28. August 2012

Bachelor-Prüfung in Technischer Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
MUSTERLÖSUNG	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

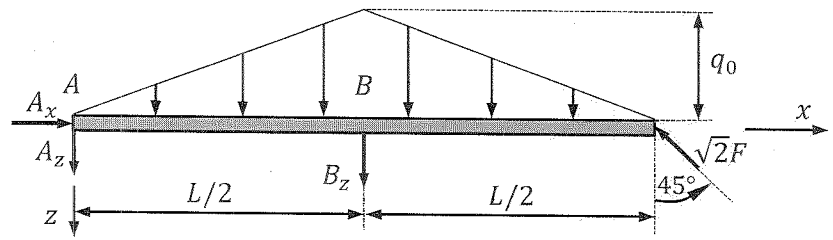
1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung erst beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

CG , PK
(Unterschrift)

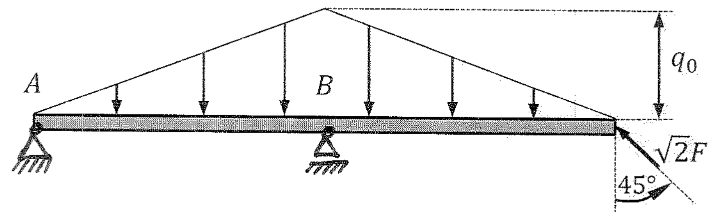
Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Ein Balken (Biegesteifigkeit EI) ist an den Punkten A und B bestimmt gelagert. Der Balken ist durch eine dreiecksförmige Streckenlast und eine Einzelkraft $\sqrt{2}F$ belastet.



a) Skizzieren Sie die zugehörigen Lager an den Punkten A und B.



b) Geben Sie den Verlauf der Streckenlast an.

$$q(x) = \frac{2q_0}{L}x - \frac{4q_0}{L}\left\{x - \frac{L}{2}\right\}^1$$

c) Berechnen Sie die aus der Streckenlast resultierende Ersatzkraft.

$$F_S = \frac{1}{2}q_0 L$$

d) Berechnen Sie die Lagerkräfte in den Lagern A und B.

$$A_x = F$$

$A_z = -F$

$B_z = 2F - \frac{1}{2} q_0 L$

e) Wie lautet der Querkraft- und Momentenverlauf?

$$Q(x) = -\frac{q_0}{L} x^2 + \frac{2 q_0}{L} \left\{x - \frac{L}{2}\right\}^2 + F - \left(2F - \frac{1}{2} q_0 L\right) \left\{x - \frac{L}{2}\right\}^0$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{3L} x^3 + \frac{2 q_0}{3L} \left\{x - \frac{L}{2}\right\}^3 + F x - \left(2F - \frac{1}{2} q_0 L\right) \left\{x - \frac{L}{2}\right\}^1$$

f) Geben Sie den Biegelinienverlauf mit noch unbestimmten Integrationskonstanten an.

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{q_0}{60L} x^5 - \frac{q_0}{30L} \left\{x - \frac{L}{2}\right\}^5 - \frac{F}{6} x^3 + \left(\frac{F}{3} - \frac{q_0 L}{12}\right) \left\{x - \frac{L}{2}\right\}^3 \right) + C_1 x + C_2$$

Für die folgenden Aufgabenteile wird $F = 0$ gesetzt.

g) Geben Sie die Bedingungen für die Bestimmung der Integrationskonstanten an.

