22. Februar 2018

Bachelor-Prüfung in Technischer Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
MUSTERLÖSUNG	
Matr.-Nummer	Fachrichtung
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

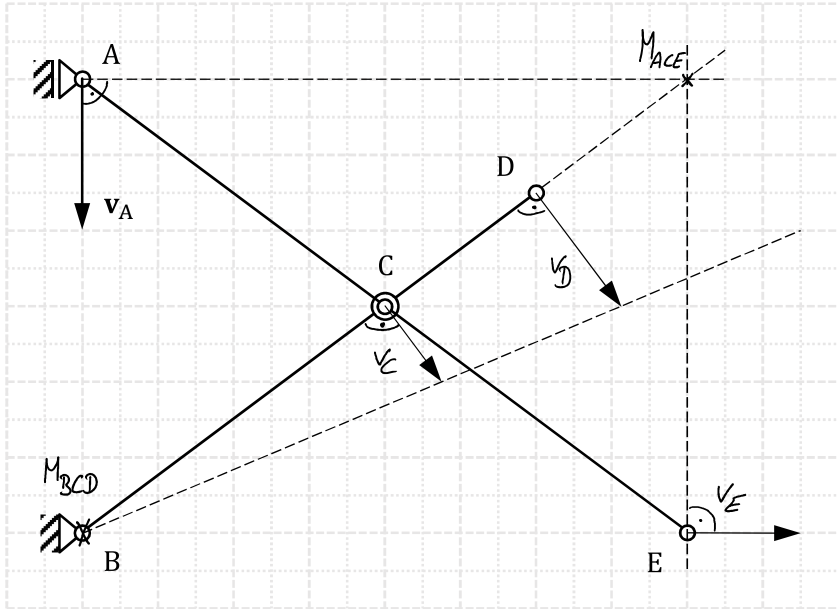
1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

……………………………………..
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Der skizzierte, ebene Mechanismus soll untersucht werden. Die Koppelstangen ACE und BCD sind starr und im Punkt C verdrehbar miteinander verbunden. Art und Ort der Lagerungen sowie Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen.



a) Bestimmen und bezeichnen Sie den Momentanpol $\mathrm{M_{BCD}}$ der Koppelstange BCD.

b) Konstruieren und bezeichnen Sie den Momentanpol $\mathrm{M_{ACE}}$ der Koppelstange ACE.

c) Konstruieren und bezeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_C$, $\mathbf{v}_D$ und $\mathbf{v}_E$ der Punkte C, D und E. Achten Sie auf die Skalierung der Vektoren.

d) Geben Sie die Verhältnisse der Beträge der Geschwindigkeiten an.

$|\mathbf{v}_C|/|\mathbf{v}_A| = \frac{5}{8}$, $|\mathbf{v}_D|/|\mathbf{v}_A| = \frac{15}{16}$,

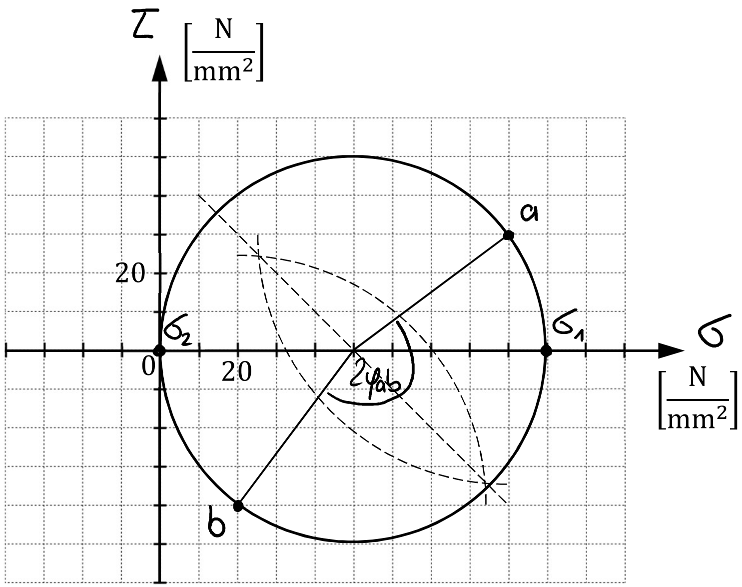
$|\mathbf{v}_E|/|\mathbf{v}_A| = \frac{3}{4}$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Der ebene Spannungszustand eines Bauteils soll untersucht werden. Die Normalspannung und Schubspannung sind für zwei unterschiedliche Schnitte a und b im Punkt P bekannt

$$\sigma_a = 90\ \mathrm{N/mm^2}\ , \qquad \tau_a = 30\ \mathrm{N/mm^2}\ ,$$
$$\sigma_b = 20\ \mathrm{N/mm^2}\ , \qquad \tau_b = -40\ \mathrm{N/mm^2}\ .$$

a) Zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis für den Punkt P und kennzeichnen Sie die Schnitte a und b. Beschriften Sie die Achsen des Diagramms.



b) Wie groß sind die Hauptspannungen im Punkt P?

