20. Februar 2020

Bachelor-Prüfung in Technische Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
Matr.-Nummer	Fachrichtung
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

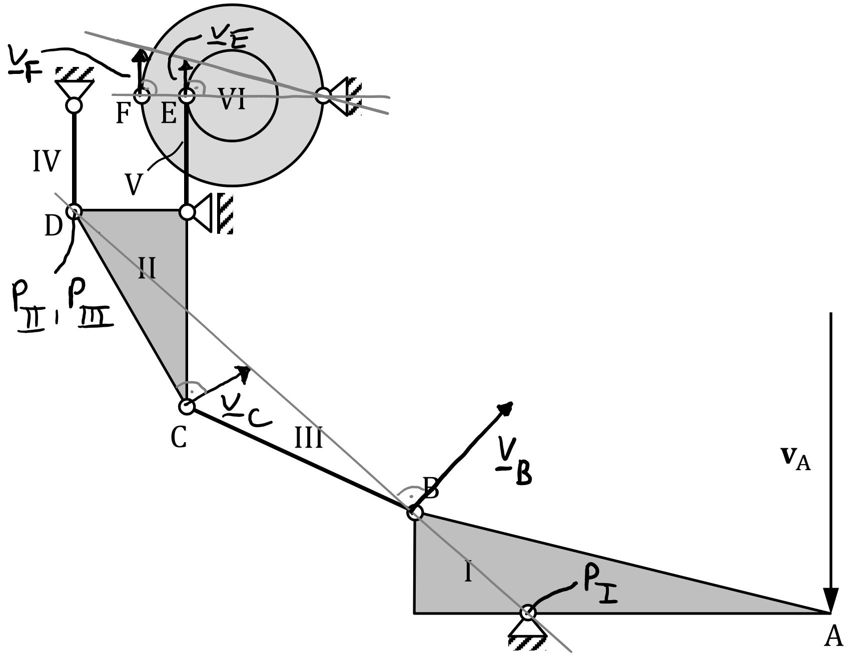
1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

………………………………………..
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Der skizzierte Hebelmechanismus besteht aus zwei Körpern I und II, drei Koppelstangen III, IV und V sowie einer Stufenscheibe VI. Die Geschwindigkeit von Punkt A ist durch den Vektor $\mathbf{v}_A$ gegeben.



a) Zeichnen Sie die Momentanpole P_I, P_{II} und P_{III} der Körper I, II und der Koppelstange III in obige Skizze ein.

b) Zeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_C$, $\mathbf{v}_E$ der Lagerpunkte B, C, E sowie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_F$ des Punktes F ein. Achten Sie dabei auf die Skalierung der Vektoren in Bezug auf $\mathbf{v}_A$.

c) Geben Sie den Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}_F$ in Abhängigkeit von $|\mathbf{v}_A|$ an.

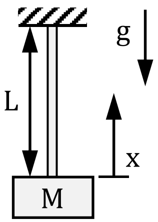
$|\mathbf{v}_F| = \frac{1}{6} |\mathbf{v}_A|$

d) Wo liegt der Momentanpol von Koppelstange V?

Im Unendlichen

Aufgabe 2 (8 Punkte)

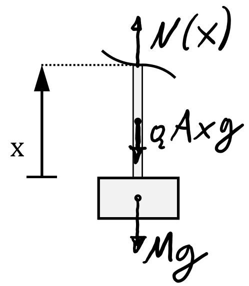
An einem durch sein Eigengewicht belasteten, linear-elastischen Seil (homogen, biegeschlaff, Dichte ϱ, Länge L, Querschnittsfläche A, Elastizitätsmodul E) ist, wie in der Abbildung gezeigt, eine Last (Masse M) angebracht.



a) Geben Sie die Gewichtskraft an, die auf einen Seilabschnitt der Länge x aufgrund des Eigengewichts des Seiles wirkt.

$\varrho A x g$

b) Der untere Abschnitt des Seiles wird nun freigeschnitten. Ergänzen Sie die Normalkraft $\mathrm{N(x)}$ sowie alle weiteren fehlenden Kräfte. Bemaßen Sie dabei die eingeprägten Kräfte in gegebenen Größen mit Betrag und Richtung.



c) Geben Sie den Normalkraftverlauf an.

