25. August 2016

Bachelorprüfung in Technische Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig) Musterlösung	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 5 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen **nicht** voneinander getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich **nicht** zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
Σ	

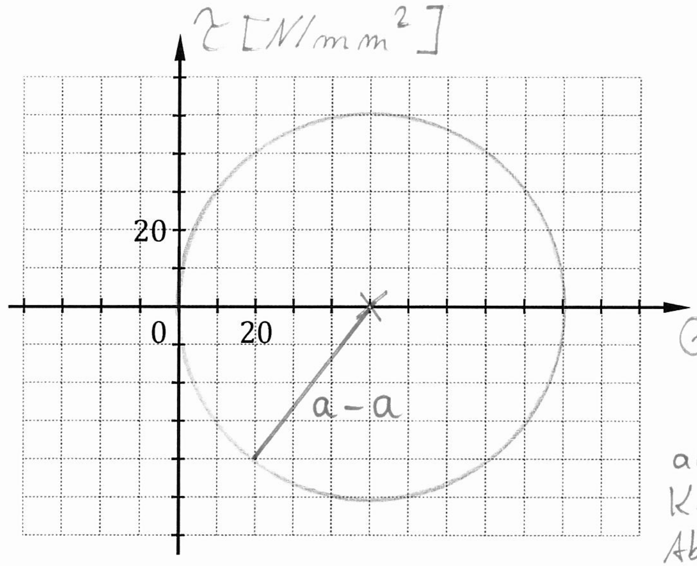
Aufgabe 1 (8 Punkte)

Der Spannungszustand im Punkt P eines Bauteils soll untersucht werden. Für einen Schnitt a − a durch das Bauteil sind die Normalspannung $\sigma_a = 20\ \mathrm{N/mm^2}$ und die Schubspannung $\tau_a = -40\ \mathrm{N/mm^2}$ bekannt. Die Differenz zwischen den beiden Hauptspannungen beträgt $\Delta\sigma = 100\ \mathrm{N/mm^2}$.

a) Wie groß ist der Betrag der maximalen Schubspannung im Punkt P?

$|\tau_{max}| =$ 50 N/mm²

b) Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für den Punkt P. Beschriften Sie die Achsen und kennzeichnen Sie den Schnitt a − a.



alternativ: Kreis mit Abszissenabschnitten $\sigma_1 = 40\ \mathrm{N/mm^2}$ und $\sigma_2 = -60\ \mathrm{N/mm^2}$

c) Wie groß sind die beiden Hauptspannungen im Punkt P?

Reihenfolge beliebig

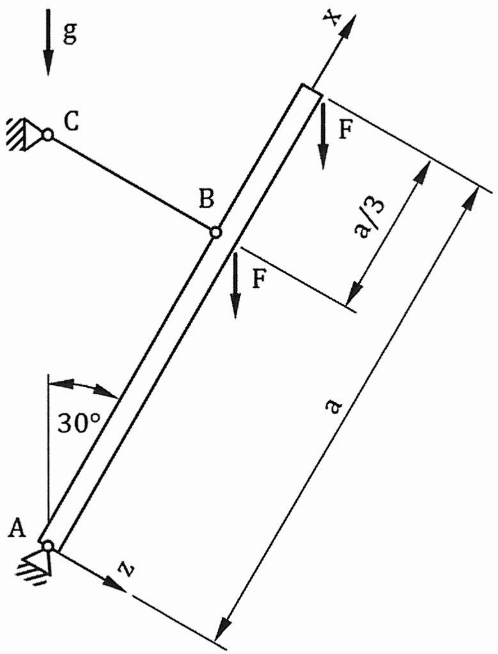
$\sigma_1 =$ 100 N/mm² , $\sigma_2 =$ 0 N/mm²

d) Welche Gestalt nimmt der Mohrsche Spannungskreis im allgemeinen dreidimensionalen Fall an?

