18. Februar 2016

Bachelor-Prüfung in Technischer Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

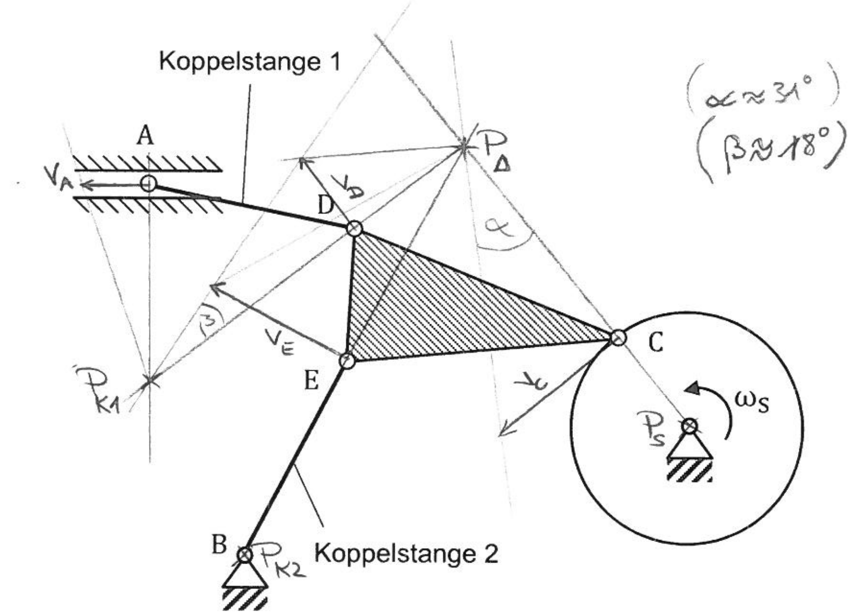
1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Im skizzierten ebenen Mechanismus dreht sich eine Scheibe (Radius R) mit der Winkelgeschwindigkeit ω_S. Die Koppelstange 1 wird im Lager A in horizontaler Richtung geführt. Das Dreieck ΔECD ist bezüglich der Koppelstange 1 im Punkt D, der Koppelstange 2 (Länge $2R$) im Punkt E und der Scheibe im Punkt C drehbar gelagert.



a) Konstruieren Sie die Momentanpole der Scheibe P_S, der beiden Koppelstangen P_{K1}, P_{K2} und des Dreiecks P_Δ.

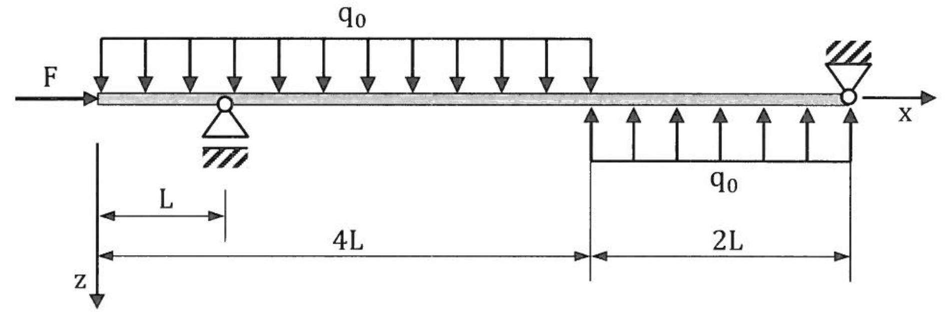
b) Zeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_C, \mathbf{v}_D, \mathbf{v}_E$ der Lagerpunkte A, C, D, E ein. Die Länge des Vektors $\mathbf{v}_C$ soll 2 cm betragen.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Drehgeschwindigkeit ω_{K2} der Koppelstange 2. Nehmen Sie dazu an, dass $\overline{EP_D} = \overline{CP_D}$ gilt.