$\mathrm{N(x)} = \varrho A x g + M g$

d) Geben Sie die sich durch die gegebene Belastungssituation ergebende Längenänderung des Seiles an.

$\Delta \mathrm{L} = \frac{1}{EA}\left(\frac{1}{2}\varrho A g L^2 + M g L\right)$

e) An welcher Stelle $\mathrm{x} = \mathrm{x}_{\sigma_{\max}}$ tritt die maximale Normalspannung auf?

$\mathrm{x}_{\sigma_{\max}} = L$

f) Das Seil reiße, wenn eine maximale Normalspannung von $\overline{\sigma}_{\mathrm{x}}$ erreicht wird. Was muss für L gelten, damit das Seil nicht reißt?

$\mathrm{L} < \frac{1}{\varrho g}\left(\overline{\sigma}_x - \frac{Mg}{A}\right)$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Es wird ein statisch bestimmt gelagerter Balken (Länge $3\mathrm{a}$, Biegesteifigkeit EI) untersucht. Der Balken ist nur in Querrichtung belastet. Durch die Belastung ergibt sich für $0 \leq \mathrm{x} \leq 3\mathrm{a}$, unter Nutzung von Klammerfunktionen (Föppl-Klammern), der Biegelinienverlauf

$$\mathrm{w(x)} = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{\mathrm{q_0}}{24}\langle \mathrm{x}-\mathrm{a}\rangle^4 + \frac{\mathrm{q_0 a}}{6}\langle \mathrm{x}-0\rangle^3 - \frac{\mathrm{q_0 a}}{3}\langle \mathrm{x}-\mathrm{a}\rangle^3 - \frac{\mathrm{q_0 a}}{6}\langle \mathrm{x}-2\mathrm{a}\rangle^3 + \mathrm{C_1 x} + \mathrm{C_2}\right)$$

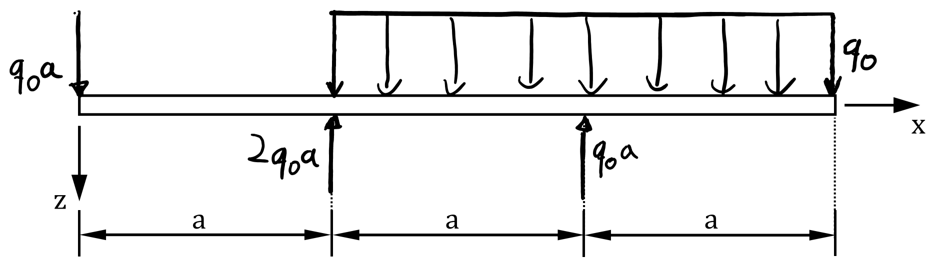
mit den Konstanten $\mathrm{C_1}$ und $\mathrm{C_2}$. Vom Biegelinienverlauf soll im Folgenden auf die Belastungssituation geschlossen werden.

a) Geben Sie den Biegemomenten- und den Querkraftverlauf für den Balken an.

$\mathrm{M(x)} = -\frac{q_0}{2}\langle x-a\rangle^2 - q_0 a\langle x-0\rangle^1 + 2q_0 a\langle x-a\rangle^1 + q_0 a\langle x-2a\rangle^1$

$\mathrm{Q(x)} = -q_0\langle x-a\rangle^1 - q_0 a\langle x-0\rangle^0 + 2q_0 a\langle x-a\rangle^0 + q_0 a\langle x-2a\rangle^0$

b) Zeichnen Sie die Lagerreaktionen sowie die eingeprägten Kräfte und Lasten in die Skizze ein. Bemaßen Sie diese in gegebenen Größen mit Betrag und Richtung.

