20. Februar 2014

Bachelor-Prüfung in Technischer Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 8 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

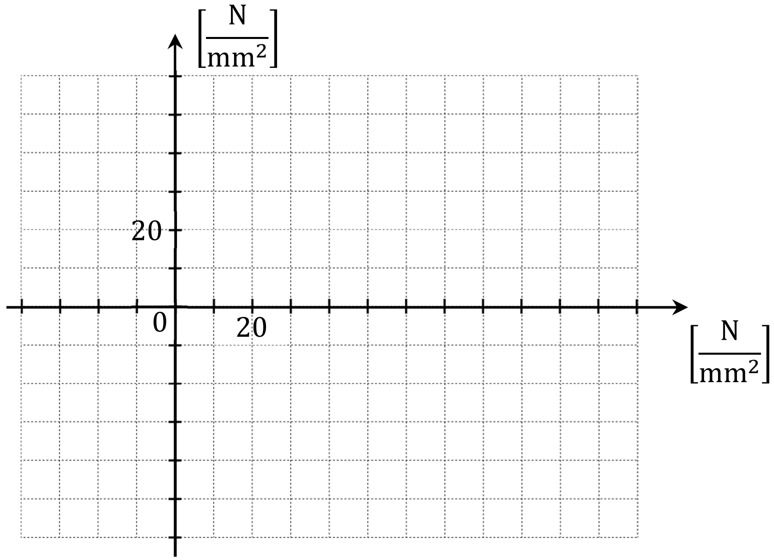
…………………………………………..
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Der Spannungszustand eines Bauteils soll untersucht werden. Die erste Hauptspannung im Punkt P beträgt $\sigma_1 = 110\ \mathrm{N/mm^2}$. Für einen Schnitt a − a sind die Normalspannung $\sigma_a = 20\ \mathrm{N/mm^2}$ sowie die Schubspannung $\tau_a = -30\ \mathrm{N/mm^2}$ bekannt.

a) Zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis für den Punkt P und kennzeichnen Sie den Schnitt a − a. Beschriften Sie außerdem die Achsen.



b) Wie groß ist die zweite Hauptspannung im Punkt P?

$\sigma_2 =$ _

c) Um welchen Winkel ist der Schnitt a − a gegenüber der ersten Hauptspannungsrichtung verdreht? Beachten Sie das Vorzeichen.

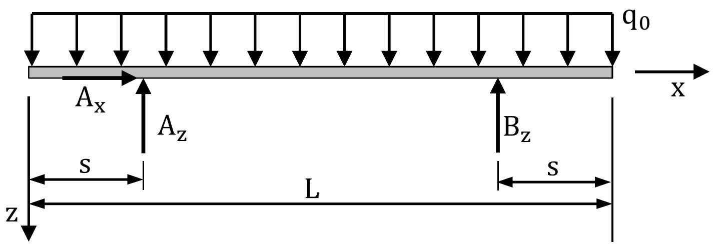
$\varphi =$ _

d) Welche Belastungsart liegt im Punkt P vor?

☐ einachsig ☐ zweiachsig ☐ keine Aussage möglich

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Ein Messgerät wird als Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge L) modelliert. Das Eigengewicht wird durch eine konstante Streckenlast q_0 berücksichtigt. Das Messgerät ist symmetrisch (Abstand s von den Balkenenden) in den Punkten A und B gelagert. Im Folgenden sollen die Auswirkungen des Eigengewichts auf die Biegelinie in Abhängigkeit der Lagerstellen untersucht werden. Das an den Lagern freigeschnittene System ist der Skizze zu entnehmen.



a) Berechnen Sie die aus der Streckenlast resultierende äquivalente Einzelkraft zur Ermittlung der Lagerkräfte.

$R =$ ______________________________

b) Berechnen Sie die Reaktionskräfte in den Lagern A und B.