$w(0) = 0$, $w\left(\frac{L}{2}\right) = 0$

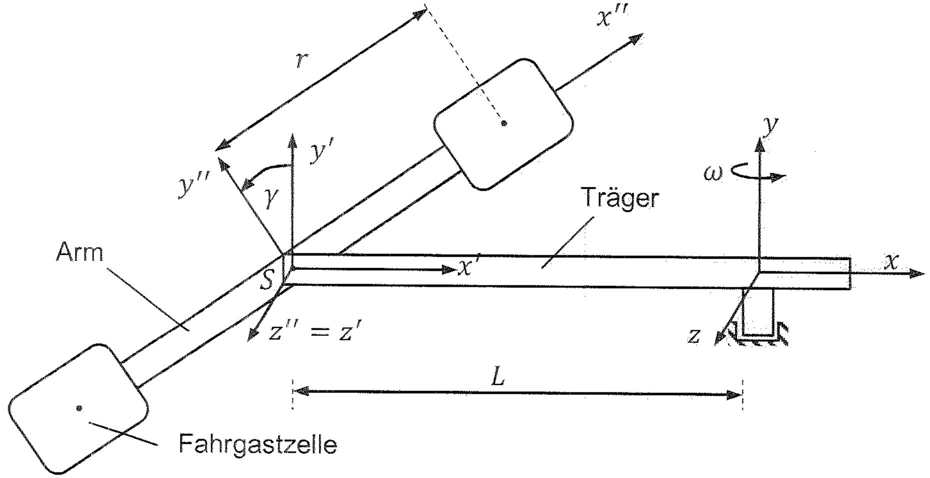
h) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten.

$C_2 = 0$, $C_1 = \frac{-q_0 L^3}{960 EI}$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Die Trägheitseigenschaften eines Karussells auf dem Cannstatter Volksfest sollen untersucht werden. Wie in der Skizze dargestellt, rotiert dabei ein Träger um die y-Achse des raumfesten Koordinatensystems K. Im Abstand L ist am Träger ein Arm der Länge $2r$ angebracht, an dessen Enden sich zwei Fahrgastzellen befinden. Das System aus Fahrgastzellen und Arm lässt sich um die z'- Achse des trägerfesten Koordinatensystems K' um den Winkel γ drehen.

Die Fahrgastzellen können als Punktmassen (jeweils Masse M) angenommen werden. Der Arm wird vereinfacht als dünner Balken (Trägheitsmomente $I_{y''y''} = I_{z''z''} = mr^2/3$, $I_{x''x''} = 0$) modelliert. Der Schwerpunkt S des Arms befindet sich im Ursprung von K''.



a) Geben Sie den Trägheitstensor von Fahrgastzellen und Arm bezüglich des Schwerpunkts S an. Stellen Sie den Trägheitstensor im Koordinatensystem K'' dar.

$$I_{SK''} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m r^2 + 2 M r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} m r^2 + 2 M r^2 \end{bmatrix}$$

b) Stellen Sie den Trägheitstensor im trägerfesten Koordinatensystem K' dar. Die Verdrehung von K'' zu K' ist gegeben durch die Drehmatrix

$$C_{K'K''} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$I_{SK'} = \begin{bmatrix} \sin^2\gamma\, r^2\left(\frac{m}{3}+2M\right) & -\sin\gamma\cos\gamma\, r^2\left(\frac{m}{3}+2M\right) & 0 \\ -\sin\gamma\cos\gamma\, r^2\left(\frac{m}{3}+2M\right) & \cos^2\gamma\, r^2\left(\frac{m}{3}+2M\right) & 0 \\ 0 & 0 & r^2\left(\frac{m}{3}+2M\right) \end{bmatrix}$$

Der Träger wird nun für $\gamma = 0°$ auf die Drehgeschwindigkeit ω_1 beschleunigt und der Antrieb anschließend in den Leerlauf geschaltet. Jetzt wird der Arm auf $\gamma = 45°$ gedreht.

c) Was gilt für die Gesamtenergie des Systems?

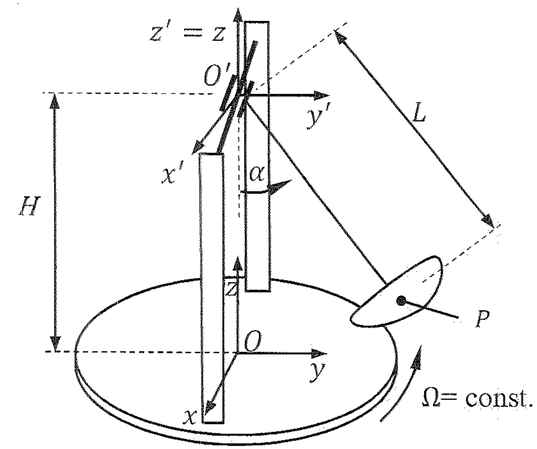
☒ wird größer ☐ wird kleiner ☐ bleibt gleich ☐ keine Angabe möglich

d) Was gilt für die sich einstellende Rotationsgeschindigkeit ω_2?

