24. Februar 2022

Bachelorprüfung in Technische Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
Musterlösung	
Matr.-Nummer	Fachrichtung
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

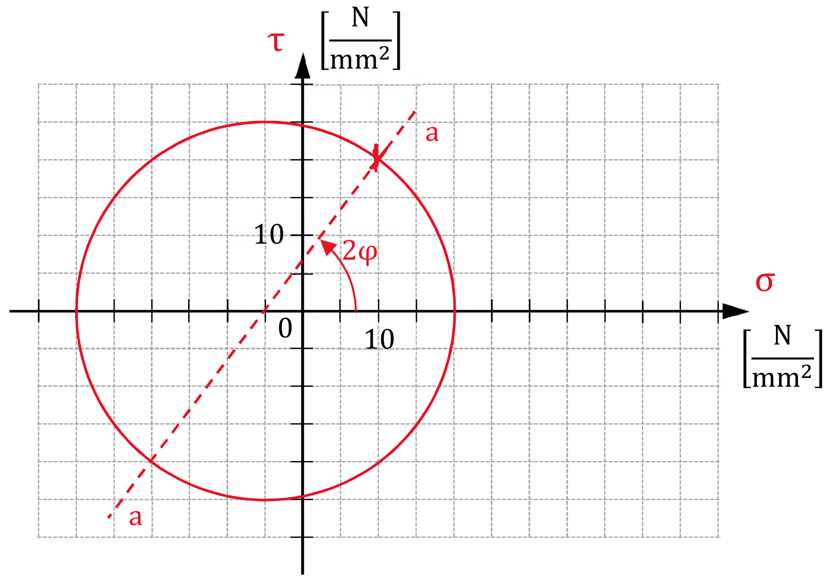
....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$ 75	HE

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Der Spannungszustand eines Bauteils soll im Punkt P untersucht werden. Für den Schnitt $a-a$ sind die Normalspannung $\sigma_a = 10\,\mathrm{N/mm^2}$ sowie die Schubspannung $\tau_a = 20\,\mathrm{N/mm^2}$ bekannt. Die maximale Schubspannung beträgt $\tau_{max} = \tau_b = 25\,\mathrm{N/mm^2}$. Der betrachtete Spannungszustand ist zweiachsig.
gegeben: $\sigma_a, \tau_a, \tau_b = \tau_{max}$

a) Zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis für den Punkt P und kennzeichnen Sie den Schnitt a – a. Beschriften Sie außerdem die Achsen.



b) Wie groß sind die erste und zweite Hauptspannung im Punkt P?

$\sigma_1 =$ 20 N/mm², $\sigma_2 =$ −30 N/mm²

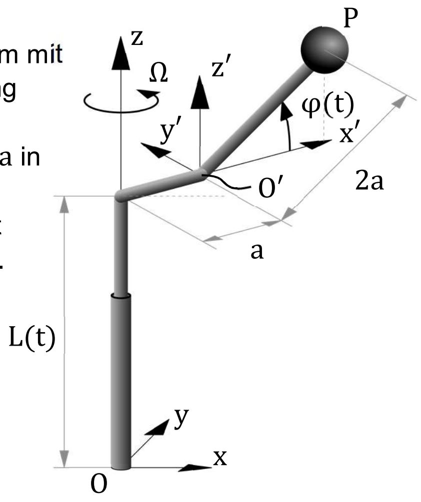
c) Um welchen Winkel ist der Schnitt a – a gegenüber der ersten Hauptspannungsrichtung verdreht?

$\varphi =$ 26,57° $= \frac{1}{2}\mathrm{atan}\left(\frac{4}{3}\right)$

d) Wie groß ist die zur Schubspannung $\tau_{max} = \tau_b$ gehörige Normalspannung σ_b im Punkt P?