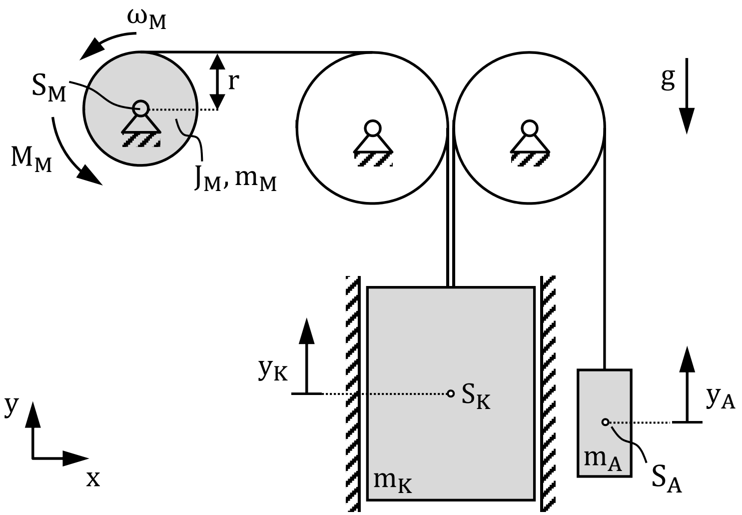


c) Der Balken sei in den Punkten $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ und $\mathrm{x} = 2\mathrm{a}$ gelagert. Geben Sie zwei geeignete Bedingungen zur Berechnung der Konstanten $\mathrm{C_1}$ und $\mathrm{C_2}$ an.

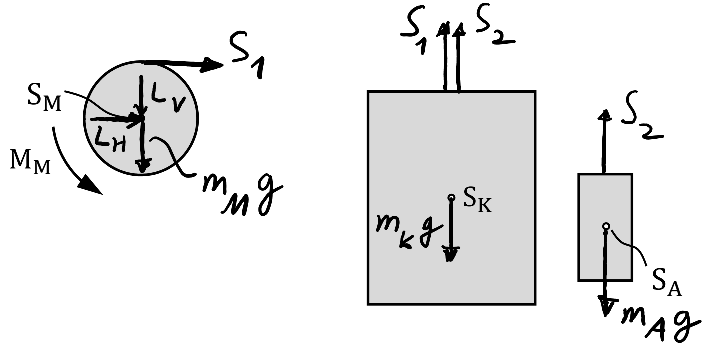
$w(a) = 0$ $\qquad$ $w(2a) = 0$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die skizzierte Lastenaufzuganlage besteht aus einem Frachtkorb (Masse m_K, Schwerpunkt S_K) sowie zwei masselosen Umlenkrollen, über die zwei masselose, stets gespannte Seile geschlungen sind, die den Frachtkorb mit einer Antriebseinheit und einer Ausgleichsmasse (Masse m_A, Schwerpunkt S_A) verbinden. Die Antriebseinheit besteht aus einer Seiltrommel (Masse m_M, Massenträgheitsmoment J_M bzgl. Schwerpunkt S_M, Radius r), wobei ein Motor das Antriebsmoment M_M auf die Trommel ausübt. Die Winkelgeschwindigkeit der Trommel wird mit ω_M bezeichnet. Die Lagen der Schwerpunkte von Frachtkorb und Ausgleichsmasse werden durch die Koordinaten y_K und y_A beschrieben. Etwaige Verdrehungen des Frachtkorbs sollen vernachlässigt werden. Die Rollen sind reibungsfrei in ihren Mittelpunkten gelagert und die Seile gleiten nicht auf den Rollen. Alle Bewegungen erfolgen in der Ebene. Im Folgenden soll die Bewegungsgleichung des Frachtkorbs hergeleitet werden.



a) Ergänzen und benennen Sie die fehlenden Kräfte in der nachfolgenden Freischnittskizze. Bemaßen Sie die eingeprägten Kräfte in gegebenen Größen.



b) Geben Sie alle zur Lösung dienlichen Impuls- und Drallsätze für die beteiligten Körper bezüglich ihrer Schwerpunkte an.

$$J_M \dot{\omega}_M = M_M - S_1 r$$

$$m_K \ddot{y}_K = S_1 + S_2 - m_K g$$

$$m_A \ddot{y}_A = S_2 - m_A g$$

c) Welche kinematischen Zusammenhänge bestehen zwischen $\dot{y}_A$ und $\dot{y}_K$ sowie zwischen ω_M und $\dot{y}_K$?