$\sigma_1 =$ 100 $\frac{N}{mm^2}$

$\sigma_2 =$ 0

c) Welcher Winkel liegt zwischen den Schnitten a und b?

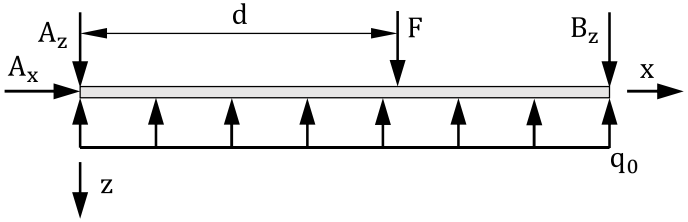
$\varphi_{ab} =$ 81,87° (98,13°)

d) Klassifizieren Sie den Spannungszustand.

einachsig

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Untersucht werden soll ein Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge L). Der Balken ist an den Enden A (Festlager) und B (Loslager) gelagert und wird durch die Kraft F sowie die konstante Streckenlast q_0 belastet. Im Folgenden soll die Biegelinie des freigeschnittenen, in der Skizze dargestellten Balkens untersucht werden.



a) Berechnen Sie die aus der Streckenlast resultierende äquivalente Einzelkraft zur Ermittlung der Lagerkräfte.

$R = \pm q_0 L$

b) Berechnen Sie die Reaktionskräfte in den Lagern A und B.

$A_x = 0$

$A_z = \frac{q_0 L}{2} + \left(\frac{d}{L} - 1\right) F$

$B_z = \frac{q_0 L}{2} - \frac{d}{L} F$

c) Wie lauten der Querkraft- und Momentenverlauf?

$Q(x) = q_0 x - \left(\frac{q_0 L}{2} + \left(\frac{d}{L} - 1\right) F\right) x^0 - F \langle x-d \rangle^0 \left(- \left(\frac{q_0 L}{2} - \frac{d}{L} F\right) \langle x-L \rangle^0 \right)$

$M(x) = \frac{q_0 x^2}{2} - \left(\frac{q_0 L}{2} + \left(\frac{d}{L} - 1\right) F\right) x^1 - F \langle x-d \rangle^1$

d) Geben Sie den Biegelinienverlauf und deren Ableitung mit noch unbestimmten Integrationskonstanten C_1 und C_2 an.

$w'(x) EI = -\frac{q_0 x^3}{6} + \left(\frac{q_0 L}{2} + \left(\frac{d}{L} - 1\right) F\right) \frac{x^2}{2} + \frac{F}{2} \langle x-d \rangle^2 + C_1$

$w(x) EI = -\frac{q_0 x^4}{24} + \left(\frac{q_0 L}{2} + \left(\frac{d}{L} - 1\right) F\right) \frac{x^3}{6} + \frac{F}{6} \langle x-d \rangle^3 + C_1 x + C_2$

e) Wie lauten die Randbedingungen, die sich aus der Lagerung ergeben?

$w(0) = 0$, $w(L) = 0$

f) Bestimmen Sie für $d = L/2$ die Integrationskonstanten C_1 und C_2.

$C_1 = -\frac{q_0 L^3}{24} + \frac{F L^2}{16}$

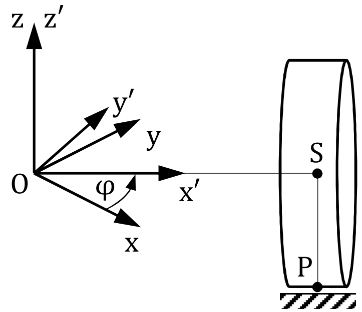
$C_2 = 0$

g) Geben Sie für $d = L/2$ die Kraft F an, damit sich keine Verschiebung an ihrem Angriffspunkt ergibt.

$F = \frac{5}{8} q_0 L$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Es soll die Kinematik des abgebildeten Kollergangs untersucht werden. Der Schwerpunkt S des Läufers (Radius r) hat den konstanten Abstand s zum Ursprung O der eingezeichneten Koordinatensysteme K und K'. Das Koordinatensystem K' dreht sich mit dem Läufer mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$. Das Koordinatensystem K ist raumfest. Die z- und z'-Achse sind senkrecht zur Bodenplatte des Läufers. Es kann von Rollen ohne Gleiten ausgegangen werden.



a) Wie lautet die Drehmatrix, welche die Verdrehung von K' gegenüber K beschreibt?

$$\mathbf{C}_{\mathrm{KK}'} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Ortsvektoren des Schwerpunkts S und des Momentanpols P des Läufers.

$$\mathbf{r}_{\mathrm{OS,K}'} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{\mathrm{OP,K}'} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die folgenden Vektoren.