$\sigma_b =$ −5 N/mm²

Aufgabe 2 (13 Punkte)



Gegeben sei der dargestellte Roboter. Ein Arm mit der veränderlichen Länge $L(t)$ verfährt entlang der z-Achse des raumfesten Koordinatensystems K (Ursprung O). Der Arm der Länge a in x‘-Richtung des körperfesten Koordinatensystems K' (Ursprung O') dreht sich dabei mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die z-Achse. Am Gelenk im Punkt O' ist zudem ein drehbarer Arm der Länge $2a$ befestigt. Dieser dreht wie dargestellt mit dem veränderlichen Winkel $\varphi(t)$ um die negative y‘-Achse. Am Ende des drehbaren Arms befindet sich der Punkt P. Für den Zeitpunkt $t=0$ haben beide Koordinatensysteme die gleiche Orientierung. Die Größen a und Ω sind konstant.

gegeben: $a, \Omega, L(t), \varphi(t)$

a) Geben Sie die Ortsvektoren $\mathbf{r}_{OO',K}$ und $\mathbf{r}_{O'P,K'}$ an.

$$\mathbf{r}_{OO',K} = \begin{bmatrix} a\cos(\Omega t) \\ a\sin(\Omega t) \\ L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{O'P,K'} = \begin{bmatrix} 2a\cos(\varphi) \\ 0 \\ 2a\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_{OO',K}$ und $\mathbf{v}_{O'P,K'}$ an.

$$\mathbf{v}_{OO',K} = \begin{bmatrix} -a\Omega\sin(\Omega t) \\ a\Omega\cos(\Omega t) \\ \dot{L}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{O'P,K'} = \begin{bmatrix} -2a\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ 0 \\ 2a\dot{\varphi}\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie die Matrix $\mathbf{C}_{KK'}$, welche die Verdrehung von K' gegenüber K beschreibt, sowie den zugehörigen Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{KK',K'}$ im Koordinatensystem K' an.

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{KK',K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$$

d) Geben Sie unter Verwendung der in Aufgabenteilen a) bis c) ermittelten Größen eine allgemeine Formel für die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{OP,K'}$ an. Verzichten Sie dabei auf die Differentiation dieser Größen.

$$\mathbf{v}_{OP,K'} = \mathbf{C}_{KK'}^T \mathbf{v}_{OO',K} + \boldsymbol{\omega}_{KK',K'} \times \mathbf{r}_{O'P,K'} + \mathbf{v}_{O'P,K'}$$

e) Wie lautet die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{OP,K'}$, die der Punkt P bezüglich O dargestellt im Koordinatensystem K' hat?

$$\mathbf{v}_{OP,K'} = \begin{bmatrix} -2a\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ 2a\Omega\cos(\varphi) + a\Omega \\ \dot{L} + 2a\dot{\varphi}\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

f) Wie lauten die Führungsbeschleunigung $\mathbf{a}_{F,K'}$ und die Coriolis-Beschleunigung $\mathbf{a}_{C,K'}$, jeweils dargestellt in K'?

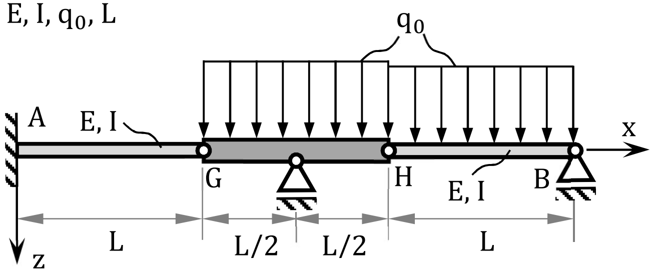
$$\mathbf{a}_{F,K'} = \begin{bmatrix} -a\Omega^2 - 2a\Omega^2\cos(\varphi) \\ 0 \\ \ddot{L} \end{bmatrix},$$

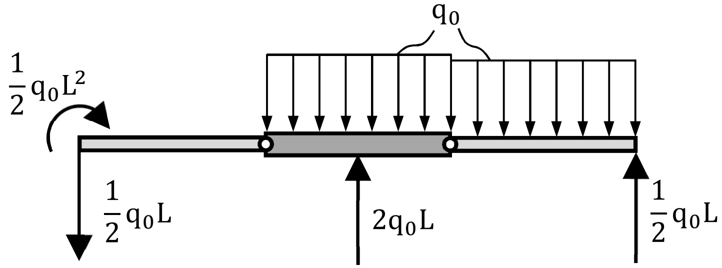
$$\mathbf{a}_{C,K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4a\Omega\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Das skizzierte ebene Balkensystem mit der Gesamtlänge $3L$ besteht aus zwei masselosen Balken (Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I, Länge L) sowie einem dünnen masselosen starren Rechteckselement. Das System ist durch die konstante Streckenlast q_0 wie dargestellt belastet. Abgebildet ist zudem das zugehörige Freikörperbild mit ausgerechneten Lagerreaktionen.

gegeben: E, I, q_0, L





a) Geben Sie für den Bereich $0 < x < 3L$ die Streckenlast $q(x)$ unter Verwendung der Föppl-Klammern an.

