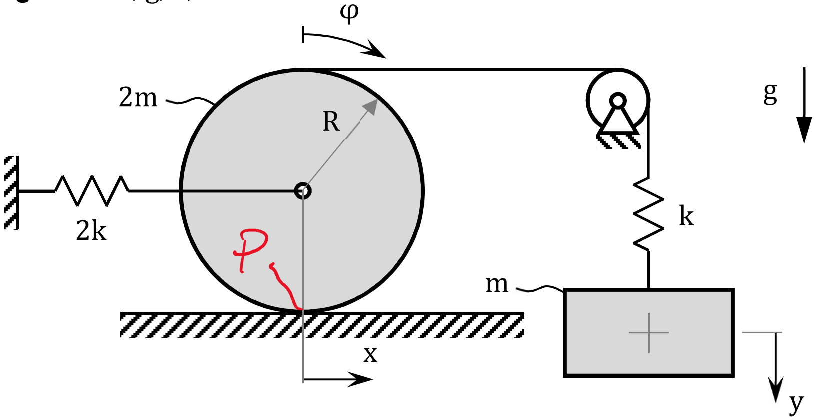
g) Bestimmen Sie basierend auf den Ergebnissen aus den Teilaufgaben e) und f) die betragsmäßig größte Durchbiegung des gesamten Balkens $|w_{max}|$ im Bereich $0 \leq x \leq 2L$.

$|w_{max}| = \frac{q_0L^4}{24EI}$

Aufgabe 4 (13 Punkte)

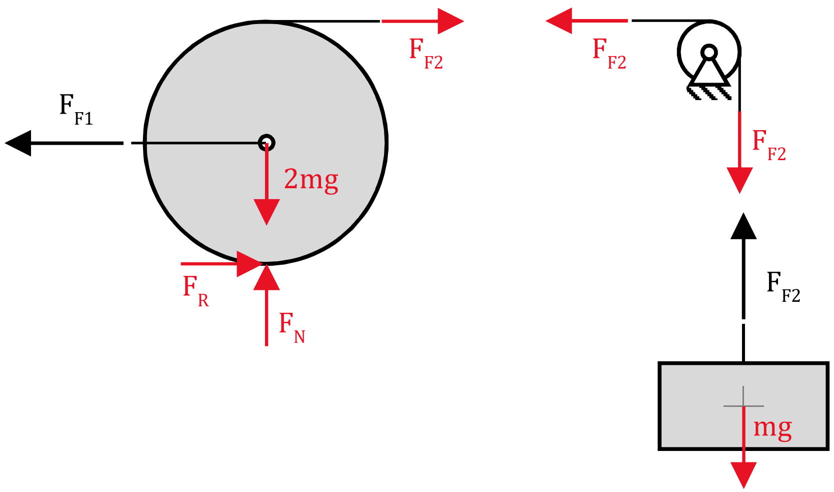
Eine Walze (homogen, Masse $2m$, Radius R) rollt ohne zu gleiten auf einer horizontalen Ebene. Über eine Feder (Federsteifigkeit $2k$) ist der Schwerpunkt der Walze mit einer Wand verbunden. Zusätzlich ist an der Walze über ein masseloses Seil, das über eine masselose, reibungsfrei gelagerte Umlenkrolle geführt ist, und eine Feder (Federsteifigkeit k) eine Last (homogen, Masse m) angebracht. Die Federn sind in der Ausgangslage $(x = 0, y = 0)$ gerade entspannt. Die Last bewegt sich nur in vertikaler Richtung.

Gegeben: m, g, k, R



a) Kennzeichnen Sie den Momentanpol P der Walze in der Skizze.

b) Ergänzen und benennen Sie die fehlenden Kräfte im nachfolgenden Freikörperbild. Bemaßen Sie die fehlenden eingeprägten Kräfte in gegebenen Größen. Bezeichnen Sie eingeführte Größen eindeutig.



c) Wie lautet der kinematische Zusammenhang zwischen x und φ?

$x(\varphi) = R\varphi$

d) Wie groß sind die Federkräfte F_{F1} und F_{F2} in Abhängigkeit der Auslenkung y und des Winkels φ?

$F_{F1} = 2kR\varphi$, $\qquad F_{F2} = k(y-2R\varphi)$

e) Geben Sie für die Walze den Drallsatz bezüglich ihres Momentanpols sowie für die Last den Impulssatz in y-Richtung an. Nutzen Sie die von Ihnen in Aufgabenteil b) eingeführten Größen. Setzen Sie für F_{F1} und F_{F2} nötigenfalls das Ergebnis aus Teilaufgabe d) ein.

$$3mR^2\ddot{\varphi} = -2kR^2\varphi + 2Rk(y-2R\varphi)$$

$$m\ddot{y} = -k(y-2R\varphi) + mg$$

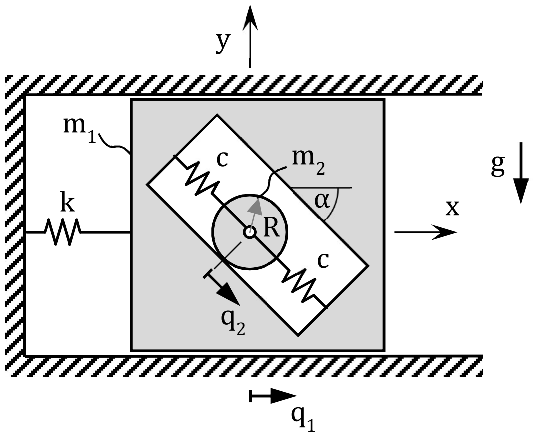
f) Vervollständigen Sie die Bewegungsgleichung des Systems in Abhängigkeit der Koordinaten φ und y.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\frac{k}{m} & -\frac{2}{3}\frac{k}{mR} \\ -2\frac{kR}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$$

g) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage φ_0 und y_0 des schwingungsfähigen Systems.