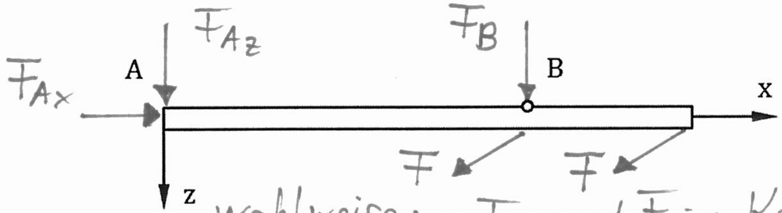
☐ Kugel ☐ Ellipsoid ☒ drei Kreise

Aufgabe 2 (18 Punkte)

Zu Dekorationszwecken sind im Eingangsbereich einer Veranstaltungshalle Fahnen an Fahnenstangen angebracht. Eine solche Fahnenstange kann als masseloser, homogener Balken der Länge a und der Biegesteifigkeit EI betrachtet werden. Der Balken ist im Punkt A drehbar an der Wand gelagert. Weiterhin ist er im Punkt B über einen masselosen, undehnbaren Stab mit der Hallenwand (Punkt C) verbunden. Die auf den Balken wirkende Last infolge des Gewichts der Fahne wird vereinfachend über zwei Einzelkräfte F modelliert. Das System ist im Gleichgewicht.



a) Schneiden Sie den Balken frei, zeichnen Sie in die Freischnittskizze alle wirkenden Kräfte und Momente ein und benennen Sie diese.



wahlweise: – F_B und F in Komponentendarstellung
– F_{Ax}, F_{Az} und/oder F_B in umgekehrte Richtung zeigend ⇝ angepasste Vorzeichen in b) und c)

b) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Balken an.

$\sum_i F_{x_i} = 0: \quad F_{Ax} - \sqrt{3}F = 0$

$\sum_i F_{z_i} = 0: \quad F_{Az} + F_B + F = 0$

$\sum_i M_{y_i}^{(A)} = 0: \quad -\frac{2}{3}a\left(F_B + \frac{1}{2}F\right) - \frac{1}{2}Fa = 0$

c) Bestimmen Sie die Lagerkraft im Punkt A sowie die Stabkraft im Punkt B.

$F_{Ax} = \sqrt{3}F$, $F_{Az} = \frac{1}{4}F$

$F_B = -\frac{5}{4}F$

d) Bestimmen Sie unter Verwendung von Klammerfunktionen die Verläufe der Normalkraft, der Querkraft und des Biegemoments in Abhängigkeit der x-Koordinate.

$N(x) = -\sqrt{3}F(\langle x-0\rangle^0) + \frac{\sqrt{3}}{2}F\langle x-\frac{2}{3}a\rangle^0$
$(+\frac{\sqrt{3}}{2}F\langle x-a\rangle^0)$

$Q(x) = -\frac{1}{4}F(\langle x-0\rangle^0) + \frac{3}{4}F\langle x-\frac{2}{3}a\rangle^0$
$(-\frac{1}{2}F\langle x-a\rangle^0)$

$M(x) = -\frac{1}{4}F\langle x-0\rangle^1 + \frac{3}{4}F\langle x-\frac{2}{3}a\rangle^1$
$(-\frac{1}{2}F\langle x-a\rangle^1)$

e) Geben Sie die Biegelinie des Balkens mit noch unbestimmten Integrationskonstanten C_1 und C_2 an.

$w(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{24}\langle x-0\rangle^3 - \frac{3}{24}\langle x-\frac{2}{3}a\rangle^3\right.$