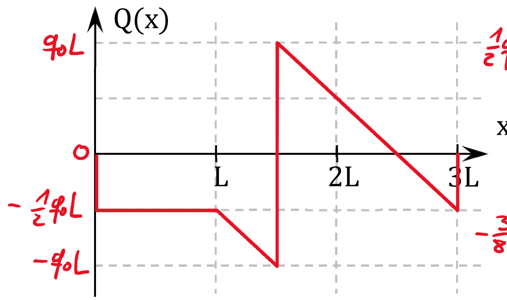
$q(x) = q_0\langle x-L\rangle^0$

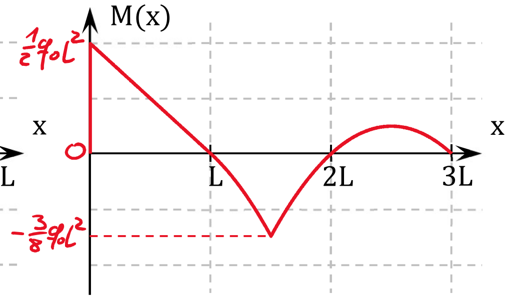
b) Geben Sie unter Verwendung der Föppl-Klammern, für den Bereich $0 < x < 3L$, die Querkraft $Q(x)$ sowie das Biegemoment $M(x)$ an.

$Q(x) = -\frac{1}{2}q_0L + 2q_0L\langle x-\frac{3}{2}L\rangle^0 - q_0\langle x-L\rangle^1$

$M(x) = \frac{1}{2}q_0L^2 - \frac{1}{2}q_0Lx + 2q_0L\langle x-\frac{3}{2}L\rangle^1 - \frac{1}{2}q_0\langle x-L\rangle^2$

c) Skizzieren Sie **qualitativ** für den Bereich $0 < x < 3L$ den Verlauf der Querkraft $Q(x)$ sowie des Biegemoments $M(x)$.





d) Geben Sie die drei für die Bestimmung der Biegelinie $w(x)$ notwendigen Randbedingungen in den Punkten A und B des Systems an.

$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(3L) = 0$

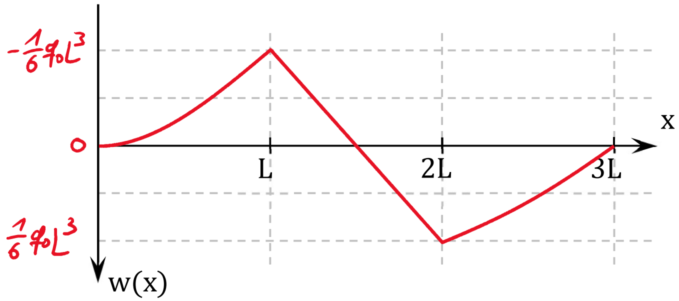
e) Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Durchbiegung im Gelenk G bei $(x = L)$ und der Durchbiegung im Gelenk H bei $(x = 2L)$?

$w(L) = -w(2L)$

f) Geben Sie für den Bereich $0 < x < L$ die Durchbiegung $w(x)$ an.

