Institut für Technische und Num. Mechanik
Profs. P. Eberhard / J. Fehr / M. Hanss

30. August 2018

Bachelorprüfung in Technische Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
M U S T E R L Ö S U N G	
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$ 78	Fr

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein Schwinger wird durch die Bewegungsgleichung

$$mL\ddot{x} + 4d\dot{x} + mg\sin(x) = 0$$

beschrieben. Hierbei sind $m > 0$, $L > 0$, $d > 0$ und $g > 0$.

a) Klassifizieren Sie den Schwinger.

☐ heteronom ☒ autonom

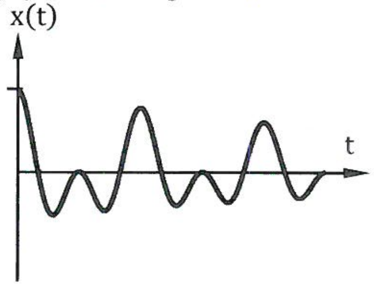
b) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Schwingers nach einer Linearisierung um $x = 0$ an.

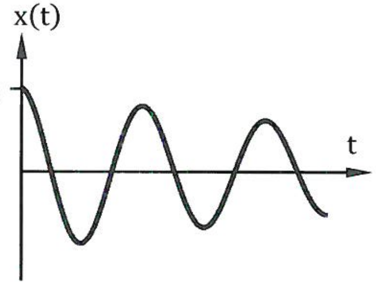
$mL\ddot{x} + 4d\dot{x} + mgx = 0$

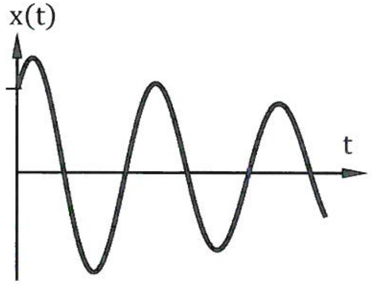
c) Geben Sie den Abklingkoeffizienten δ sowie den Dämpfungsgrad D (Lehr'sches Dämpfungsmaß) der linearisierten Bewegungsgleichung an.

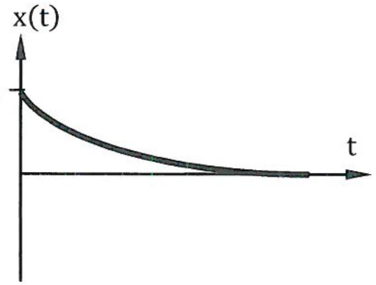
$\delta = \frac{2d}{mL}$ $D = \frac{2d}{m\sqrt{Lg}}$

d) Der Schwinger wird zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Position x_0 mit der Geschwindigkeit $\dot{x}_0 > 0$ losgelassen. Geben Sie an, welcher Zeitverlauf für $x(t)$ qualitativ möglich ist.

☐ 

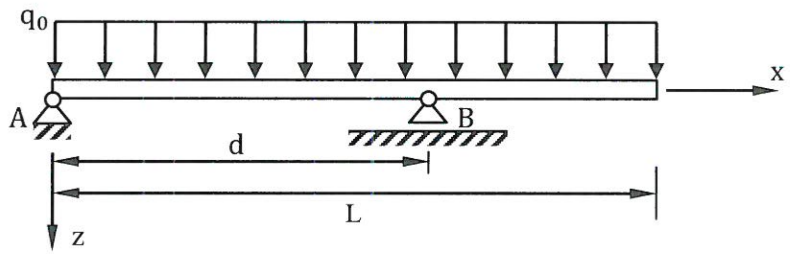
☐ 

☒ 

☐ 

Aufgabe 2 (19 Punkte)

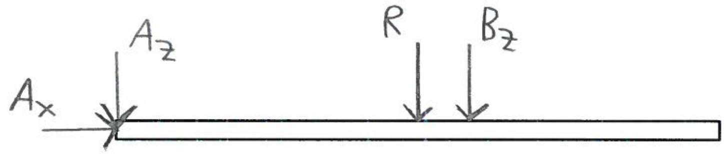
Ein masseloser Balken (Länge L, Biegesteifigkeit EI) ist im Punkt A fest und im Punkt B in horizontaler Richtung verschiebbar gelagert. Der Abstand zwischen Lager A und Lager B wird durch d beschrieben. Der Abstand d liegt dabei immer im Bereich $0.1L \leq d \leq L$. Der Balken ist wie skizziert durch eine konstante Streckenlast belastet.



a) Zur Berechnung der Lagerreaktionen soll die Streckenlast durch eine äquivalente Einzelkraft R ersetzt werden. Geben Sie den Betrag und die x-Koordinate des Angriffspunkts von R an.

