13. August 2020

Bachelorprüfung in Technische Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
Matr.-Nummer	Fachrichtung
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....

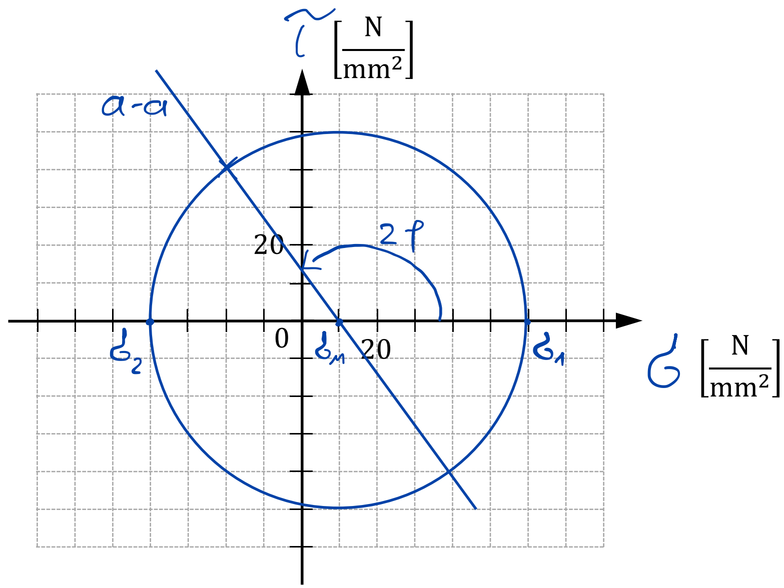
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Der Spannungszustand eines Bauteils soll untersucht werden. Die erste Hauptspannung im Punkt P beträgt $\sigma_1 = 60\ \mathrm{N/mm^2}$. Für den Schnitt $a-a$ sind die Normalspannung $\sigma_a = -20\ \mathrm{N/mm^2}$ sowie die Schubspannung $\tau_a = 40\ \mathrm{N/mm^2}$ bekannt.

a) Zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis für den Punkt P und kennzeichnen Sie den Schnitt $a-a$. Beschriften Sie außerdem die Achsen.



b) Wie groß ist die zweite Hauptspannung im Punkt P?

$\sigma_2 =$ $-40\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$

c) Um welchen Winkel ist der Schnitt $a-a$ gegenüber der ersten Hauptspannungsrichtung verdreht?

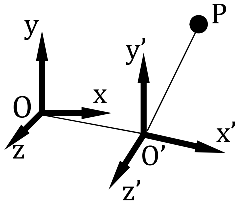
$\varphi =$ 63°

d) Welche Belastungsart liegt im Punkt P vor?

☐ einachsig ☒ zweiachsig ☐ keine Aussage möglich

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Die Lage des Punktes P bezüglich O' wird im Koordinatensystem K' durch den Vektor $\mathbf{r}_{\mathrm{O'P,K'}} = [\mathrm{at}^2, 2\mathrm{bt}, 0]^{\mathrm{T}}$ beschrieben. Der Ursprung O' von K' bezüglich O ist durch den Ortsvektor $\mathbf{r}_{\mathrm{OO',K}} = [\mathrm{Rcos}(\omega\mathrm{t}), 0, \mathrm{Rsin}(\omega\mathrm{t})]^{\mathrm{T}}$ gegeben. Die Orientierung von K' gegenüber K wird durch eine mathematisch negative Verdrehung um die y-Achse mit dem Winkel $\omega\mathrm{t}$ festgelegt. Für den Zeitpunkt $\mathrm{t}=0$ haben beide Koordinatensysteme die gleiche Orientierung. Die Größen R, a, b und ω seien konstant.



a) Geben Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{\mathrm{OO'}}$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}_{\mathrm{OO'}}$ von O' bezüglich O, dargestellt im Koordinatensystem K, an.

$$\mathbf{v}_{\mathrm{OO',K}} = \begin{bmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ 0 \\ R\omega\cos(\omega t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_{\mathrm{OO',K}} = \begin{bmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ 0 \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet die Matrix $\mathbf{C}_{\mathrm{KK'}}$, welche die Verdrehung von K' gegenüber K beschreibt?

$$\mathbf{C}_{\mathrm{KK'}} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & 0 & -\sin(\omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\omega t) & 0 & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

c) Wie lautet der Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK'}}$ der Drehung des Koordinatensystems K' gegenüber K, dargestellt im Koordinatensystem K'?