$\left.+\frac{1}{12}\langle x-a\rangle^3\right)$

$+ C_1 x + C_2$

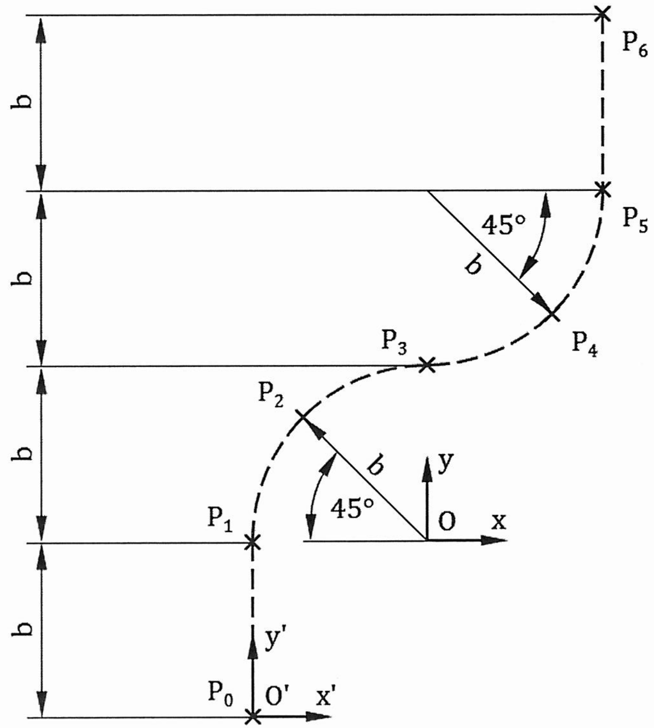
wahlweise: $\frac{1}{EI}(C_1 x + C_2)$ statt $C_1 x + C_2$

f) Wie lauten die Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten der Biegelinie, die sich aus der Lagerung des Balkens ergeben?

$w(x=0)=0$, $w(x=\frac{2}{3}a)=0$

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Ein Rennwagen durchfährt die unten abgebildete Schikane (gestrichelte Linie, Einfahrt an P_0, Ausfahrt an P_6). Diese setzt sich aus vier Teilabschnitten zusammen, zwei Geraden (P_0P_1 und P_5P_6) sowie zwei Viertelkreisen (P_1P_3 und P_3P_5). Um die Spur während der Durchfahrt der Schikane halten zu können, muss der Wagen zunächst seine Geschwindigkeit in Fahrtrichtung verringern. Deshalb verzögert er im Abschnitt P_0P_2 von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit der konstanten Beschleunigung $-a$. Im Mittelabschnitt P_2P_4 hält der Wagen seine betragsmäßige Geschwindigkeit von $v_m > 0$ konstant. Nach Passieren des Punkts P_4 erhöht der Wagen seine Geschwindigkeit in Fahrtrichtung mit der konstanten Beschleunigung a. Die y'-Richtung des körperfesten Koordinatensystems K' mit Ursprung 0' zeigt stets in Fahrtrichtung des Rennwagens. Im Ursprung 0 des Inertialsystems K sitzt ein Zuschauer.



a) Wie lang ist die vom Rennwagen bei der vollständigen Durchfahrt der Schikane zurückgelegte Wegstrecke s_{06}?

$s_{06} = b(2+\pi)$

b) Wie hoch ist die betragsmäßige Geschwindigkeit des Rennwagens im Mittelabschnitt P_2P_4?

$v_m = \sqrt{v_0^2 - 2ab\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}$

c) Wie lautet der Vektor der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{KK',K}$ des körperfesten Koordinatensystems K' gegenüber dem Inertialsystem K für den Abschnitt P_2P_3 dargestellt im Inertialsystem?

$$\boldsymbol{\omega}_{KK',K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v_m}{b} \end{bmatrix}$$

wahlweise v_m aus b)

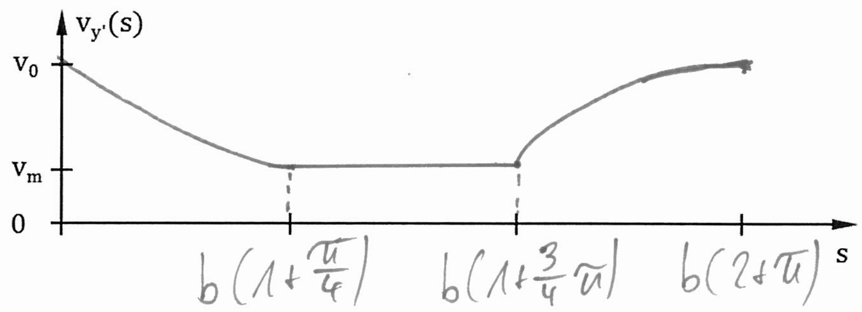
d) Geben Sie den Verdrehwinkel zwischen dem körperfesten Koordinatensystem K' und dem Inertialsystem K zu Beginn des Abschnitts P_2P_3 an.