Betrag: $R =$ $q_0 L$ Angriffspunkt: $x_R =$ $\frac{1}{2}L$

b) Schneiden Sie den Balken frei, zeichnen Sie alle Lagerreaktionen ein und benennen Sie diese. Ersetzen Sie die Streckenlast durch die äquivalente Einzelkraft R.



c) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in Abhängigkeit von q_0, L und d.

$A_x = 0$

$A_z = -q_0 L\left(1 - \frac{L}{2d}\right)$

$B_z = -\frac{q_0 L^2}{2d}$

d) Der Momentenverlauf des Balkens lautet unter Verwendung der Klammerfunktionen (Föppl-Funktionen)

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + q_0 L\left(1 - \frac{L}{2d}\right)x + \frac{q_0 L^2}{2d}\left\{x - d\right\}^1 .$$

Geben Sie den Biegelinienverlauf und dessen Ableitung mit noch unbestimmten Integrationskonstanten C_1 und C_2 an.

$w'(x)EI =$ $\frac{1}{6}q_0 x^3 - \frac{1}{2}q_0 L\left(1 - \frac{L}{2d}\right)x^2 - q_0\frac{L^2}{4d}\left\{x-d\right\}^2 + C_1$

$w(x)EI =$ $\frac{1}{24}q_0 x^4 - \frac{1}{6}q_0 L\left(1-\frac{L}{2d}\right)x^3 - q_0\frac{L^2}{12d}\left\{x-d\right\}^3 + C_1 x + C_2$

e) Wie lauten die Randbedingungen, die sich aus der Lagerung ergeben?

$w(0) = 0$ $w(d) = 0$

f) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten C_1 und C_2.

$C_1 = \frac{1}{24}q_0\left(4Ld^2 - 2L^2 d - d^3\right)$ $C_2 = 0$

g) Geben Sie, ohne zu Rechnen, einen Abstand d an, für den die Durchbiegung an der Stelle $x=L$ zu 0 wird, also dass $w(x=L)=0$ gilt.

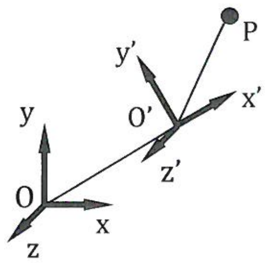
$d =$ L oder $d = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{13}\right)L$

h) Bewerten Sie folgende Aussagen ohne zu Rechnen.

Das Schnittmoment am Lager B ist stets 0.	☐ richtig	☒ falsch
Die Streckenlast q_0 hat keinen Einfluss auf den Normalkraftverlauf im Balken.	☒ richtig	☐ falsch
Im Bereich $0.1L \leq d \leq L$ gibt es zwei Abstände d, sodass $w(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq L$.	☒ richtig	☐ falsch
Für den Lagerabstand $d=8/11\ L$ tritt die maximale Durchbiegung an $x=4/11\ L$ auf.	☐ richtig	☒ falsch

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Lage des Punktes P wird im Koordinatensystem K' durch den Vektor $\mathbf{r}_{O'P,K'} = [at, bt^2, 0]^T$ beschrieben. Der Ursprung 0' von K' ist durch den Ortsvektor $\mathbf{r}_{OO',K} = [R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), 0]^T$ festgelegt. Die Orientierung von K' gegenüber K wird durch eine Verdrehung um die z-Achse mit dem Winkel ωt festgelegt. Für den Zeitpunkt t=0 haben beide Koordinatensysteme die gleiche Orientierung. Es sind R, a, b und ω konstante Größen.



a) Geben Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{OO'}$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}_{OO'}$ von 0' bezüglich des Koordinatensystems K, dargestellt in K, an.

$$\mathbf{v}_{OO',K} = \begin{bmatrix} -\omega R\sin(\omega t) \\ \omega R\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_{OO',K} = \begin{bmatrix} -\omega^2 R\cos(\omega t) \\ -\omega^2 R\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet die Matrix $\mathbf{C}_{KK'}$, welche die Verdrehung von K' gegenüber K beschreibt?

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Wie lautet der Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{KK'}$ der Drehung des Koordinatensystems K' gegenüber K, dargestellt im Koordinatensystem K'?

$$\boldsymbol{\omega}_{KK',K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

d) Welche Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{O'P}$ hat der Punkt P bezüglich des Koordinatensystems K', dargestellt im Koordinatensystem K'?

$$\mathbf{v}_{O'P,K'} = \begin{bmatrix} a \\ 2bt \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Wie lauten die Führungsbeschleunigung $\mathbf{a}_{F,K'}$, die Coriolis-Beschleunigung $\mathbf{a}_{C,K'}$ und die Relativbeschleunigung $\mathbf{a}_{R,K'}$, jeweils dargestellt in K'?