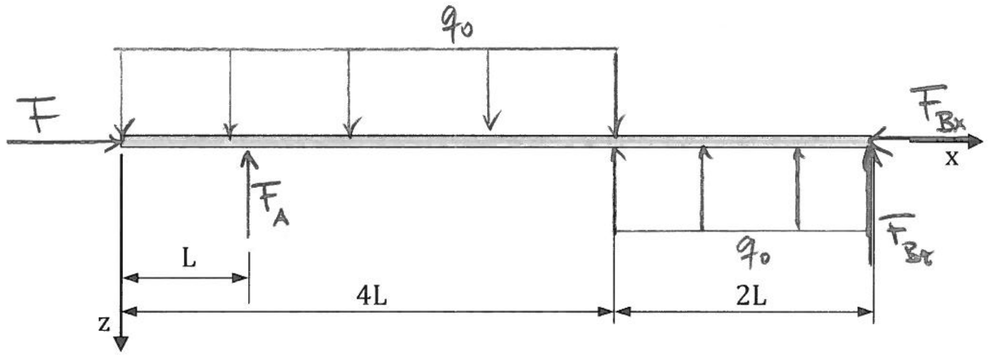
$\omega_{K2} =$ $\frac{1}{2}\omega_S$

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Ein Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge 6L) wird mit zwei konstanten Streckenlasten mit dem Betrag q_0 belastet und befindet sich im Gleichgewicht.



a) Zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte und Streckenlasten ein und benennen Sie diese.



b) Berechnen Sie die Lagerreaktionskräfte.

$F_{Bx} = F$

$F_A = \frac{14}{5} q_0 L$

$F_{Bz} = -\frac{4}{5} q_0 L$

c) Wie lauten der Querkraftverlauf und der Momentenverlauf?

$Q(x) = -q_0 \langle x-0 \rangle^1 + 2 q_0 \langle x-4L \rangle^1$

$+ \frac{14}{5} q_0 L \langle x-L \rangle^0 - \frac{4}{5} q_0 L \langle x-6L \rangle^0$

$M(x) = -\frac{q_0}{2} x^2 + q_0 \langle x-4L \rangle^2 + \frac{14}{5} q_0 L \langle x-L \rangle^1$

$\left(-\frac{4}{5} q_0 L \langle x-6L \rangle^1\right)$

d) Geben Sie die Biegelinie mit noch unbestimmten Integrationskonstanten C_1 und C_2 an.

$w(x) = \frac{1}{EI} \Big(\frac{q_0}{24} x^4 - \frac{q_0}{12} \langle x-4L \rangle^4$

$- \frac{7}{15} q_0 L \langle x-L \rangle^3$

$\left(+\frac{2}{15} q_0 L \langle x-6L \rangle^3\right) + C_1 x + C_2 \Big)$

e) Wie lauten die Randbedingungen, die sich aus der Lagerung ergeben?

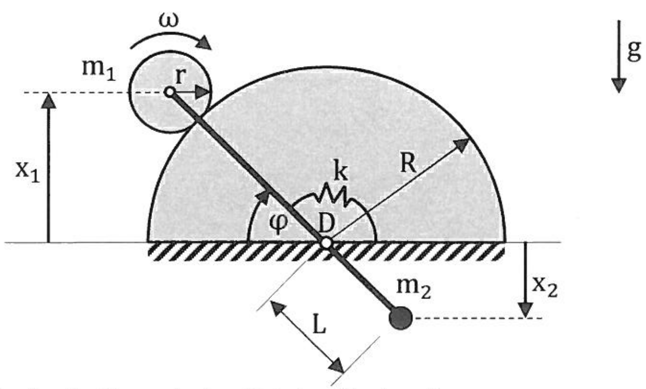
$w(L) = 0$, $w(6L) = 0$

f) Nennen Sie die notwendige Bedingung zur Bestimmung der maximalen Durchbiegung zwischen den Lagern.

$w'(x) = 0$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Bei dem dargestellten ebenen System ist ein homogener Zylinder (Masse m_1, Radius r) mit einer Punktmasse m_2 über einen masselosen Hebel verbunden. Der Hebel ist im Punkt D und am Zylinder drehbar gelagert. Der Zylinder rollt auf einem fest montierten Halbzylinder (Radius R), ohne zu gleiten. Zusätzlich ist eine Drehfeder mit der Drehsteifigkeit k zwischen Hebel und Ebene angebracht. Der Winkel φ gibt die Verdrehung des Hebels gegenüber der Horizontalen an. Bei $\varphi = \varphi_0$ ist die Feder entspannt. Die vertikale Lage des Zylindermittelpunkts ist x_1 und x_2 ist die vertikale Lage der Punktmasse. Die Drehgeschwindigkeit des Zylinders ist ω. Das Bewegungsverhalten soll mit den Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art analysiert werden.



a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das System?