☒ $\omega_2 > \omega_1$ ☐ $\omega_2 < \omega_1$ ☐ $\omega_2 = \omega_1$ ☐ $\omega_2 = 0$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Eine Schaukel steht auf einer Drehscheibe, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die z-Achse des raumfesten Koordinatensystems K dreht. Das mitrotierende System K' hat seinen Ursprung O' im Drehlager der Schaukel. Die Auslenkung der Schaukel wird mit dem Winkel $\alpha(t)$ in der y', z'-Ebene beschrieben, die z- und z'- Achsen fallen zusammen. Für $t = 0$ sind K und K' gleich orientiert.



a) Geben Sie den Vektor der Winkelgeschwindigkeit und die Drehmatrix zwischen den Koordinatensystemen K und K' an.

$$\omega_{KK',K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad C_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0 \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Stellen Sie den Ortsvektor von O' zum Punkt P der Schaukel auf und stellen Sie ihn im System K' dar.

$$r_{O'P,K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ L\sin\alpha \\ -L\cos\alpha \end{bmatrix}$$

c) Stellen Sie den Ortsvektor von O zum Punkt P der Schaukel auf und stellen Sie ihn im System K dar.

$$r_{OP,K} = \begin{bmatrix} -L\sin\alpha\sin\Omega t \\ L\sin\alpha\cos\Omega t \\ H - L\cos\alpha \end{bmatrix}$$

d) Berechnen Sie die relative Geschwindigkeit von P zu K', dargestellt in K'.

$$v_{O'P,K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ L\dot\alpha\cos\alpha \\ L\dot\alpha\sin\alpha \end{bmatrix}$$

e) Wie lautet die allgemeine Berechnungsvorschrift für die absolute Beschleunigung des Punktes P, dargestellt im System K'?

$$a_{OP,K'} = \underline{a}_{OO',K'} + \frac{d}{dt}\underline{\omega}_{KK',K'} \times \underline{r}_{O'P,K'} + \underline{\omega}_{KK',K'} \times (\underline{\omega}_{KK',K'} \times \underline{r}_{O'P,K'})$$
$$+ 2\,\underline{\omega}_{KK',K'} \times \underline{v}_{O'P,K'} + \underline{a}_{O'P,K'}$$

f) Geben Sie die Coriolisbeschleunigung von Punkt P, dargestellt in K' und K, an.

$$a_{C,K'} = \begin{bmatrix} -2\Omega L\dot\alpha\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{C,K} = \begin{bmatrix} -2\Omega L\dot\alpha\cos\alpha\cos\Omega t \\ -2\Omega L\dot\alpha\cos\alpha\sin\Omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

g) Stellen Sie die absolute Beschleunigung von P, dargestellt in K', auf.

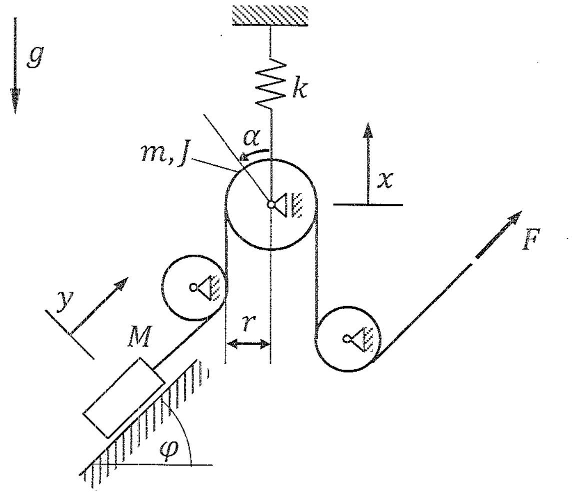
$$a_{OP,K'} = \begin{bmatrix} -2\Omega L\dot\alpha\cos\alpha \\ -\Omega^2 L\sin\alpha - L\dot\alpha^2\sin\alpha + L\ddot\alpha\cos\alpha \\ L\dot\alpha^2\cos\alpha + L\ddot\alpha\sin\alpha \end{bmatrix}$$

h) Geben Sie die Bedingung an, unter der die Coriolisbeschleunigung verschwindet.