$\frac{\pi}{4}$

e) Geben Sie die Drehmatrix $\mathbf{C}_{KK'}$ an, welche die Verdrehung des körperfesten Koordinatensystems K' gegenüber dem Inertialsystem K während des Abschnitts P_2P_3 beschreibt. Der Wagen passiert den Punkt P_2 zum Zeitpunkt t_2.

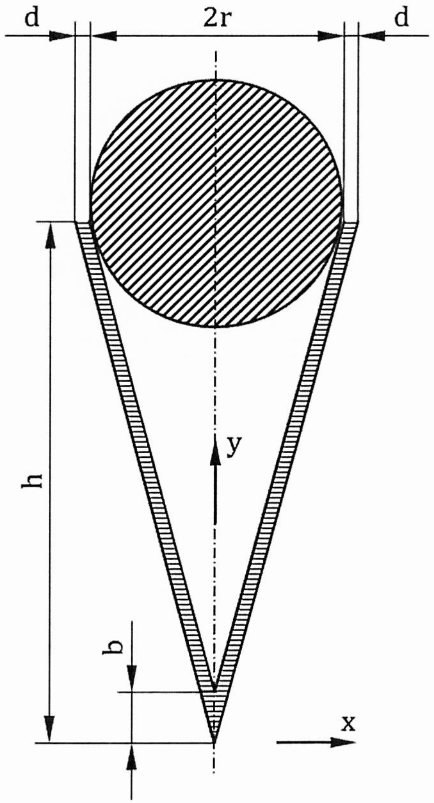
$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{v_m}{b}(t-t_2)+\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{v_m}{b}(t-t_2)+\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{v_m}{b}(t-t_2)+\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{v_m}{b}(t-t_2)+\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f) Skizzieren Sie den Verlauf der Geschwindigkeit des Rennwagens in y'-Richtung als Funktion der zurückgelegten Wegstrecke s. Bei der Einfahrt in die Schikane am Punkt P_0 ist $s = 0\,\mathrm{m}$. Ergänzen Sie die fehlende Bemaßung der Abszisse (s-Achse).



Aufgabe 4 (10 Punkte)

Das Massenträgheitsmoment eines Speiseeises bezüglich dessen Rotationssymmetrieachse (y-Achse) soll untersucht werden. Das Eis besteht aus einer Eistüte und einer Eiskugel. Die Eistüte kann als Hohlkreiskegel der Höhe h, der Dicke d, des Grundflächenradius $r + d$ sowie der homogenen Dichte ρ_T aufgefasst werden. Die Eiskugel hat den Radius r und die homogene Dichte ρ_E.



a) Geben Sie die Masse der Eiskugel an.

$m_E = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_E$

b) Geben Sie das Massenträgheitsmoment der Eiskugel bezüglich der eingezeichneten Symmetrieachse (y-Achse) an.

$J_E = \frac{8}{15} \pi r^5 \rho_E$

c) Wie lässt sich der Radius der äußeren Mantelfläche der Eistüte als Funktion der y-Koordinate beschreiben?

$R_{Ta}(y) = \frac{r+d}{h} y$

d) Wie lautet das Integral zur Berechnung der Masse eines Vollkreiskegels, der dieselbe Dichte sowie dieselben Außenabmessungen wie die Eistüte besitzt?

$m_K = \int_{y=0}^{y=h} \left(\frac{r+d}{h}\right)^2 y^2 \pi \rho_T \, dy$

e) Geben Sie die Masse der Eistüte an.