$A_x =$ ______________________________

$A_z =$ ______________________________

$B_z =$ ______________________________

c) Wie lautet der Querkraft- und Momentenverlauf?

$Q(x) =$ ______________________________

$M(x) =$ ______________________________

Eine Form der optimalen Lagerung sind die sogenannten Airy-Punkte. Dabei wird der Balken so gelagert, dass die Biegelinie an den Balkenenden eine waagerechte Tangente aufweist.

d) Geben Sie die Ableitung des Biegelinienverlaufs mit noch unbestimmter Integrationskonstante C_1 an.

$w'(x) =$ ______________________________

____

e) Wie lauten die Randbedingungen, die sich aus der Lagerung in den Airy-Punkten ergeben?

______________, ______________,

______________, ______________

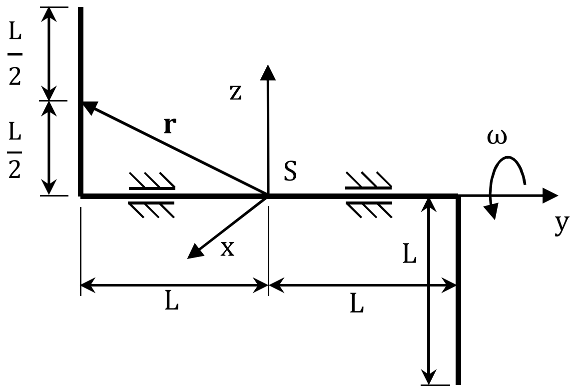
f) Bestimmen Sie die Integrationskonstante C_1 sowie die Position der Lagerung s bei einer Lagerung in den Airy-Punkten.

$C_1 =$ ______________________________

$s =$ ______________________________

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Der skizzierte ebene Starrkörper besteht aus mehreren aneinandergefügten, dünnen Stäben. Der Körper ist um die y-Achse drehbar gelagert. Die Masse pro Längeneinheit beträgt m/L. Der Ursprung des eingezeichneten Koordinatensystems $K\ (x, y, z)$ liegt im Schwerpunkt S des Körpers.



a) Geben Sie die Komponenten des eingezeichneten Ortsvektors $\mathbf{r}$ an.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die folgenden Trägheitsmomente jeweils bezüglich des Schwerpunkts S.

$I_{S,xy} =$ __________________________

$I_{S,yy} =$ __________________________

$I_{S,yz} =$ __________________________

c) Handelt es sich bei dem eingezeichneten Koordinatensystem K um ein Hauptachsensystem?

☐ ja ☐ nein ☐ nur die y-Achse ist Hauptachse

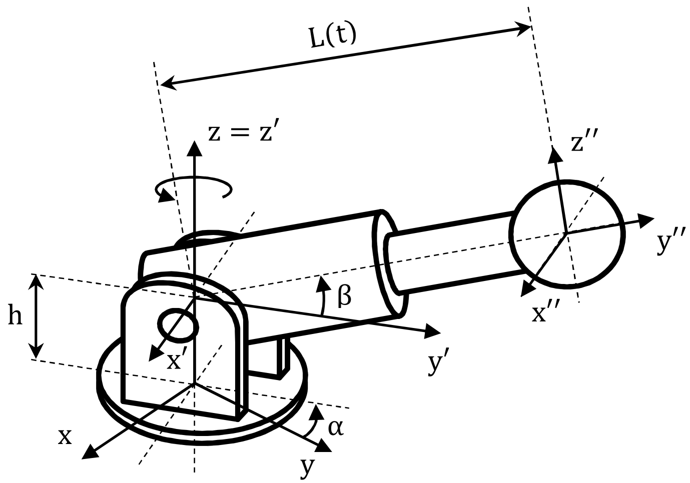
d) Der Körper rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \text{const.}$ in positiver Drehrichtung um die y-Achse. Bestimmen Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_K$ und das aus dieser Drehung resultierende Drehmoment $\mathbf{M}_{S,K}$ bezüglich des Schwerpunkts.