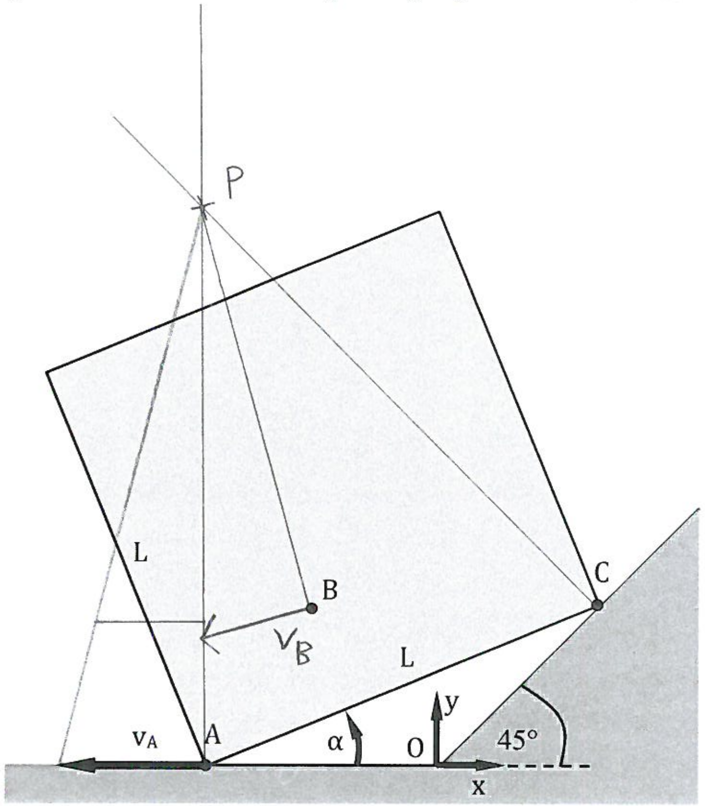
$$\mathbf{a}_{F,K'} = \begin{bmatrix} -\omega^2 R - \omega^2 at \\ -\omega^2 bt^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{C,K'} = \begin{bmatrix} -4\omega bt \\ 2\omega a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{R,K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 (13 Punkte)

Der dargestellte Würfel (Kantenlänge L) gleitet entlang einer schiefen Wand (Neigungswinkel 45°) nach unten. Der Winkel zwischen der Horizontalen und der Strecke vom Punkt A zum Punkt C wird durch α beschrieben. Der Betrag der Absolutgeschwindigkeit während des Abgleitvorgangs im Punkt A sei $v_A = 20\ \mathrm{mm/s}$.



a) Konstruieren Sie den Momentanpol des Würfels für die aktuelle Lage und kennzeichnen Sie diesen Punkt mit P.

b) Konstruieren und kennzeichnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$ im Punkt B.

c) Bestimmen Sie zeichnerisch den Betrag der Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}_B$ im Punkt B.

$|\mathbf{v}_B| =$ 15 mm/s

d) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}_{OC}$ sowie den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{OC}$ in Abhängigkeit des zeitveränderlichen Winkels α.

$$\mathbf{r}_{OC} = \begin{bmatrix} L\sin(\alpha) \\ L\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{OC} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}L\cos(\alpha) \\ \dot{\alpha}L\cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ des Würfels an.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

f) Berechnen Sie die Spurkurve des Momentanpols P als Funktion des Winkels α für $0 < \alpha < 45°$.

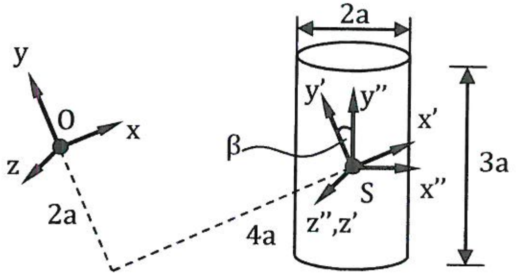
$$\mathbf{r}_{OP} = \begin{bmatrix} L\sin(\alpha) - L\cos(\alpha) \\ L\sin(\alpha) + L\cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

g) Berechnen Sie den Betrag der Polwechselgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{OP}$.