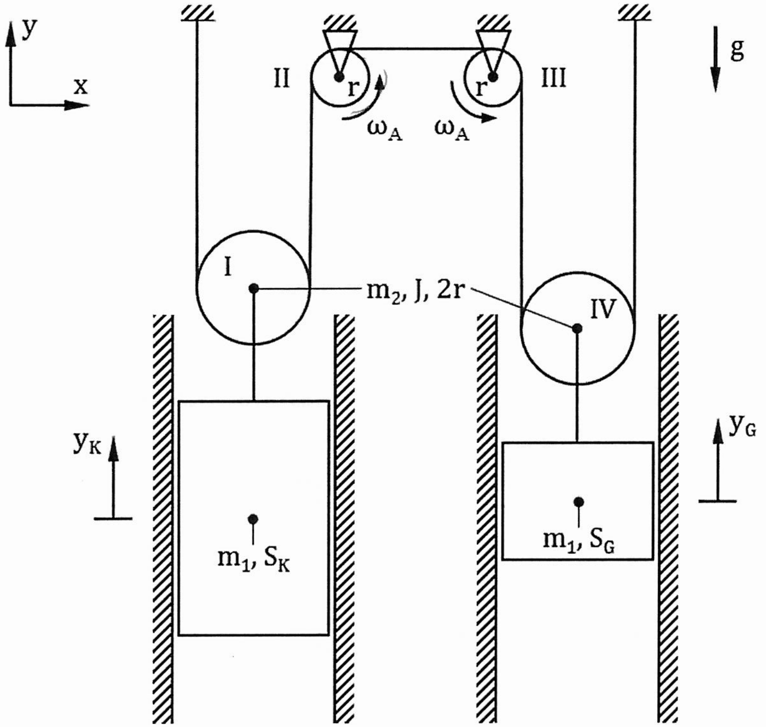
$m_T = \frac{1}{3} \pi \rho_T \left[h (r+d)^2 - r^2 (h-b)\right]$

f) Wie berechnet sich das Massenträgheitsmoment des gesamten Speiseeises bezüglich der eingezeichneten Symmetrieachse (y-Achse) aus den Trägheitsmomenten der Eistüte J_T und der Eiskugel J_E?

$J_{ges} = J_T + J_E$

Aufgabe 5 (16 Punkte)

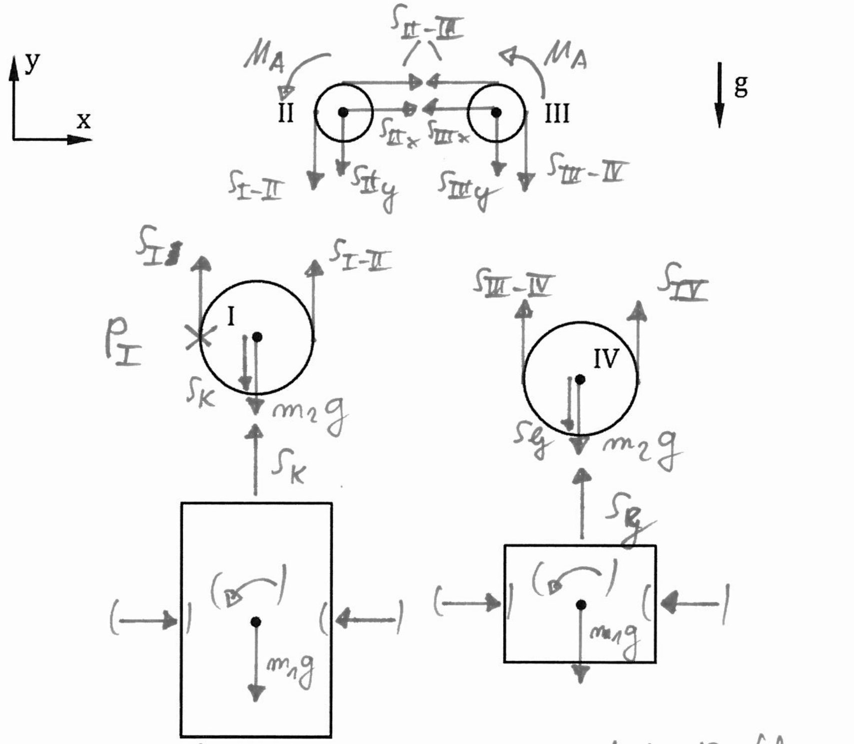
Im Folgenden ist die Vertikaldynamik des im Stuttgarter Fernsehturm installierten Seilaufzugs zu untersuchen. Der Aufzug besteht aus einer Passagierkabine K (Masse m_1, Schwerpunkt S_K), einem Gegengewicht G (Masse m_1, Schwerpunkt S_G), zwei ortsveränderlichen Tragrollen I und IV (Masse jeweils m_2, Trägheitsmoment bezüglich Schwerpunkt jeweils J, Radius jeweils $2r$) sowie zwei ortsfesten Antriebsrollen II und III (masselos, Radius jeweils r). Alle Rollen sind reibungsfrei gelagert. Das Tragseil ist als masselos sowie undehnbar zu betrachten. Zwischen dem Seil und den Rollen tritt kein Gleiten auf. Die Passagierkabine und das Gegengewicht bewegen sich lediglich translatorisch in y-Richtung. Bei eingeschaltetem Antrieb drehen sich die beiden Antriebsrollen mit der Winkelgeschwindigkeit ω_A und übertragen jeweils das Antriebsmoment M_A. Bei ausgeschaltetem Antrieb sind sie frei drehbar.