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK',K'}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Welche Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{\mathrm{O'P}}$ hat der Punkt P bezüglich O', dargestellt im Koordinatensystem K'?

$$\mathbf{v}_{\mathrm{O'P,K'}} = \begin{bmatrix} 2at \\ 2b \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Wie lauten die Führungsbeschleunigung $\mathbf{a}_{\mathrm{F}}$, die Coriolis-Beschleunigung $\mathbf{a}_{\mathrm{C}}$ und die Relativbeschleunigung $\mathbf{a}_{\mathrm{R}}$, jeweils dargestellt in K'?

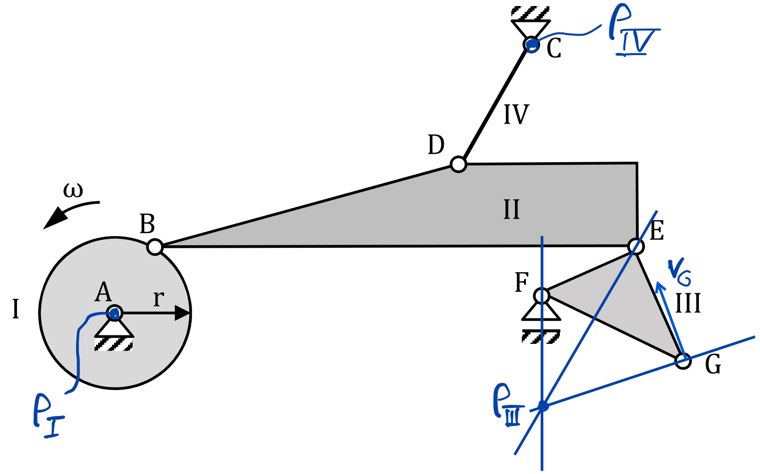
$$\mathbf{a}_{\mathrm{F,K'}} = \begin{bmatrix} -\omega^2 R \quad -\omega^2 a t^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{C,K'}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\omega a t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{R,K'}} = \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Der skizzierte ebene Mechanismus besteht aus einer Scheibe I (Radius r), den Körpern II und III und der Koppelstange IV. Die Scheibe I dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.



a) Zeichnen Sie die Momentanpole P_{I}, P_{III} und P_{IV} der Scheibe I, des Körpers III und der Koppelstange IV in obige Skizze ein.

b) Zeichnen Sie die Richtung der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_\mathrm{G}$ im Punkt G in die Skizze ein.

c) Wo liegt der Momentanpol von Körper II?

Im Unendlichen

d) Geben Sie die Verhältnisse der Beträge der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_\mathrm{B}$, $\mathbf{v}_\mathrm{E}$ und $\mathbf{v}_\mathrm{G}$ in den Punkten B, E und G zu ωr an.

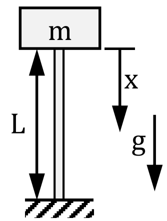
$$\frac{|\mathbf{v}_\mathrm{B}|}{\omega r} = 1$$

$$\frac{|\mathbf{v}_\mathrm{E}|}{\omega r} = 1$$

$$\frac{|\mathbf{v}_\mathrm{G}|}{\omega r} = \frac{4}{5}$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

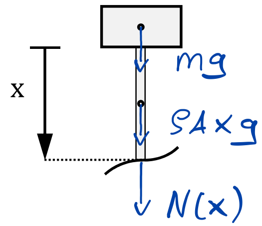
Auf einem durch sein Eigengewicht belasteten, linear-elastischen Stab (homogen, Dichte ϱ, Länge L, Querschnittsfläche A, Elastizitätsmodul E) ist, wie in der Abbildung gezeigt, eine Last (Masse m) angebracht.



a) Geben Sie die Gewichtskraft an, die auf einen Stababschnitt der Länge x aufgrund des Eigengewichts des Stabes wirkt.

$\varrho A x g$

b) Der obere Abschnitt des Stabes wird freigeschnitten. Ergänzen Sie die Normalkraft $N(x)$ sowie alle weiteren fehlenden Kräfte in x-Richtung. Bemaßen Sie dabei die eingeprägten Kräfte in gegebenen Größen mit Betrag und Richtung.



c) Geben Sie den Normalkraftverlauf an.

$N(x) = -mg - \varrho A x g$

d) Geben Sie die Längenänderung des Stabes an, die sich durch die Belastungssituation ergibt.

$\Delta L = -\frac{gL}{AE}\left(\frac{1}{2}\varrho A L + m\right)$

e) An welcher Stelle $x = x_{\sigma_{max}}$ tritt die maximale Normalspannung auf?