$\dot{y}_A(\dot{y}_K) = -\dot{y}_K$

$\omega_M(\dot{y}_K) = \dot{y}_K / r$

d) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Frachtkorbs in Abhängigkeit der Koordinate y_K an.

$$\left(\frac{J_M}{r} + m_K r + m_A r\right)\ddot{y}_K = M_M + m_A g r - m_K g r$$

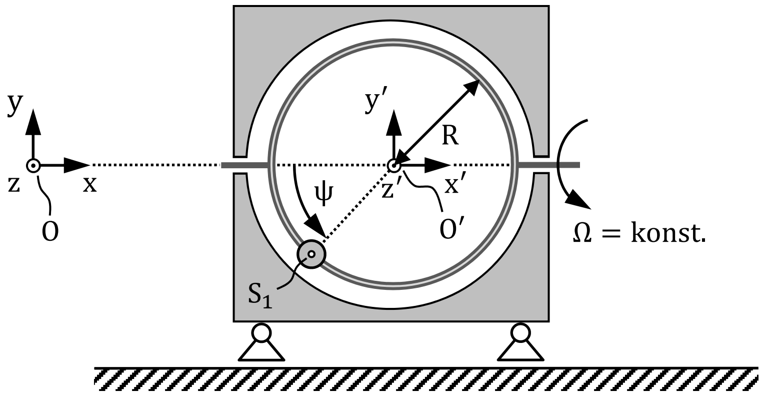
e) Um Herstellungskosten zu sparen, werden die Ausgleichsmasse und die zugehörige Umlenkrolle samt zugehörigem Seil eingespart. Welches Antriebsmoment wird dann benötigt, um den Frachtkorb mit der konstanten Beschleunigung $a_F > 0$ in positiver y-Richtung zu bewegen?

$M_M = \left(\frac{J_M}{r} + m_K r\right) a_F + m_K g r$

Aufgabe 5 (14 Punkte)

Eine Punktmasse mit Schwerpunkt S_1 bewegt sich wie skizziert auf einem Kreisring (Radius R), der drehbar auf einem in x-Richtung verschieblich gelagerten Wagen montiert ist. Zur Beschreibung der Bewegungen von Punktmasse, Kreisring und Wagen sind zwei Koordinatensysteme gegeben. Koordinatensystem K (Ursprung O, Koordinatenachsen x, y, z) ist ein Inertialsystem, während Koordinatensystem K' (Ursprung O', Koordinatenachsen x', y', z') ein bezüglich des Kreisrings körperfestes Koordinatensystem darstellt. Der Kreisring rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω mit positivem Drehsinn um die x-Achse, wobei sich die Punktmasse stets in der x'-y'-Ebene befindet. Die Bewegung der Punktmasse auf dem Kreisring sei bekannt und wird wie dargestellt durch den Winkel $\psi = \psi(t)$ beschrieben.

Der Wagen beschleunigt mit der konstanten Beschleunigung a_W in positiver x-Richtung. Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ ist das System in Ruhe und die beiden Koordinatensysteme liegen deckungsgleich übereinander.



a) Geben Sie die Ortsvektoren von O' bezüglich O, dargestellt in den Koordinaten von K, sowie den Ortsvektor von S_1 bezüglich O', dargestellt in den Koordinaten von K', an.

$$\mathbf{r}_{OO',K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_w t^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_{O'S_1,K'} = \begin{bmatrix} -R\cos(\psi) \\ -R\sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Ergänzen Sie die fehlenden Einträge der Matrix in folgendem Ausdruck zur Berechnung des Ortsvektors von S_1 bezüglich O, dargestellt in den Koordinaten von K.

$$\mathbf{r}_{OS_1,K} = \mathbf{r}_{OO',K} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ 0 & \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \mathbf{r}_{O'S_1,K'}$$

c) Bestimmen Sie die Absolutgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{OS_1,K}$ von S_1 gegenüber O, dargestellt in den Koordinaten von K.

$$\mathbf{v}_{OS_1,K} = \begin{bmatrix} a_w t + R\dot{\psi}\sin(\psi) \\ -R\dot{\psi}\cos(\psi)\cos(\Omega t) + R\Omega\sin(\psi)\sin(\Omega t) \\ -R\dot{\psi}\cos(\psi)\sin(\Omega t) - R\Omega\sin(\psi)\cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

d) Wie lauten der Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{KK',K'}$ der Drehung des Koordinatensystems K' gegenüber K, dargestellt in den Koordinaten von K', sowie die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{O'S_1,K'}$ des Schwerpunkts S_1 gegenüber O', dargestellt in den Koordinaten von K'?