$$\boldsymbol{\omega}_K = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{S,K} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 (13 Punkte)

Ein Roboterarm ist auf einer um die z-Achse drehbaren Plattform montiert. Der Arm selbst kann um die x'-Achse geschwenkt und zusätzlich entlang der y''-Achse ausgefahren werden. Dementsprechend ist die Länge $L(t)$, die den Abstand der Ursprünge der beiden Koordinatensysteme K' und K'' voneinander angibt, zeitabhängig.



a) Wie lautet die Drehmatrix, die die Verdrehung von K'' gegenüber K' beschreibt?

$$\mathbf{C}_{K'K''} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die folgenden Drehgeschwindigkeitsvektoren.

$$\boldsymbol{\omega}_{KK',K'} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{KK'',K''} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

c) Stellen Sie die folgenden Ortsvektoren auf.

$$\mathbf{r}_{OO',K'} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{OO'',K''} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Für die folgende Betrachtung des Roboterarms sei der Arm um einen konstanten Winkel um die x'-Achse verdreht, d.h. es gilt $\beta = \text{const}$.

d) Bestimmen Sie die Absolutgeschwindigkeit des Ursprungs O'' in K''.

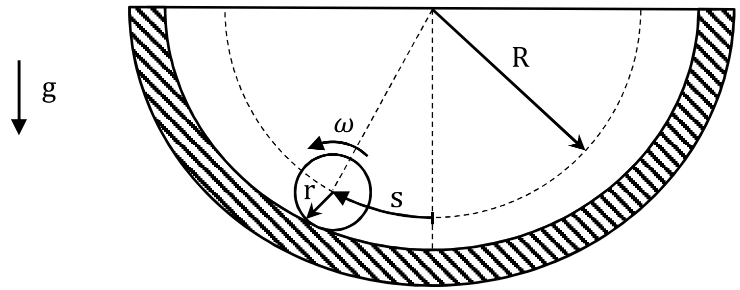
$$\mathbf{v}_{OO'',K''} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

e) Geben Sie die Beschleunigung des Ursprungs O'' in K'' an.

$$\mathbf{a}_{OO'',K''} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

In einer Schüssel mit kreisförmigem Querschnitt rollt eine homogene Kugel mit Masse m und Radius r ohne zu gleiten auf der Innenfläche ab. Der Schwerpunkt der Kugel bewegt sich dabei auf einer Kreisbahn mit Radius R. Die Koordinate s bezeichnet die Position des Schwerpunkts, gemessen als Bogenlänge ab der Mittellage, und wird als verallgemeinerte Koordinate verwendet. Die Erdbeschleunigung g wirkt senkrecht nach unten. Die Bewegung findet ausschließlich in der eingezeichneten Schnittebene statt.



a) Geben Sie die Rotationsgeschwindigkeit ω und Schwerpunktsgeschwindigkeit v in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate an.

$\omega =$ ____________________________

$v =$ ____________________________

b) Geben Sie die kinetische Energie der Kugel (Massenträgheitsmoment bezüglich Schwerpunkt $2/5\ m\,r^2$) in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate an.

$T =$ ____________________________

c) Geben Sie die potentielle Energie der Kugel in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate an.

$V =$ ________________________________

d) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit v_{max}, wenn die Kugel mit einer Anfangsauslenkung s_0 aus der Ruhe losgelassen wird ($|s_0| < \frac{\pi}{2}R$)?

$v_{max} =$ ________________________________

e) Geben Sie die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate an.

$L^* =$ ________________________________

f) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art die Bewegungsgleichung des Systems.

____

g) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung um $s^* = 0$.

____

h) Berechnen Sie die Eigenfrequenz ω_0 des linearisierten Systems.