$f = 1$

b) Geben Sie das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich seines Schwerpunkts an.

$J = \frac{1}{2} m_1 r^2$

c) Wie lauten die kinematischen Zusammenhänge zwischen x_1, x_2 und φ, beziehungsweise zwischen ω und $\dot{\varphi}$?

$x_1(\varphi) = (R+r)\sin\varphi$

$x_2(\varphi) = L\sin\varphi$

$\omega(\dot{\varphi}) = \frac{R+r}{r}\dot{\varphi}$

d) Geben Sie die potenzielle Energie des Systems in Abhängigkeit von φ an.

$V(\varphi) = m_1 g (R+r)\sin\varphi - m_2 g L \sin\varphi$
$+ \frac{1}{2} k (\varphi - \varphi_0)^2$

e) Geben Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit von $\dot{\varphi}$ an.

$T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4} m_1 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2$

f) Die Lagrange-Funktion ist $L^* = T - V$. Geben Sie die folgenden Ableitungen an.

$\frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = -m_1 g (R+r)\cos\varphi + m_2 g L \cos\varphi$
$- k(\varphi - \varphi_0)$

$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}} = \left(m_2 L^2 + \frac{3}{2} m_1 (R+r)^2\right)\dot{\varphi}$

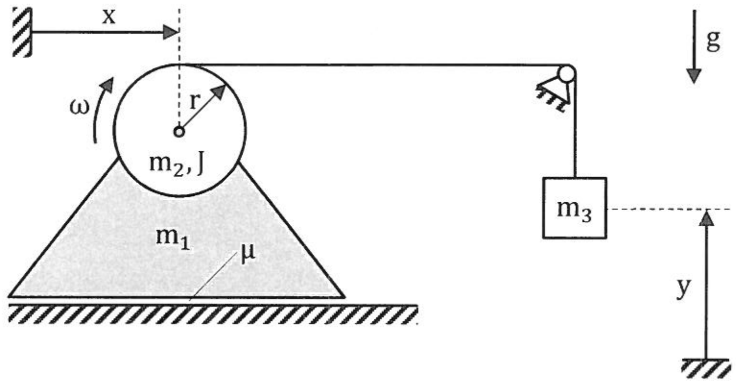
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}} = \left(m_2 L^2 + \frac{3}{2} m_1 (R+r)^2\right)\ddot{\varphi}$

g) Wie lautet die Bewegungsgleichung?

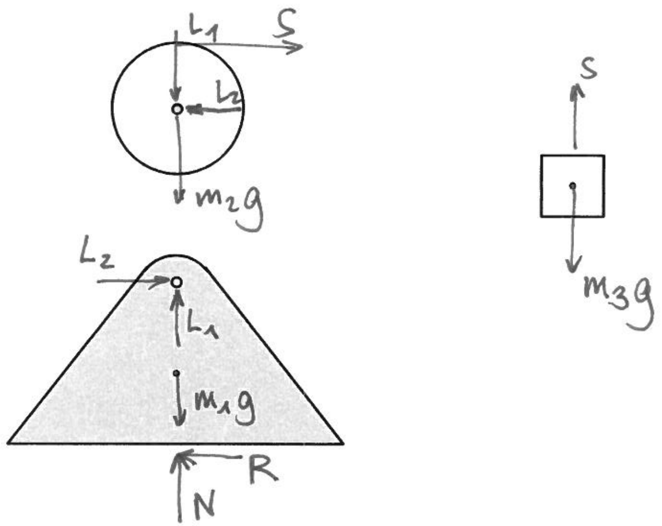
$\left(m_2 L^2 + \frac{3}{2} m_1 (R+r)^2\right)\ddot{\varphi}$
$+ \left(m_1 g (R+r) - m_2 g L\right)\cos\varphi$
$+ k(\varphi - \varphi_0) = 0$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Ein verschiebbarer Gleitblock (Masse m_1) steht auf einem rauen Boden (Gleitreibungskoeffizient μ). An dem Gleitblock ist eine homogene Walze (Masse m_2, Trägheitsmoment J bezüglich Drehpunkt, Radius r) reibungsfrei drehbar gelagert. Über ein masseloses Seil und eine masselose, reibungsfreie Umlenkrolle ist die Walze mit der Masse m_3 verbunden. Die horizontale Lage des Drehpunkts der Walze wird mit x beschrieben, die vertikale Lage der Masse m_3 mit y und die Winkelgeschwindigkeit der Walze mit ω.