$EI\,w(x) = -\frac{1}{4}q_0L^2x^2 + \frac{1}{12}q_0Lx^3$

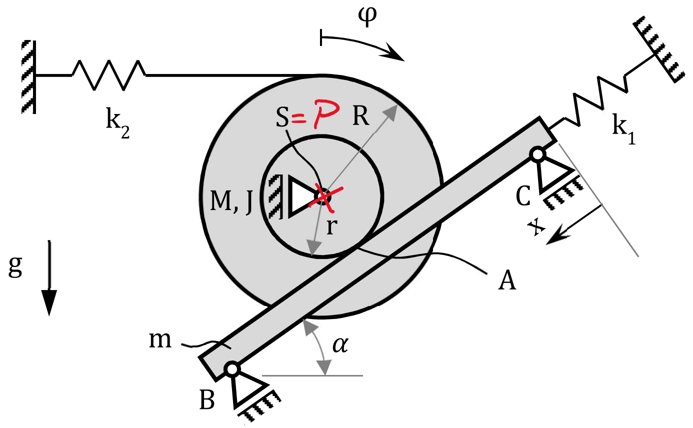
g) Skizzieren Sie für den Bereich $0 < x < 3L$ **qualitativ** die Durchbiegung $w(x)$ des Systems.



Aufgabe 4 (13 Punkte)

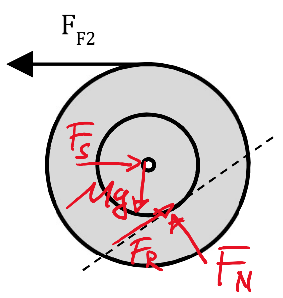
Eine Stufenrolle (Masse M, Trägheitsmoment J bezüglich Schwerpunkt S) liegt auf einer beweglichen Platte (Masse m), die um den Winkel α zur Horizontalen geneigt ist. Am rechten Ende der Platte ist eine Feder (Federsteifigkeit k_1) befestigt. Um den äußeren Teil der Rolle (Radius R) ist ein Seil geschlungen, dessen Ende mit einer Feder (Federsteifigkeit k_2) verbunden ist. Der innere Teil der Rolle (Radius r) rollt auf der Platte im Punkt A ohne zu gleiten. Die Federn sind in der Ausgangslage ($\varphi = 0, x = 0$) entspannt.

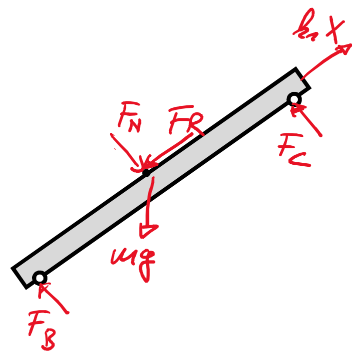
gegeben: $M, m, g, J, k_1, k_2, r, R, \alpha$



a) Kennzeichnen Sie den Momentanpol P der Stufenrolle in der Skizze.

b) Ergänzen und benennen Sie die fehlenden Kräfte im nachfolgenden Freikörperbild. Bemaßen Sie die fehlenden eingeprägten Kräfte in gegebenen Größen. Bezeichnen Sie eingeführte Größen eindeutig.





c) Wie lautet der kinematische Zusammenhang zwischen φ und x?

$\varphi(x) = \frac{x}{r}$

d) Wie groß ist die Federkraft F_{F2} in Abhängigkeit der Auslenkung x?

$F_{F2} = k_2 \frac{R}{r} x$

e) Geben Sie für die Stufenrolle den Drallsatz bezüglich ihres Momentanpols, sowie den Impulssatz der Platte in x-Richtung an. Nutzen Sie die von Ihnen in Aufgabenteil b) eingeführten Größen. Setzen Sie für F_{F2} nötigenfalls das Ergebnis aus Teilaufgabe d) ein.

$$J\ddot{\varphi} = -k_2 \frac{R^2}{r} x - F_R r$$

$$m\ddot{x} = F_R - k_1 x + mg\sin(\alpha)$$

Hinweis: Im Folgenden soll $R = 2r$ **sowie** $J = 16mr^2$ **sein.**

f) Vervollständigen Sie die Bewegungsgleichung des Systems in Abhängigkeit der Koordinate x.

$$(17m)\,\ddot{x} + (k_1 + 4k_2)\,x = mg\sin(\alpha)$$

g) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage x_0 des schwingungsfähigen Systems.