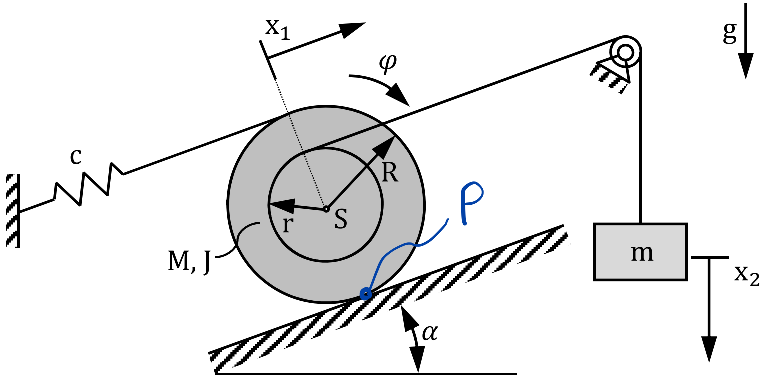
$x_{\sigma_{max}} = L$

f) Welche Versagensarten sind für den auf Druck belasteten Stab möglich?

Knicken & Quetschen

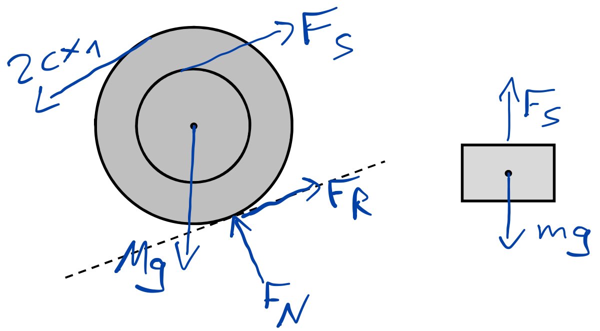
Aufgabe 5 (12 Punkte)

Eine Stufenrolle (Masse M, Trägheitsmoment J bezüglich Schwerpunkt S) liegt auf einer schiefen Ebene, die um den Winkel α geneigt ist. Um den inneren Teil der Rolle (Radius r) ist ein Seil geschlungen, dessen Ende über eine masselose, reibungsfrei gelagerte Umlenkrolle mit einem Gewicht (Masse m) verbunden ist. Der äußere Teil der Rolle (Radius R) ist über eine Feder (Federsteifigkeit c) mit einer Wand verbunden. Die Feder sei in der Ausgangslage ($\varphi = 0, x_1 = x_2 = 0$) entspannt und zwischen der Rolle und der Ebene trete kein Gleiten auf.



a) Kennzeichnen Sie den Momentanpol P der Stufenrolle in der Skizze.

b) Ergänzen und benennen Sie die fehlenden Kräfte in der nachfolgenden Freischnittsskizze. Bemaßen Sie die eingeprägten Kräfte in gegebenen Größen.



c) Geben Sie für die Stufenrolle den Drallsatz bezüglich ihres Momentanpols an.

$$(J+MR^2)\ddot{\varphi} = F_S(R+r) - 4cRx_1 - MgR\sin\alpha$$

d) Geben Sie für das Gewicht den Impulssatz bezüglich dessen Schwerpunkt an.

$$m\ddot{x}_2 = mg - F_S$$

e) Welche kinematischen Zusammenhänge bestehen zwischen x_1 und φ sowie zwischen x_2 und φ?

$x_1(\varphi) = R\varphi$ $\qquad$ $x_2(\varphi) = (R+r)\varphi$

f) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Systems in Abhängigkeit der Koordinate φ an.

$$(J+MR^2+m(R+r)^2)\ddot{\varphi} + 4cR^2\varphi = mg(R+r) - MgR\sin\alpha$$

g) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage des schwingungsfähigen Systems.

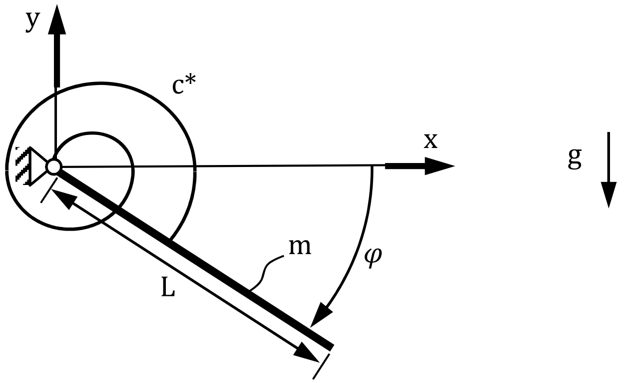
$$\varphi_0 = \frac{1}{4cR^2}\left(mg(R+r) - MgR\sin\alpha\right)$$

h) Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz ω des Systems?

$$\omega = 2R\sqrt{\frac{c}{(J+MR^2+m(R+r)^2)}}$$

Aufgabe 6 (11 Punkte)