a) Zeichnen Sie in die Freischnittskizze bei einer Bewegung des Gleitblocks nach rechts alle Kräfte ein und benennen Sie diese.



b) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das ebene System?

f = 2

c) Geben Sie die Impulssätze in vertikaler und horizontaler Richtung für den Gleitblock an.

$0 = L_1 + N - m_1 g$

$m_1 \ddot{x} = L_2 - R$

d) Geben Sie den Impulssatz in vertikaler Richtung für die Masse m_3 an.

$m_3 \ddot{y} = S - m_3 g$

e) Geben Sie die Impulssätze in vertikaler und horizontaler Richtung sowie den Drallsatz bezüglich des Drehpunkts für die Walze an.

$0 = -m_2 g - L_1$

$m_2 \ddot{x} = S - L_2$

$J \dot{\omega} = S r$

Als verallgemeinerte Koordinaten des Systems werden x und y gewählt.

f) Wie ist der kinematische Zusammenhang zwischen ω und den Zeitableitungen der verallgemeinerten Koordinaten x und y?

$\omega(\dot{x}, \dot{y}) = \dfrac{-\dot{x} - \dot{y}}{r}$

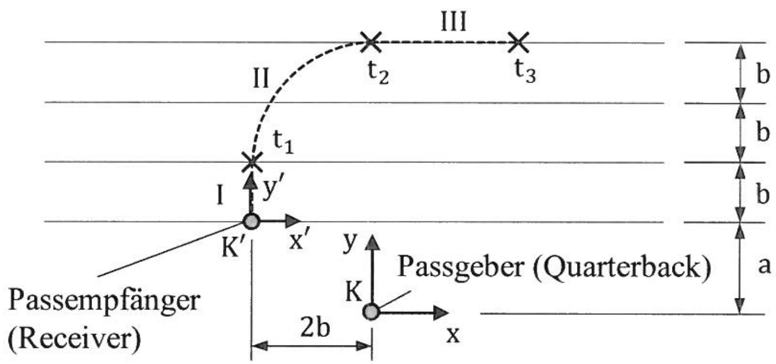
g) Eliminieren Sie die Zwangskräfte und geben Sie die Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten x und y an.

$\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} + \frac{J}{r^2}\ddot{y} = -\mu\left(m_1 + m_2\right)g$

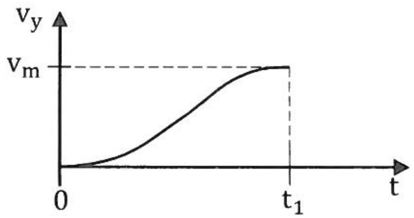
$\frac{J}{r^2}\ddot{x} + \left(m_3 + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{y} = -m_3 g$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Bei einem American-Football-Spiel läuft der Passempfänger die vorgegebene Route, welche in 3 Abschnitte unterteilt ist. Der Passempfänger beschleunigt in Abschnitt I vom Zeitpunkt $t_0 = 0\,s$ bis zum Zeitpunkt t_1 auf die Maximalgeschwindigkeit v_m. Auf der anschließenden Kreisbahn (Abschnitt II) mit dem Radius $2b$ verdreht sich das körperfeste Koordinatensystem K' gegenüber dem Inertialsystem K. Die x'-Richtung zeigt dabei immer senkrecht zur eingezeichneten Laufroute. Der Betrag der Geschwindigkeit des Passempfängers ist in Abschnitt II konstant.