$$x_0 = \frac{mg\sin(\alpha)}{k_1 + 4k_2}$$

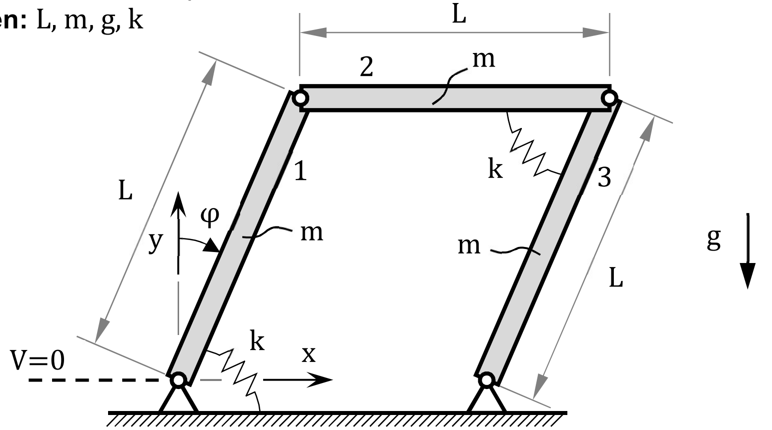
h) Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz ω des Systems?

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + 4k_2}{17m}}$$

Aufgabe 5 (13 Punkte)

Das dargestellte, ebene System besteht aus drei identischen homogenen, dünnen Stäben (Länge L, Masse m). Die Stäbe 1 und 3 sind an einem Ende reibungsfrei drehbar gelagert und an ihrem anderen Ende über Stab 2 über reibungsfreie Drehgelenke miteinander verbunden. An den Stäben sind Drehfedern (jeweils Drehfedersteifigkeit k) angebracht. Die Lage des Systems wird durch den Winkel φ beschrieben.

gegeben: L, m, g, k



a) Geben Sie für die Schwerpunkte der Stäbe 1 und 2 die Ortsvektoren $\mathbf{r}_{OS_1}$ sowie $\mathbf{r}_{OS_2}$ im gegebenen Koordinatensystem an.

$$\mathbf{r}_{OS_1}(\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\sin(\varphi) \\ \frac{L}{2}\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{OS_2}(\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} + L\sin(\varphi) \\ L\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie für den Schwerpunkt des Stabes 2 die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{OS_2}$ im gegebenen Koordinatensystem an.

$$\mathbf{v}_{OS_2}(\varphi, \dot{\varphi}) = \begin{bmatrix} L\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems.

$$T(\dot{\varphi}) = \frac{5}{6} m L^2 \dot{\varphi}^2$$

d) Bestimmen Sie die potentielle Energie des Systems. Das Nullniveau der Lageenergie der Stäbe sei bei $y = 0$. Die Drehfedern sind für den Winkel $\varphi = 0$ entspannt.

$$V(\varphi) = k\varphi^2 + 2mgL\cos(\varphi)$$

e) Geben Sie die Formel für die Lagrange-Funktion unter Verwendung der Größen T und V an.

$$L^* = T - V$$

f) Berechnen Sie die folgenden Ableitungen der Lagrange-Funktion.

$$\frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = -2k\varphi + 2mgL\sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{5}{3} m L^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{5}{3} m L^2 \ddot{\varphi}$$

g) Mit welcher Formel lässt sich nun die Bewegungsgleichung des Systems berechnen? Verwenden Sie die im vorherigen Aufgabenteil eingeführten Bezeichner für die Ableitungen, ohne die Ergebnisse für diese einzusetzen.

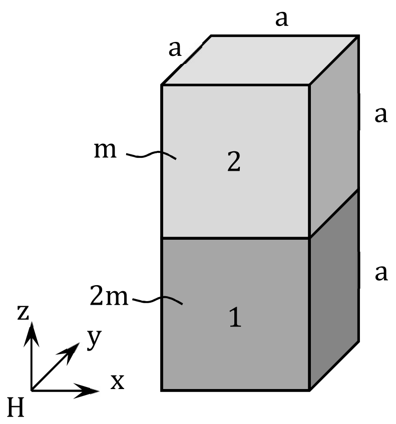
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = 0$$

h) Kreuzen Sie Zutreffendes an. Die auftretende Schwingung ist

- ☐ linear
- ☒ nichtlinear
- ☐ gedämpft
- ☒ ungedämpft

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Der skizzierte Körper besteht aus zwei homogenen, würfelförmigen Teilkörpern (jeweils Kantenlänge a). Der untere Würfel 1 hat die Masse $2m$, der obere Würfel 2 hat die Masse m.
gegeben: a, m



a) Bestimmen Sie jeweils den Betrag der Abstände zwischen den beiden Schwerpunkten (S_1 und S_2) der Würfel zu dem Gesamtschwerpunkt S_{ges} des Körpers in z-Richtung des Koordinatensystems H.