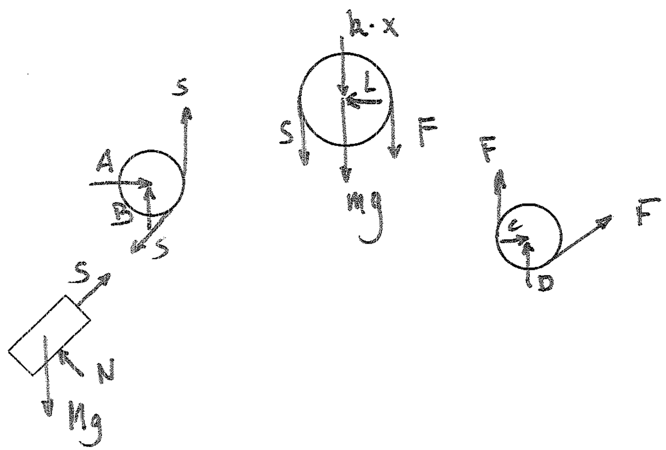
$\dot\alpha = 0$ oder $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Über einen Seilmechanismus wird eine Kiste (Masse M) durch die Zugkraft F eine schiefe Ebene hinaufgezogen. Zwischen Ebene und Kiste tritt keine Reibung auf. Der Mechanismus besteht aus zwei masselosen Umlenkrollen und einer Walze (Masse m, Radius r, Trägheit J). Die Walze ist mit einer Feder (Steifigkeit $k > 0$) an der Decke gefesselt und ist für $x = 0$ ungespannt. Das Seil sei während der gesamten Bewegung immer gespannt und schlupffrei um Walze und Umlenkrollen geführt.



a) Ergänzen Sie die Freischnittskizze.



b) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das System?

$f = 2$

c) Stellen Sie die Impulssätze für die Kiste und die Walze auf.

$M\ddot{y} = S - Mg\sin\varphi$

$m\ddot{x} = -S - F - kx - mg$

$0 = Mg\cos\varphi - N$

$0 = L$

d) Formulieren Sie den Drallsatz für die Walze.

$J\ddot{\alpha} = Sr - Fr$

e) Drücken Sie die Größe $\ddot{\alpha}$ in Abhängigkeit von $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ aus.

$\ddot{\alpha} = \dfrac{\ddot{x} - \ddot{y}}{r}$

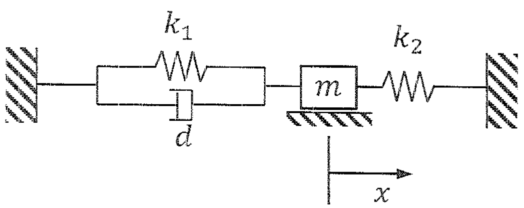
f) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen.

$M\ddot{y} = J\dfrac{\ddot{x} - \ddot{y}}{r^2} + F - Mg\sin\varphi$

$m\ddot{x} = -J\dfrac{\ddot{x} - \ddot{y}}{r^2} - 2F - kx - mg$

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Eine Masse m bewegt sich horizontal in x-Richtung. Sie ist durch zwei Federn (Steifigkeiten $k_1, k_2 > 0$) und ein Dämpferelement (Dämpfungskonstante $d > 0$) gefesselt. Für $x = 0$ sind beide Federn ungespannt.



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Systems?

$m\ddot{x} + d\dot{x} + (k_1+k_2)\,x = 0$

b) Die Masse wird aus einer Lage $x \neq 0$ losgelassen. Kategorisieren Sie die entstehende Schwingung.