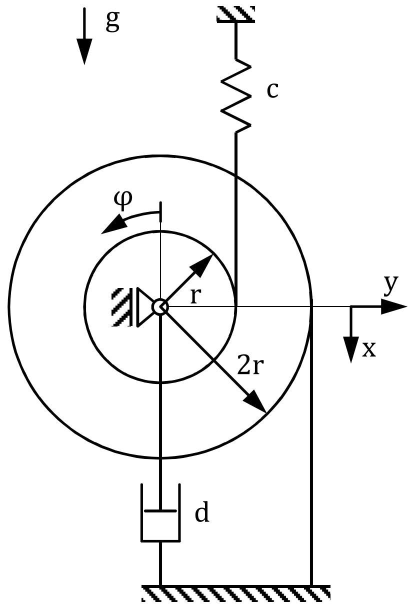
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK}',\mathrm{K}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\mathrm{OS,K}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} s \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Wie lautet der Vektor der absoluten Drehgeschwindigkeit des Läufers in den Koordinatensystemen K' und K?

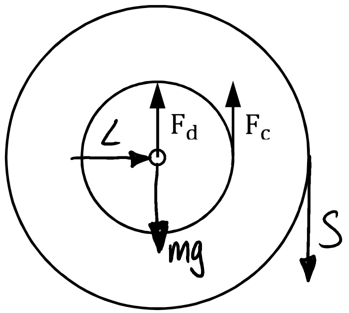
$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{K}'} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\frac{s}{r} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\frac{s}{r}\cos\varphi \\ -\dot{\varphi}\frac{s}{r}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5 (17 Punkte)

Gegeben sei eine ebene, homogene Stufenscheibe (Masse m, Trägheitsradius k), die über ein auf dem Innenradius r aufgerolltes Seil mit einer an der Decke befestigten Feder (Federsteifigkeit c) verbunden ist. Zusätzlich sei die Stufenscheibe über ein auf dem Außenradius $2r$ aufgerolltes Seil und einem am Schwerpunkt befestigten Dämpfer (Dämpferkonstante d) mit dem Boden verbunden. Die Feder sei für $x=\varphi=0$ entspannt. Die Gravitationskonstante ist g.



a) Schneiden Sie die Stufenscheibe frei und ergänzen Sie die fehlenden Kräfte in der Zeichnung.



b) Geben Sie die Impulssätze und den Drallsatz der Stufenscheibe bezüglich des Schwerpunkts in Abhängigkeit der unbekannten Federkraft F_c und Dämpferkraft F_d an.

$0 = L$

$m\ddot{x} = mg + S - F_d - F_c$

$mk^2\ddot{\varphi} = rF_c - 2rS$

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Auslenkung x und der Verdrehung φ sowie zwischen ihren zeitlichen Ableitungen?

$\varphi = \frac{x}{2r}$, $\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{2r}$, $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{2r}$

d) Bestimmen Sie die Feder- und Dämpferkraft entsprechend des Freischnitts.

$F_c = c\frac{x}{2} \quad (= c\varphi r)$

$F_d = d\dot{x} \quad (= 2dr\dot{\varphi})$

e) Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Koordinate x?

$m\left(4 + \frac{k^2}{r^2}\right)\ddot{x} + 4d\dot{x} + cx = 4mg$

f) Bestimmen Sie die Auslenkung x_S der Gleichgewichtslage.

$x_S = 4\frac{mg}{c}$

g) Geben Sie für $k=r$ die Eigenwerte und den Abklingkoeffizienten des schwingfähigen Systems an.

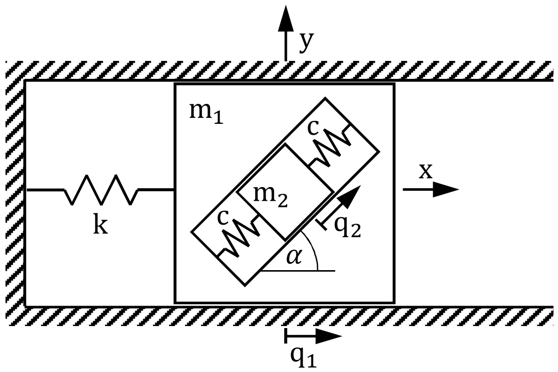
$\lambda_{1/2} = \frac{-2d \pm \sqrt{4d^2 - 5mc}}{5m}$

$\delta = \frac{2d}{5m}$

h) Geben Sie für $k=r$ die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung an.