$|z_{S,1} - z_{S,ges}| =$ $\frac{1}{3}a$

$|z_{S,2} - z_{S,ges}| =$ $\frac{2}{3}a$

b) Vervollständigen Sie den Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,H}$ bezüglich des Gesamtschwerpunkts S_{ges} im gegebenen Koordinatensystem H.

$$\mathbf{I}_{S,H} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{6}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}ma^2 \end{bmatrix}$$

c) Wie lässt sich der Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,K}$ im Koordinatensystem K aus dem Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,H}$ und der Drehmatrix $\mathbf{C}_{HK}$ bestimmen, wenn die Koordinatensysteme H und K zueinander ausschließlich verdreht sind?

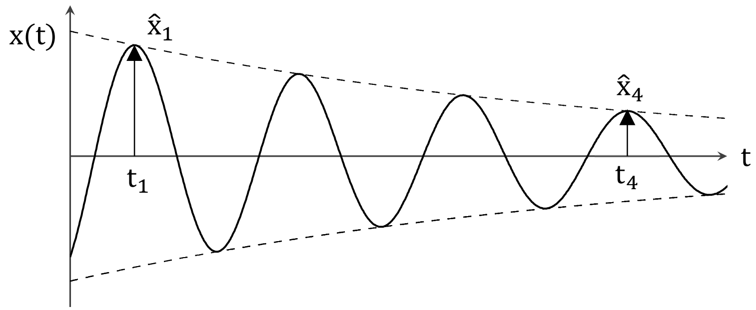
$\mathbf{I}_{S,K} =$ $C_{HK}^T \, I_{S,H} \, C_{HK}$

d) Wie groß ist die Summe der Diagonalelemente, also die Spur, des Trägheitstensors $\mathbf{I}_{S,K}$ aus Aufgabenteil c) in gegebenen Größen, wenn die Drehmatrix $\mathbf{C}_{HK}$ eine 30°-Drehung um die x-Achse beschreibt?

$\mathrm{spur}(\mathbf{I}_{S,K}) =$ $\frac{17}{6}ma^2$

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Gegeben sei der abgebildete zeitliche Verlauf $x(t)$ einer schwach gedämpften, linearen, freien Schwingung. Zu den Zeitpunkten t_1 und t_4 sind jeweils die Amplituden $\hat{x}_1$ sowie $\hat{x}_4$ bekannt.
gegeben: t_1, t_4, $\hat{x}_1$, $\hat{x}_4$



a) Wie lang ist die Periode T der gedämpften Schwingung?

$T =$ $\frac{1}{3}(t_4 - t_1)$

b) Geben Sie das logarithmische Dekrement Λ an.

$\Lambda =$ $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_4}\right)$

c) Geben Sie das Quadrat der Kreisfrequenz ω^2 der gedämpften Schwingung sowie der Eigenkreisfrequenz ω_0^2 der zugeordneten ungedämpften Schwingung an.

$\omega^2 =$ $\frac{36\pi^2}{(t_4 - t_1)^2} = \left(\frac{6\pi}{t_4 - t_1}\right)^2$, $\omega_0^2 =$ $\frac{36\pi^2 + \ln\left(\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_4}\right)^2}{(t_4 - t_1)^2}$

d) Bewerten Sie die folgenden Aussagen.

wahr	falsch	
☐	☒	Die Amplituden $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_4$ werden genau am Berührungspunkt mit einer der Hüllkurven erreicht.
☐	☒	Der Ansatz $x(t) = Ce^{\lambda t}$ zur Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung kann nur für den Kriechfall, also bei überkritischer Dämpfung, verwendet werden.
☐	☒	Schwingungen von realen Systemen sind immer linear.

ENDE