☒ frei ☐ ungedämpft ☒ gedämpft

☒ linear ☐ erzwungen ☐ nichtlinear

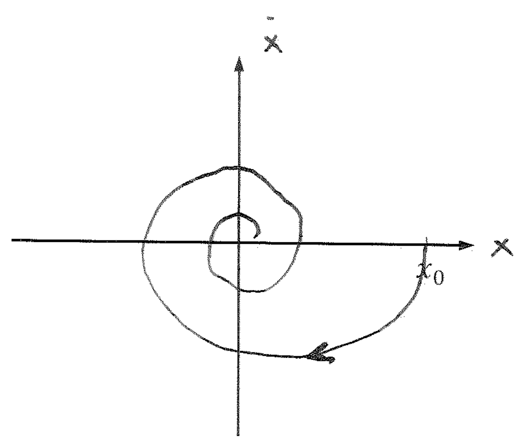
c) Bestimmen Sie das Lehrsche Dämpfungsmaß.

$D = \dfrac{d}{2\sqrt{m(k_1+k_2)}}$

d) Was muss für d gelten, damit der aperiodische Grenzfall auftritt?

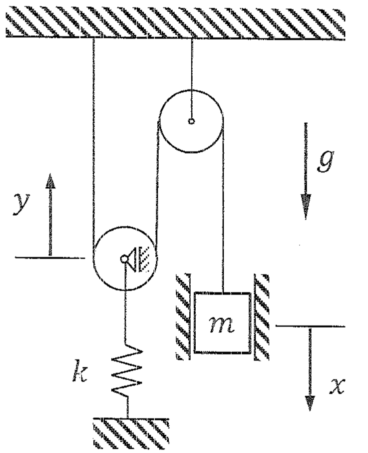
$d = 2\sqrt{m(k_1+k_2)}$

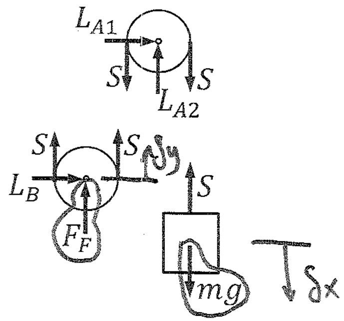
e) Die Masse wird mit der Anfangsauslenkung x_0 aus der Ruhe losgelassen. Zeichnen Sie qualitativ das Phasendiagramm für eine schwach gedämpfte Schwingung ein. Beschriften Sie die Achsen und zeichnen Sie den Umlaufsinn ein.



Aufgabe 6 (12 Punkte)

Eine Masse m ist über zwei masselose Umlenkrollen durch ein Seil mit der Decke verbunden. Eine der Rollen ist durch eine Feder (Steifigkeit $k > 0$) am Boden gefesselt. Das Seil ist als immer gespannt anzunehmen, und für $x = 0$ ist die Feder ungespannt. Das System soll mit dem Prinzip von d'Alembert untersucht werden.





a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das System?

$f = 1$

b) Markieren Sie in obiger Freischnittskizze die eingeprägten Kräfte und tragen Sie die virtuellen Verschiebungen ein.

c) Wie groß ist die Federkraft F_F in Abhängigkeit der Auslenkung y?

$F_F = -k \cdot y$

d) Stellen Sie die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte auf.

$W = mg\,\delta x - ky\,\delta y$

e) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen x und y.

$x = 2y$

f) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den eingezeichneten virtuellen Verschiebungen.

$\delta x = 2\,\delta y$

g) Was gilt für die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte?

$W_r = 0$

h) Formulieren Sie für das System das Prinzip von d'Alembert in der Fassung von Lagrange.

$(mg - m\ddot{x})\,\delta x - ky\,\delta y = 0$

i) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems.

$m\ddot{x} + \frac{k}{4}x = mg$

j) Für welches x befindet sich das System im Gleichgewicht?

$x = \frac{4mg}{k}$

ENDE