$$\boldsymbol{\omega}_{KK',K'} = \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{O'S_1,K'} = \begin{bmatrix} R\dot{\psi}\sin(\psi) \\ -R\dot{\psi}\cos(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Wie lautet die Coriolis-Beschleunigung $\mathbf{a}_{C,K'}$ von S_1, dargestellt in den Koordinaten von K'?

$$\mathbf{a}_{C,K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2R\dot{\psi}\Omega\cos(\psi) \end{bmatrix}$$

f) Geben Sie die Absolutbeschleunigung $\mathbf{a}_{OO',K'}$ von O' gegenüber O, dargestellt in den Koordinaten von K', an.

$$\mathbf{a}_{OO',K'} = \begin{bmatrix} a_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

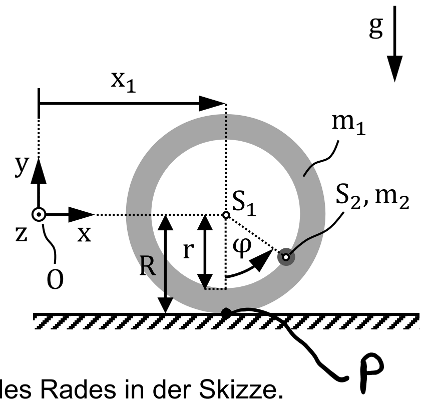
g) Wie lauten die Führungsbeschleunigung $\mathbf{a}_{F,K'}$ und die Relativbeschleunigung $\mathbf{a}_{R,K'}$ von S_1, jeweils dargestellt in den Koordinaten von K'?

$$\mathbf{a}_{F,K'} = \begin{bmatrix} a_w \\ R\Omega^2\sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{R,K'} = \begin{bmatrix} R\ddot{\psi}\sin(\psi) + R\dot{\psi}^2\cos(\psi) \\ -R\ddot{\psi}\cos(\psi) + R\dot{\psi}^2\sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 6 (19 Punkte)

Die Bewegung eines unwuchtigen Rades in der x-y-Ebene soll untersucht werden. Hierfür wird dieses, wie in der Abbildung schematisch dargestellt, als Hohlzylinder (homogen, Masse m_1, Schwerpunkt S_1, Innenradius r, Außenradius R) modelliert. Auf dem Innenradius ist am Punkt S_2 eine Punktmasse m_2 fest angebracht. Das Rad rollt, ohne zu gleiten. Der Ursprung des eingezeichneten Koordinatensystems wird mit O bezeichnet. Die Koordinate x_1 beschreibt die Lage von S_1.



a) Kennzeichnen Sie den Momentanpol P des Rades in der Skizze.

b) Geben Sie die Ortsvektoren der Schwerpunkte sowie den Drehgeschwindigkeitsvektor des Rades im gegebenen Koordinatensystem an.

$$\mathbf{r}_{OS_1}(x_1,\varphi) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_{OS_2}(x_1,\varphi) = \begin{bmatrix} x_1 + r\sin(\varphi) \\ -r\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\dot{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\varphi} \end{bmatrix}^T$$

c) Geben Sie den kinematischen Zusammenhang zwischen $\dot{x}_1$ und $\dot{\varphi}$ an.

$$\dot{x}_1(\dot{\varphi}) = -\dot{\varphi}R$$

d) Bestimmen Sie die Absolutgeschwindigkeiten der Schwerpunkte unter Verwendung der verallgemeinerten Koordinate φ.

$$\mathbf{v}_{OS_1}(\varphi,\dot\varphi) = \begin{bmatrix} -\dot\varphi R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{OS_2}(\varphi,\dot\varphi) = \begin{bmatrix} -\dot\varphi R + r\dot\varphi\cos(\varphi) \\ r\dot\varphi\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Bestimmen Sie die kinetische Energie T_Z des Hohlzylinders, die kinetische Energie T_M der Punktmasse sowie die potentielle Energie V_G des Gesamtsystems, jeweils unter Nutzung von φ als verallgemeinerter Koordinate. Das Nullniveau der potentiellen Energie ist für $\varphi = \pi/2$ anzusetzen.