$\omega_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{\frac{c}{m}}$

Aufgabe 6 (20 Punkte)



Die Bewegungsgleichung eines ebenen mechanischen Systems soll mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art ermittelt werden. Das System besteht aus den Massen m_1 und m_2, welche reibungsfrei gelagert sind. Die Federn (Federsteifigkeiten k bzw. c) sind entspannt für die Lage der Massenschwerpunkte im Ursprung des Inertialsystems mit den Achsen x und y. Die verallgemeinerte Koordinate q_1 beschreibt die Verschiebung der Masse m_1 bezüglich des Inertialsystems, die verallgemeinerte Koordinate q_2 beschreibt die Verschiebung der Masse m_2 bezüglich der Masse m_1. Der Winkel α ist konstant.

a) Wie lauten die Ortsvektoren der Schwerpunkte S_1 und S_2 der Massen?

$$\mathbf{r}_{OS_1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{OS_2} = \begin{bmatrix} q_1 + q_2\cos\alpha \\ q_2 \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Wie lauten die Geschwindigkeitsvektoren der Schwerpunkte der Massen?

$$\mathbf{v}_{OS_1} = \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{OS_2} = \begin{bmatrix} \dot q_1 + \dot q_2\cos\alpha \\ \dot q_2 \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Berechnen Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot q_1^2 + \dot q_2^2\right) + m_2 \dot q_1 \dot q_2 \cos\alpha$$

$$V = \frac{1}{2} k q_1^2 + c q_2^2$$

d) Geben Sie die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten an.

$$L^* = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot q_2^2 + m_2 \dot q_1 \dot q_2 \cos\alpha - \frac{1}{2} k q_1^2 - c q_2^2$$

e) Geben Sie die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion an.

$$\partial L^* / \partial q_1 = -k q_1 \quad , \quad \partial L^* / \partial \dot q_1 = (m_1+m_2)\dot q_1 + m_2 \dot q_2 \cos\alpha$$

$$\partial L^* / \partial q_2 = -2 c q_2 \quad , \quad \partial L^* / \partial \dot q_2 = m_2 \dot q_2 + m_2 \dot q_1 \cos\alpha$$

f) Wie lauten die folgenden zeitlichen Ableitungen?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_1}\right) = (m_1+m_2)\ddot q_1 + m_2 \ddot q_2 \cos\alpha$$

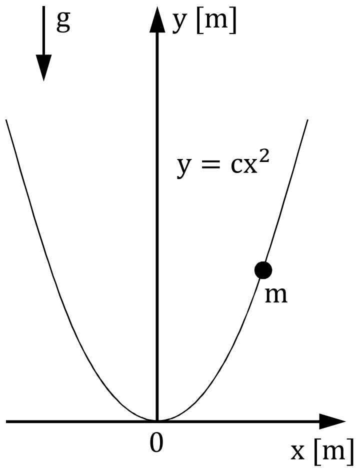
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_2}\right) = m_2 \ddot q_2 + m_2 \ddot q_1 \cos\alpha$$

g) Vervollständigen Sie die Bewegungsgleichung in Matrixform.

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2\cos\alpha \\ m_2\cos\alpha & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot q_1 \\ \ddot q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 2c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Gesucht ist die Bewegungsgleichung eines Massepunktes (Masse m). Die ebene Bewegung des Massepunktes unterliegt auf Lageebene der Zwangsbedingung $y = cx^2$, mit der Konstante $c > 0$. Die Gravitationskonstante ist g.



a) Geben Sie eine zur Beschreibung des Freiheitsgrades geeignete verallgemeinerte Koordinate q an.

$q =$ x

Geben Sie nachfolgend alle Größen in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate q und ihren Ableitungen an.

b) Wie lauten Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor des Massepunktes?

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} q \\ cq^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ 2cq\dot{q} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ 2c\dot{q}^2 + 2cq\ddot{q} \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie die partielle Ableitung des Ortsvektors sowie den Vektor der eingeprägten Kräfte an.

$$\partial \mathbf{r} / \partial q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2cq \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das Prinzip von d'Alembert in der Lagrange'schen Fassung soll im Weiteren zur Aufstellung der Bewegungsgleichung verwendet werden.

d) Welche der folgenden Gleichungen entspricht diesem Prinzip?

- ☐ $\left(\mathbf{F}^e - m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\right) \delta q = 0$
- ☒ $(\mathbf{F}^e - m\mathbf{a}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \delta q = 0$
- ☐ $(\mathbf{F}^e - m\mathbf{a}) \cdot \delta q = 0$
- ☐ $m\mathbf{a} = \mathbf{F}^e$

e) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Massepunktes?

$$(1 + 4c^2q^2)\ddot{q} + 2cq(2c\dot{q}^2 + g) = 0$$

ENDE