Ein homogener, dünner Stab (Länge L, Masse m) ist in einem Drehgelenk reibungsfrei gelagert und wird über eine dort angebrachte Drehfeder (Drehfedersteifigkeit c^*) gehalten. Die Drehfeder sei beim Winkel $\varphi = 0$ entspannt.



a) Geben Sie für den Schwerpunkt des Stabes den Ortsvektor $\mathbf{r}_S$ sowie den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_S$ im gegebenen Koordinatensystem an.

$$\mathbf{r}_S(\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\cos\varphi \\ -\frac{L}{2}\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_S(\varphi, \dot\varphi) = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2}\dot\varphi\sin\varphi \\ -\frac{L}{2}\dot\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems.

$$T = \frac{1}{6} m L^2 \dot\varphi^2$$

c) Vervollständigen Sie die potentielle Energie des Systems. Das Nullniveau der Lageenergie des Stabes soll bei $\varphi = 0$ sein.

$$V = \frac{1}{2} c^* \varphi^2 + \left(-\frac{mgL}{2}\sin\varphi \right)$$

d) Geben Sie die Formel für die Lagrange-Funktion unter Verwendung der Größen T und V an.

$$L^* = T - V$$

e) Berechnen Sie die folgenden Ableitungen der Lagrange-Funktion.

$$\frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = \frac{mgL}{2}\cos\varphi - c^*\varphi$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot\varphi} = \frac{1}{3} m L^2 \dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{1}{3} m L^2 \ddot\varphi$$

f) Mit welcher Formel lässt sich nun die Bewegungsgleichung des Systems berechnen? Verwenden Sie die im vorherigen Aufgabenteil eingeführten Bezeichner für die Ableitungen, ohne die Ergebnisse für diese einzusetzen.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = 0$$

g) Kreuzen Sie Zutreffendes an. Die auftretende Schwingung ist

- ☐ linear
- ☐ gedämpft
- ☒ nichtlinear
- ☒ ungedämpft

Aufgabe 7 (15 Punkte)

Der dimensionslose Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,K}$ eines sich drehenden Quaders bezüglich seines Schwerpunkts S im Koordinatensystem K sei bekannt.

$$\mathbf{I}_{S,K} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Geben Sie die allgemeine Gleichung an, mit der aus $\mathbf{I}_{S,K}$ die Hauptträgheitsmomente bestimmt werden können.

$\det(\underline{\underline{I}}_{S,K} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$

b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente A_0, B_0 und C_0 des Quaders, wobei $A_0 > B_0 > C_0$ gilt.

$A_0 =$ 7, $B_0 =$ 5, $C_0 =$ 4

c) Berechnen Sie die zu den Hauptträgheitsmomenten A_0, B_0 und C_0 gehörenden Hauptträgheitsrichtungen $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ und $\mathbf{v}_C$.

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oder dazu linear abhängige Vektoren

d) Wie lässt sich der Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,H}$ im Hauptachsensystem H aus dem Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,K}$ und der Drehmatrix $\mathbf{C}_{HK}$ bestimmen, wenn die Koordinatensysteme H und K zueinander ausschließlich verdreht sind?

$\mathbf{I}_{S,H} = \underline{\underline{C}}_{H,K} \, \underline{\underline{I}}_{S,K} \, \underline{\underline{C}}_{H,K}^T$

e) Wie kann aus den Hauptträgheitsrichtungen $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ und $\mathbf{v}_C$ die Drehmatrix $\mathbf{C}_{HK}^T$ allgemein bestimmt werden?

$$\mathbf{C}_{HK}^T = \begin{bmatrix} \frac{v_A}{|v_A|} & \frac{v_B}{|v_B|} & \frac{v_C}{|v_C|} \end{bmatrix}$$

f) Ergänzen Sie die fehlenden Einträge in der Drehmatrix $\mathbf{C}_{HK}^T$.

$$\mathbf{C}_{HK}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

g) Um welchen Winkel φ sind die Koordinatensysteme zueinander verdreht?

$\varphi =$ $30°$

Die Aufgabenteile h) und i) lassen sich unabhängig von den Aufgabenteilen c) – g) lösen.

h) Geben Sie die Länge ℓ, die Breite b und die Höhe h des Quaders an, wobei $\ell > b > h$ gilt. Der Quader habe die Masse m.

$\ell = 2\sqrt{\frac{12}{m}}$; $b = \sqrt{3}\sqrt{\frac{12}{m}}$; $h = \sqrt{\frac{12}{m}}$

i) Um welche Hauptträgheitsachse ist die Drehung des Quaders instabil?

☐ $\mathbf{v}_A$ ☒ $\mathbf{v}_B$ ☐ $\mathbf{v}_C$

ENDE