a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das ebene System bei ausgeschaltetem Antrieb?

f = 1

b) Schneiden Sie das System frei, zeichnen Sie in die Freischnittskizze alle bei eingeschaltetem Antrieb wirkenden Kräfte und Momente ein und benennen Sie diese.



Reaktionskräfte wahlweise in umgekehrte Richtung zeigend ⇝ angepasste Vorzeichen in f), g) und h)

c) Zeichnen Sie in obige Freischnittskizze den Momentanpol P_I der Rolle I ein.

d) Wie lauten die kinematischen Beziehungen zwischen ω_A, $\dot{y}_K$ und $\dot{y}_G$?

$\dot{y}_K(\omega_A) = -\frac{\omega_A}{2} r$, $\dot{y}_G(\dot{y}_K) = -\dot{y}_K$

e) Geben Sie das Trägheitsmoment der Rolle I bezüglich deren Momentanpol P_{I} an.

$J + 4 m_2 r^2$

f) Stellen Sie die Drallsätze für die Rollen I und IV bezüglich deren Momentanpole auf.

I: $(J + 4 m_2 r^2) \frac{\dot\omega_A}{4} = 2r(S_K + m_2 g) - 4r S_{I-II}$

IV: $(J + 4 m_2 r^2) \frac{\dot\omega_A}{4} = -2r(S_G + m_2 g) + 4r S_{III-IV}$

g) Geben Sie die Impulssätze in vertikaler Richtung für die Kabine und das Gegengewicht an.

K: $m_1 \ddot y_K = S_K - m_1 g$

G: $m_1 \ddot y_G = S_G - m_1 g$

} wahlweise $\ddot y_K$ und/oder $\ddot y_G$ aus d)

h) Wie groß ist die zwischen Kabine und Rolle I wirkende Kraft?

$S_K = m_1 (\ddot y_K + g)$ } wahlweise $\ddot y_K$ aus d)

i) Wie lange benötigt der Aufzug, um seine betragsmäßige Höchstgeschwindigkeit von $|\dot y_K|_{max} = 5\ \mathrm{m/s}$ zu erreichen, wenn er aus der Ruhe heraus startet, der Radius $r = 0.4\ \mathrm{m}$ beträgt und der Betrag der Winkelbeschleunigung $\dot\omega_A$ linear um $2\ \mathrm{rad/s^2}$ pro Sekunde ansteigt?

5 s

ENDE