Die Geschwindigkeit des Passempfängers in y-Richtung beträgt in Abschnitt I $v_y(0 \le t \le t_1) = \frac{v_m}{2}(\cos(\frac{\pi}{t_1}(t - t_1)) + 1)$ und ist im Folgenden skizziert.



a) Bestimmen Sie die Beschleunigung des Passempfängers in Abschnitt I.

$a_y(0 \le t \le t_1) = \frac{v_m \pi}{2 t_1}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{t_1}(t - t_1)\right)\right)$

b) Zu welchem Zeitpunkt t tritt die maximale Beschleunigung in Abschnitt I auf und wie groß ist diese?

$a_{y,max} = a_y(t = \frac{t_1}{2}) = \frac{v_m \pi}{2 t_1}$

c) Kreuzen Sie die passende Drehmatrix für die Kreisbahn in Abschnitt II an, welche die Verdrehung des Koordinatensystems K' gegenüber dem Inertialsystem K im Inertialsystem angibt.

☐ $\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) & \sin(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) & 0 \\ -\sin(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) & \cos(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(a+b)^2+4b^2} \end{bmatrix}$

☒ $\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) & \sin(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) & 0 \\ -\sin(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) & \cos(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) - 2b & \sin(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) + a + b & 0 \\ -\sin(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) + a + b & \cos(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)) + 2b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{v_m}{2b}t) & -\sin(\frac{v_m}{2b}t) & 0 \\ \sin(\frac{v_m}{2b}t) & \cos(\frac{v_m}{2b}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) Wie lautet der Vektor der Drehgeschwindigkeit des Koordinatensystems K' gegenüber dem Inertialsystem K für Abschnitt II $(t_1 \le t \le t_2)$ im Inertialsystem?

$\boldsymbol{\omega}_{KK',K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v_m}{2b} \end{bmatrix}$

e) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Position des Passempfängers für den Abschnitt II im Inertialsystem K.

$$\mathbf{v}_{OO',K} = \begin{bmatrix} v_m \sin\left(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)\right) \\ v_m \cos\left(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)\right) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{OO',K} = \begin{bmatrix} -2b \cos\left(\frac{v_m}{2b}(t-t_1)\right) \\ 2b \sin\left(\frac{v_m}{2b}(t-t_4)\right) + a + b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Im letzten Abschnitt III wird nur die Bewegung des Passempfängers in x-Richtung betrachtet. Dabei verzögert er mit der konstanten Beschleunigung $a_x(t_2 \le t \le t_3) = -a_m$.

f) Welche Position und Geschwindigkeit in x-Richtung besitzt der Passempfänger zum Zeitpunkt t_2?

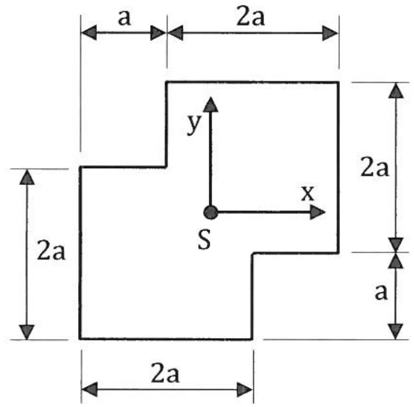
$r_x(t_2) =$ 0 , $v_x(t_2) =$ v_m

g) Bestimmen Sie die Position des Passempfängers für den Abschnitt III. Geben Sie dabei die Position in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v_x des Passempfängers an.

$$r_x(v_x) = \frac{v_m^2}{2a_m} - \frac{v_x^2}{2a_m}$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Die Trägheitseigenschaften des dargestellten Profilträgers sollen bestimmt werden. Der Träger besteht aus homogenem Material (Dichte ρ) und hat in z-Richtung die Länge L.



a) Bestimmen Sie die Masse des Körpers.

$m = 7 \rho L a^2$

b) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment des Körpers um den Schwerpunkt S für die Drehung um die z-Achse.

$J_{S_{zz}} = \frac{55}{6} \rho L a^4$

c) Bestimmen Sie das Massendeviationsmoment $J_{S_{xy}}$.

$J_{S_{xy}} = -2 \rho L a^4$

d) Sind die Achsen x und y Hauptträgheitsachsen?

☐ ja ☒ nein ☐ keine Angabe möglich

ENDE