$T_Z = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{3}{2}R^2 + \frac{1}{2}r^2\right)\dot\varphi^2$

$T_M = \frac{1}{2} m_2 \left(R^2 + r^2 - 2rR\cos(\varphi)\right)\dot\varphi^2$

$V_G = -m_2 g r \cos(\varphi)$

f) Geben Sie die Formel für die Lagrange-Funktion unter Verwendung der Bezeichner T_Z, T_M und V_G an.

$L^* = T_Z + T_M - V_G$

g) Geben Sie die folgenden Ableitungen der Lagrange-Funktion an.

$\frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = m_2\dot\varphi^2 rR\sin(\varphi) - m_2 g r\sin(\varphi)$

$\frac{\partial L^*}{\partial \dot\varphi} = m_1\left(\frac{3}{2}R^2 + \frac{1}{2}r^2\right)\dot\varphi + m_2\left(R^2 + r^2 - 2rR\cos(\varphi)\right)\dot\varphi$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot\varphi}\right) = m_1\left(\frac{3}{2}R^2 + \frac{1}{2}r^2\right)\ddot\varphi + m_2\left(R^2 + r^2 - 2rR\cos(\varphi)\right)\ddot\varphi$
$+ 2m_2 rR\dot\varphi^2\sin(\varphi)$

h) Mit welcher Formel ließe sich nun die Bewegungsgleichung des Systems berechnen? Verwenden Sie die im vorherigen Aufgabenteil eingeführten Bezeichner für die Ableitungen, ohne die Ergebnisse für diese einzusetzen.

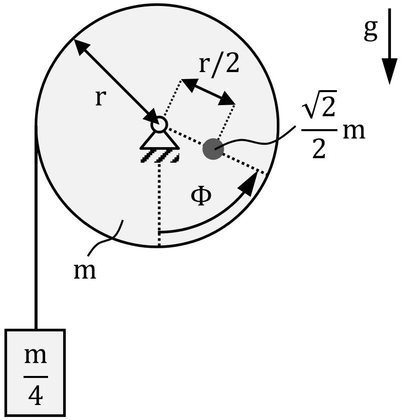
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = 0$$

i) Alternativ kann die Bewegungsgleichung auch unter Verwendung des Drallsatzes mit dem Momentanpol P als Bezugspunkt hergeleitet werden. Welche Formulierung ist hierbei zielführend? Kreuzen Sie die passende Formulierung an. Der Gesamtschwerpunkt des Systems werde mit S bezeichnet und $\mathbf{M}_{aP}$ sei der Vektor der äußeren Momente bezüglich P.

- ☐ $\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_P) = \mathbf{M}_{aP}$
- ☒ $\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_P) + \mathbf{r}_{PS} \times \mathbf{a}_{OP}\,(m_1 + m_2) = \mathbf{M}_{aP}$
- ☐ $\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_P) + \mathbf{r}_{PS} \times \mathbf{a}_{OP}\, m_2 = \mathbf{M}_{aP}$
- ☐ $m_1 \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{PS}) + \mathbf{a}_{OP}\, m_2 = \mathbf{M}_{aP}$

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Das dargestellte schwingungsfähige System besteht aus einer homogenen Kreisscheibe (Masse m), die in ihrem Mittelpunkt reibungsfrei drehbar gelagert ist, sowie einem Gewicht (Masse $m/4$), das an einem Seil befestigt ist, welches um den Umfang der Kreisscheibe geschlungen ist. Das Gewicht kann sich nur vertikal bewegen. Auf halbem Radius der Kreisscheibe ist eine Zusatzmasse vom Betrag $\sqrt{2}\,m/2$ befestigt. Im Folgenden gilt $\Phi = \Phi_s + \varphi$. Darin ist $\Phi = \Phi_s$ eine Gleichgewichtslage im Bereich $0 < \Phi_s < \pi/2$.



a) Eine der folgenden Bewegungsgleichungen beschreibt die Drehschwingungen des Systems. Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an.

☐ $\left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) mr^2\, \ddot{\varphi} - \sqrt{2}\, mgr \sin(\Phi_s + \varphi) = 0$

☐ $\left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) mr^2\, \dot{\varphi} + \sqrt{2}\, mgr \sin(\Phi_s + \varphi) - mgr = 0$

☐ $\left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) mr^2\, \ddot{\varphi} - \frac{mgr}{12}\dot{\varphi}t + \sqrt{2}\, mgr \sin(\Phi_s + \varphi) - mgr = 0$

☒ $\left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) mr^2\, \ddot{\varphi} + \sqrt{2}\, mgr \sin(\Phi_s + \varphi) - mgr = 0$

b) Berechnen Sie die Gleichgewichtslage Φ_s des Systems für $0 < \Phi_s < \pi/2$.