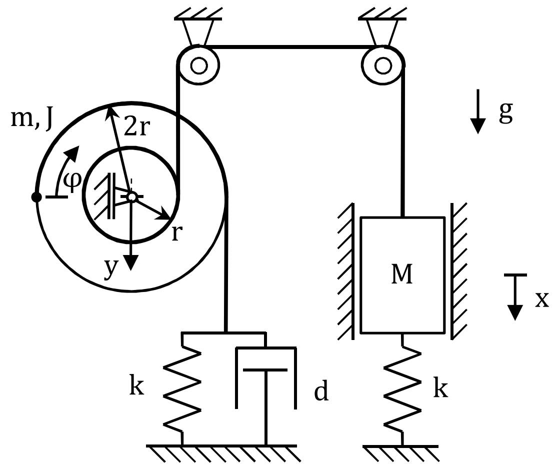
$\omega_0 =$ ____________________

i) Angenommen die Kugel werde als Punktmasse modelliert, d.h. die Rotation der Kugel werde vernachlässigt. Was gilt in diesem Fall für die Eigenfrequenz des linearisierten Systems?

☐ wird größer ☐ wird kleiner ☐ ändert sich nicht

Aufgabe 6 (23 Punkte)

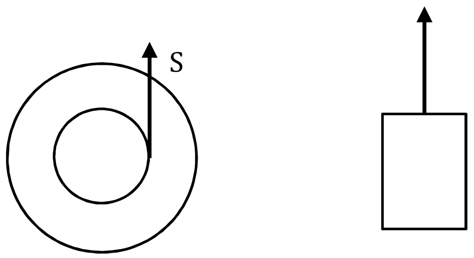
Ein ebenes Schwingungssystem soll untersucht werden. Eine homogene Stufenrolle (Masse m, Trägheitsmoment J bezüglich des Schwerpunkts) mit innerem Radius r und äußerem Radius $2r$ ist über zwei masselose, stets gespannte Seile mit einer gefederten Masse M sowie einer Feder und einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) verbunden. Die Federn haben jeweils die Federsteifigkeit k. Die Feder an der Stufenrolle sei für $y = \varphi = 0$ und die Feder an der Masse für $x = a$ entspannt. Die Erdbeschleunigung g wirkt nach unten. Die Umlenkrollen sind masselos und reibungsfrei gelagert.



a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das System?

$f =$ ________

b) Vervollständigen Sie die Freischnittskizze. Zeichnen Sie alle Kräfte und Momente ein und benennen Sie diese (Hinweis: S bezeichnet die Seilkraft am inneren Ring der Stufenrolle).



c) Bestimmen Sie die Feder- und Dämpferkräfte entsprechend der Freischnittskizze.

d) Geben Sie für die Stufenrolle den Drallsatz bezüglich deren Mittelpunkt und den Impulssatz in y-Richtung an.

e) Geben Sie für die Masse M den Impulssatz in x-Richtung an.

f) Bestimmen Sie die folgenden Zusammenhänge zwischen den angegebenen Koordinaten.

$x(y, \varphi) =$

$y(x, \varphi) =$

$\varphi(x, y) =$

g) Bestimmen Sie die Koordinaten y und φ in der Gleichgewichtslage des Systems.

$y =$

$\varphi =$

h) Wie groß ist die Seilkraft im Gleichgewichtszustand?

$S =$

Hinweis: Die folgenden Teilaufgaben können ohne die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen d) bis h) gelöst werden.

i) Wählen Sie zunächst geeignete verallgemeinerte Koordinaten.

☐ $q_1 = r\,\varphi$, $q_2 = y$ ☐ $q_1 = \varphi$ ☐ $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \varphi$

j) Geben Sie die virtuelle Arbeit der nicht-konservativen Kräfte in den gewählten verallgemeinerten Koordinaten an.

$\delta \widetilde{W}_a^e =$

_ _

_ _

k) Welche verallgemeinerten nicht-konservativen Kräfte $\widetilde{Q}_i \quad (i = 1, \ldots, f)$ ergeben sich daraus?

_ _

_ _

ENDE