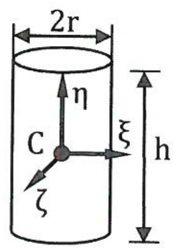
$|\mathbf{v}_{OP}| = \sqrt{2}\,L\,|\dot{\alpha}|$

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Gegeben sind ein homogener Zylinder (Masse m, Radius a, Höhe $3a$) sowie die Koordinatensysteme K'', K' und K. Die Koordinatensysteme K'' und K' liegen im Schwerpunkt S des Zylinders. Das Koordinatensystem K' ist dabei zu K'' um den Winkel β um die z-Achse verdreht. Koordinatensystem K ist zu Koordinatensystem K' entsprechend der Skizze in der x-y-Ebene verschoben und hat die gleiche Orientierung.



Hinweis: Die Hauptträgheitsmomente eines homogenen Zylinders (Masse m, Radius r und Höhe h) bezüglich seines Schwerpunktes C berechnen sich nach



$$I_{\eta\eta} = \frac{1}{2}mr^2$$
$$I_{\xi\xi} = I_{\zeta\zeta} = \frac{m}{12}(3r^2 + h^2).$$

a) Bestimmen Sie den Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,K''}$ des Zylinders bezüglich seines Schwerpunktes S, angegeben im Koordinatensystem K''.

$$\mathbf{I}_{S,K''} = \begin{bmatrix} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{bmatrix}$$

b) Die Transformationsmatrix $\mathbf{C}_{K'K''}$, welche die Verdrehung des Koordinatensystems K' gegenüber K'' beschreibt, lautet

$$\mathbf{C}_{K'K''} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe welcher Transformationsvorschrift kann der Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,K''}$ im Koordinatensystem K' dargestellt werden?

- ☐ $\mathbf{I}_{S,K'} = \mathbf{C}_{K'K''}\,\mathbf{I}_{S,K''}$
- ☐ $\mathbf{I}_{S,K'} = \mathbf{I}_{S,K''}\,\mathbf{I}_{S,K''}^T$
- ☒ $\mathbf{I}_{S,K'} = \mathbf{C}_{K'K''}\,\mathbf{I}_{S,K''}\,\mathbf{C}_{K'K''}^T$
- ☐ $\mathbf{I}_{S,K'} = \mathbf{I}_{S,K''}\mathbf{C}_{K'K''}\mathbf{I}_{S,K''}^T$
- ☐ $\mathbf{I}_{S,K'} = \mathbf{C}_{K'K''}^T\,\mathbf{I}_{S,K''}$
- ☐ $\mathbf{I}_{S,K'} = \mathbf{I}_{S,K''}$

c) Bestimmen Sie den Trägheitstensor $\mathbf{I}_{S,K'}$ des Zylinders bezüglich seines Schwerpunktes S, angegeben im verdrehten Koordinatensystem K', für den Winkel $\beta = 45°$.

$$\mathbf{I}_{S,K'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}ma^2 & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ \frac{1}{4}ma^2 & \frac{3}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Die Aufgabenteile d) und e) können unabhängig von den Ergebnissen aus den Aufgabenteilen a) bis c) gelöst werden.

d) Geben Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}_{OS,K}$ an.

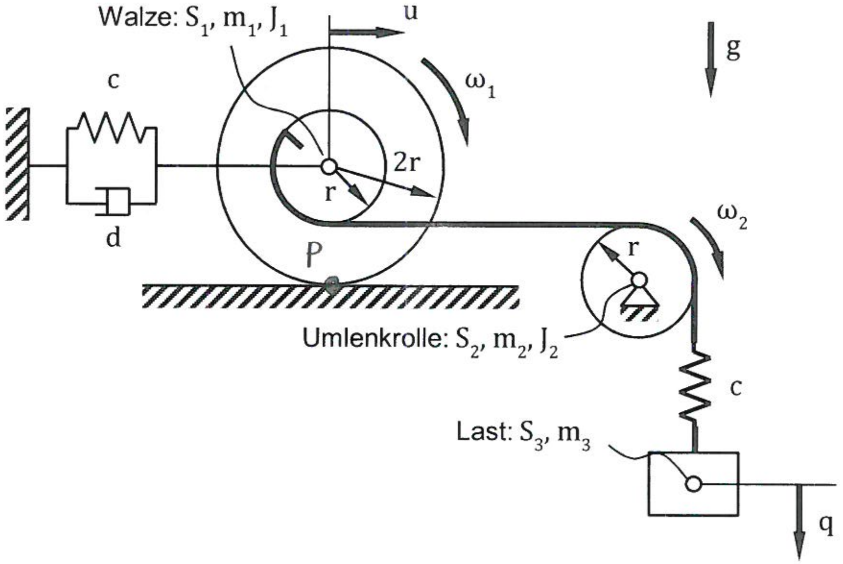
$$\mathbf{r}_{OS,K} = \begin{bmatrix} 4a & -2a & 0 \end{bmatrix}^T$$

e) Bestimmen Sie den Trägheitstensor $\mathbf{I}_{O,K}$ des Zylinders bezüglich des Punktes O, angegeben im Koordinatensystem K.