$\Phi_s =$ $\pi/4$

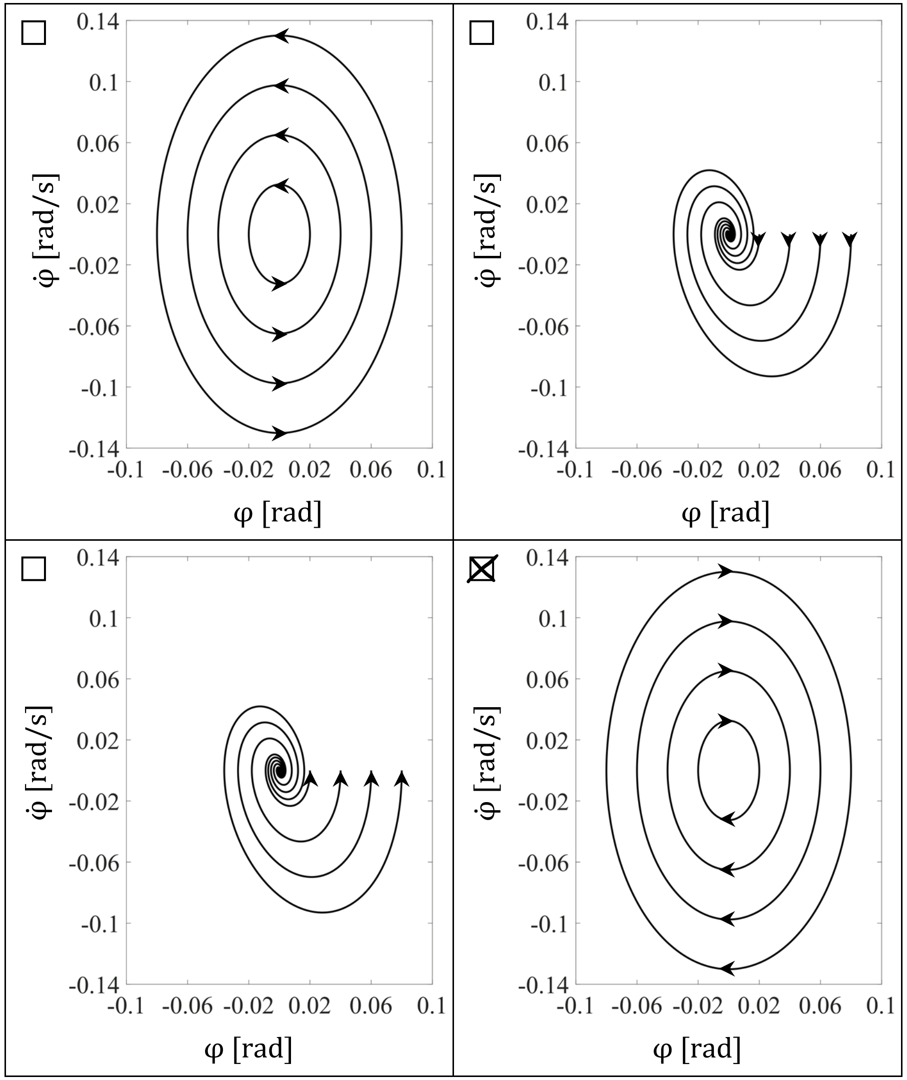
c) Geben Sie die um die Gleichgewichtslage Φ_s linearisierte Bewegungsgleichung an.
Hinweis: $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$0 = \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) r\ddot{\varphi} + g\varphi$

d) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ω der Schwingungen, die durch die linearisierte Bewegungsgleichung beschrieben werden.

$\omega = \sqrt{\frac{2}{6+\sqrt{2}}\,\frac{g}{r}}$

e) Eines der skizzierten Phasenportraits stellt Phasenkurven der linearisierten Bewegungsgleichung für bestimmte, feste Werte von g und r dar. Kreuzen Sie das passende Phasenportrait an.



ENDE