$\varphi_0 = \frac{gm}{kR}$, $\qquad y_0 = 3\frac{gm}{k}$

Aufgabe 5 (14 Punkte)



Die Bewegungsgleichungen des skizzierten ebenen Systems sollen mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art ermittelt werden. Das System besteht aus zwei Körpern. Körper 1 (Masse m_1) ist reibungsfrei in x-Richtung verschiebbar und über eine Feder (Federsteifigkeit k) mit einer Wand verbunden. Körper 2 ist eine Scheibe (homogen, Masse m_2, Radius R), die in Körper 1 abrollt ohne zu gleiten und mit diesem über zwei Federn (jeweils Federsteifigkeit c) verbunden ist. Die verallgemeinerte Koordinate q_1 beschreibt die Verschiebung des Körpers 1 bezüglich des gegebenen Inertialsystems. Die verallgemeinerte Koordinate q_2 beschreibt die Verschiebung des Schwerpunkts von Körper 2 relativ zu Körper 1. Für $q_1 = q_2 = 0$ sind die Schwerpunkte beider Körper im Ursprung des Inertialsystems und die Federn gerade entspannt. Der Winkel α ist konstant.

Gegeben: $m_1, m_2, R, g, k, c, \alpha$

a) Geben Sie für die Schwerpunkte der Körper 1 und 2 die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ sowie $\mathbf{r}_2$ im gegebenen Inertialsystem unter Verwendung der verallgemeinerten Koordinaten q_1 und q_2 an.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} q_1 + q_2\cos(\alpha) \\ -q_2\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie für die Schwerpunkte der Körper 1 und 2 die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_1$ sowie $\mathbf{v}_2$ im gegebenen Inertialsystem unter Verwendung der verallgemeinerten Koordinaten q_1 und q_2 an.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \dot q_1 + \dot q_2\cos(\alpha) \\ -\dot q_2\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

c) Berechnen Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems unter Verwendung der verallgemeinerten Koordinaten q_1 und q_2.

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot q_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot q_1^2 + \frac{3}{2}\dot q_2^2 + 2\dot q_1\dot q_2\cos(\alpha)\right)$$

$$V = \frac{1}{2}k q_1^2 + c q_2^2 - m_2 g q_2 \sin(\alpha) \quad (+V_0)$$

d) Geben Sie die Formel für die Lagrange-Funktion unter Verwendung der Größen T und V an.

$$L^* = T - V$$

e) Geben Sie die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion an.

$$\partial L^*/\partial q_1 = -k q_1, \quad \partial L^*/\partial q_2 = -2c q_2 + m_2 g \sin(\alpha)$$

$$\partial L^*/\partial \dot q_1 = (m_1 + m_2)\dot q_1 + m_2\cos(\alpha)\dot q_2$$

$$\partial L^*/\partial \dot q_2 = \frac{3}{2}m_2\dot q_2 + m_2\cos(\alpha)\dot q_1$$

f) Wie lauten die folgenden zeitlichen Ableitungen?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot q_1 + m_2\cos(\alpha)\ddot q_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_2}\right) = \frac{3}{2}m_2\ddot q_2 + m_2\cos(\alpha)\ddot q_1$$

g) Welche Eigenschaften hat das vorliegende, schwingungsfähige System?

- ☒ linear
- ☐ nichtlinear
- ☐ gedämpft
- ☒ ungedämpft

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Der dimensionslose Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,K}$ einer dünnen rechteckigen Platte bezüglich ihres Schwerpunkts S im Koordinatensystem K sei gegeben durch

$$\mathbf{I}_{S,K} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 4 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie die allgemeine Gleichung an, mit der aus $\mathbf{I}_{S,K}$ die Hauptträgheitsmomente bestimmt werden können.

$\det(I_{S,K} - \lambda E) = 0$

b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente A_0, B_0 und C_0 der dünnen Platte, wobei $A_0 > B_0 > C_0$ gilt.

$A_0 =$ 14, $B_0 =$ 10, $C_0 =$ 4

c) Berechnen Sie die zu den Hauptträgheitsmomenten A_0, B_0 und C_0 gehörenden Hauptträgheitsrichtungen $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ und $\mathbf{v}_C$.

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Wie lässt sich der Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,H}$ im Hauptachsensystem H aus dem Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,K}$ und der Drehmatrix $\mathbf{C}_{HK}$ bestimmen, wenn die Koordinatensysteme H und K zueinander ausschließlich verdreht sind?

$\mathbf{I}_{S,H} = \underline{C}_{HK}\, \underline{I}_{S,K}\, \underline{C}_{HK}^T$

e) Ergänzen Sie die fehlenden Einträge in der Drehmatrix $\mathbf{C}_{HK}^T$, sodass $\det\left(\mathbf{C}_{HK}^T\right) = 1$ gilt.

$$\mathbf{C}_{HK}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Die Aufgabenteile f) und g) lassen sich unabhängig von den Aufgabenteilen c) – e) lösen.

f) Geben Sie die Kantenlängen a und b der dünnen Platte an, wobei a > b gilt. Die Platte habe die Masse m.

$a = \sqrt{\frac{120}{m}} = 2\sqrt{\frac{30}{m}}$; $b = \sqrt{\frac{48}{m}} = 4\sqrt{\frac{3}{m}}$

g) Um welche Hauptträgheitsachse ist eine Drehung der Platte instabil?

☐ $\mathbf{v}_A$ ☒ $\mathbf{v}_B$ ☐ $\mathbf{v}_C$ ☐ um keine der Achsen

ENDE