$$\mathbf{I}_{O,K} = \mathbf{I}_{S,K'} + \begin{bmatrix} 4ma^2 & 8ma^2 & 0 \\ 8ma^2 & 16ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 20ma^2 \end{bmatrix}$$

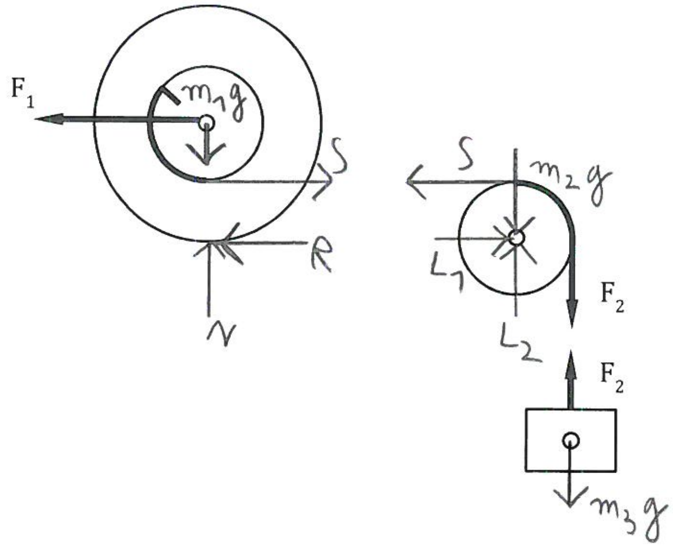
Aufgabe 6 (19 Punkte)

Der skizzierte Mechanismus besteht aus einer Walze (Schwerpunkt S_1, Masse m_1, Trägheitsmoment J_1), die ohne zu gleiten auf einer Unterlage rollt und über eine Feder-Dämpfer-Kombination (Federkonstante c, Dämpferkonstante d) an die Umgebung gekoppelt ist. An einem Seil, das um eine Umlenkrolle (Schwerpunkt S_2, Masse m_2, Trägheitsmoment J_2) geführt wird, ist eine Last (Schwerpunkt S_3, Masse m_3) elastisch an einer Feder (Federkonstante c) aufgehängt. Die Lagen der Schwerpunkte von Walze und Last werden durch die Koordinaten u und q beschrieben.



a) Tragen Sie den Momentanpol der Walze in die Zeichnung ein und benennen Sie diesen mit P.

b) Ergänzen Sie die fehlenden Kräfte in der Skizze und benennen Sie diese.



c) Geben Sie die Impuls- und Drallsätze für die ebenen Bewegungen der Walze und der Umlenkrolle bezüglich ihrer Schwerpunkte in Abhängigkeit der noch unbekannten Kräfte F_1 und F_2 an.

Walze:

$m_1 \ddot{u} = S - R - F_1$

$0 = m_1 g - N$

$J_1 \dot{\omega}_1 = -Sr + 2Rr$

Umlenkrolle:

$0 = L_1 - S$

$0 = -L_2 + m_2 g + F_2$

$J_2 \dot{\omega}_2 = F_2 r - Sr$

d) Stellen Sie den Impulssatz in vertikaler Richtung für die Last auf.

$$m_3 \ddot{q} = m_3 g - F_2$$

e) Geben Sie die kinematischen Zusammenhänge zwischen den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 von Walze und Umlenkrolle und der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\dot{u}$ an.

$\omega_1 = \dot{u}/(2r)$

$\omega_2 = \dot{u}/(2r)$

f) Für $u = 0$ und $q = 0$ sind die Federn entspannt. Wie lauten die Kraftgesetze für die eingeprägten Kräfte F_1 und F_2 in Abhängigkeit von u und q?

$F_1 = cu + d\dot{u}$

$F_2 = c\left(q - \frac{1}{2}u\right)$

g) Eliminieren Sie die Reaktionskräfte und vervollständigen Sie die Bewegungsgleichung des Systems mit den Koordinaten u und q.

$$\begin{bmatrix} \frac{J_1 + J_2}{2r^2} + 2m_1 & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2}c & -c \\ -\frac{1}{2}c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_3 g \end{bmatrix}$$

h) Berechnen Sie die Gleichgewichtslage des Systems.

$u_0 = \frac{m_3 g}{2c}$

$q_0 = \frac{5 m_3 g}{4c}$

ENDE