Institut für Technische und Num. Mechanik
Profs. P. Eberhard, R. Seifried

21. Februar 2012

Bachelor-Prüfung in Technischer Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
FISCHER, ACHIM	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

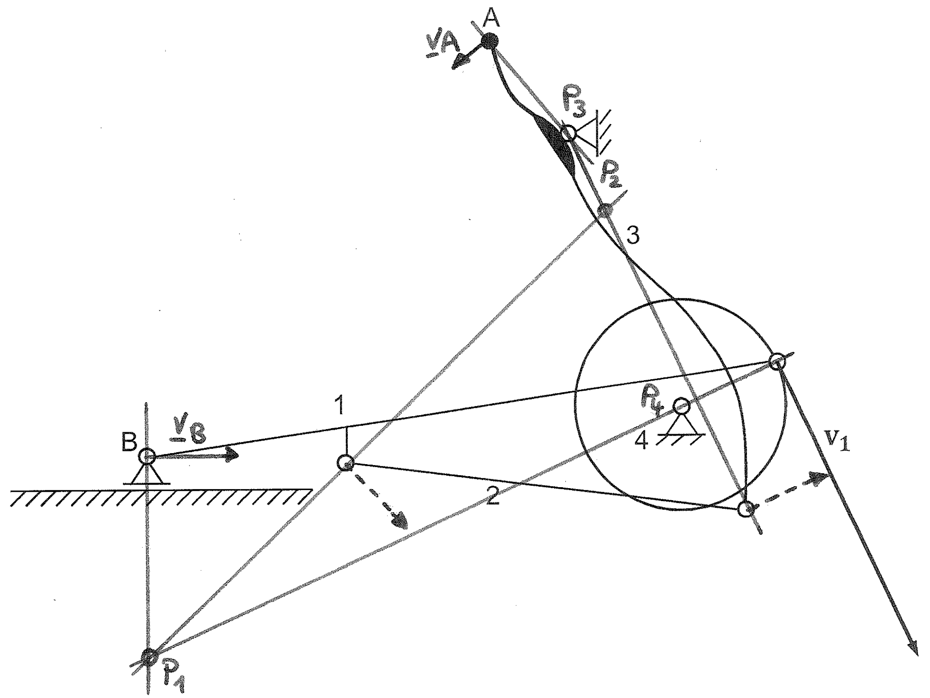
1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$ 73	

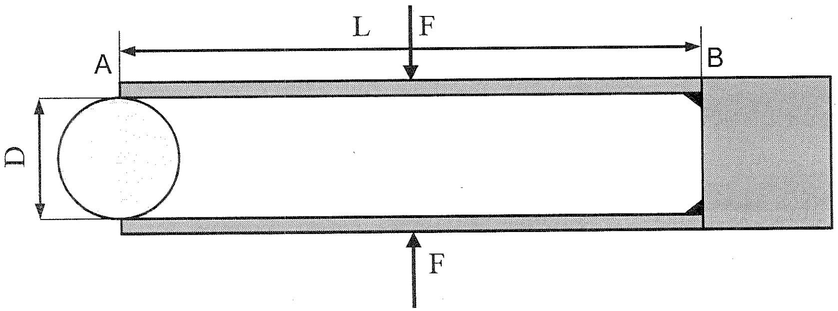
Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein Ellipsentrainer soll kinematisch untersucht werden. Konstruieren Sie die Momentanpole P_i aller vier beweglichen Körper und zeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v_A}$ und $\mathbf{v_B}$ in den Punkten A und B qualitativ (Richtung und Richtungssinn) ein.

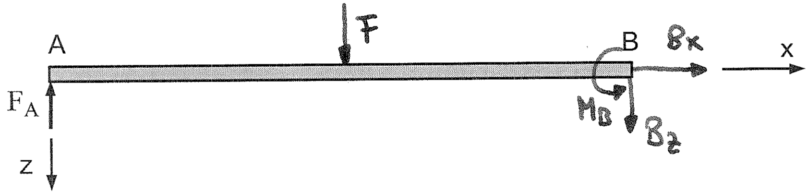


Aufgabe 2 (15 Punkte)

Die Durchbiegung einer Grillzange beim Festhalten einer Wurst soll untersucht werden. Das Problem ist symmetrisch und wird durch zwei fest eingespannte Balken (Biegesteifigkeit EI) modelliert. Die Wurst wird als elastisch angenommen. Die Handkraft F greift mittig an den Balken an.



a) Vervollständigen Sie die Freischnittskizze des oberen Balkens, tragen Sie alle angreifenden Kräfte und Momente ein und benennen Sie diese.



b) Geben Sie den Momentenverlauf in Abhängigkeit der unbekannten Kraft F_A am linken Balkenende an.

$$M(x) = F_A x - F\{x-\tfrac{L}{2}\} \left(+ L\left(\tfrac{1}{2}F - F_A\right)\{x-L\}^0 \right)$$

c) Geben Sie die Biegelinie in Abhängigkeit der unbekannten Kraft F_A am linken Balkenende an.

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{6}F_A x^3 + \frac{1}{6}F\{x-\tfrac{L}{2}\}^3\right] + C_1 x + C_2$$

d) Geben Sie die Randbedingungen am rechten Balkenende an.

$w'(L) = 0$ $\qquad$ $w(L) = 0$

e) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten.

$C_1 = \frac{L^2}{2EI}\left(F_A - \frac{F}{4}\right)$ $\qquad$ $C_2 = \frac{L^3}{3EI}\left(\frac{5}{16}F - F_A\right)$

f) Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Durchbiegung $w(0)$ und der Durchmesseränderung ΔD der Wurst an.

$\Delta D = -2\,w(0)$

g) Die elastische Verformung der Wurst zwischen den Zangenteilen wird als lineare Feder (Steifigkeit k) mit der Beziehung $F_A = -k\,\Delta D$ modelliert. Bestimmen Sie die Kraft F_A am linken Balkenende.

$$F_A = \frac{5kL^3}{8(3EI + 2kL^3)} F$$

h) Geben Sie die Grenzwerte für die Lagerkraft am linken Balkenende an.

$\lim_{k\to\infty} F_A = \frac{5}{16} F$ $\qquad$ $\lim_{k\to 0} F_A = 0$

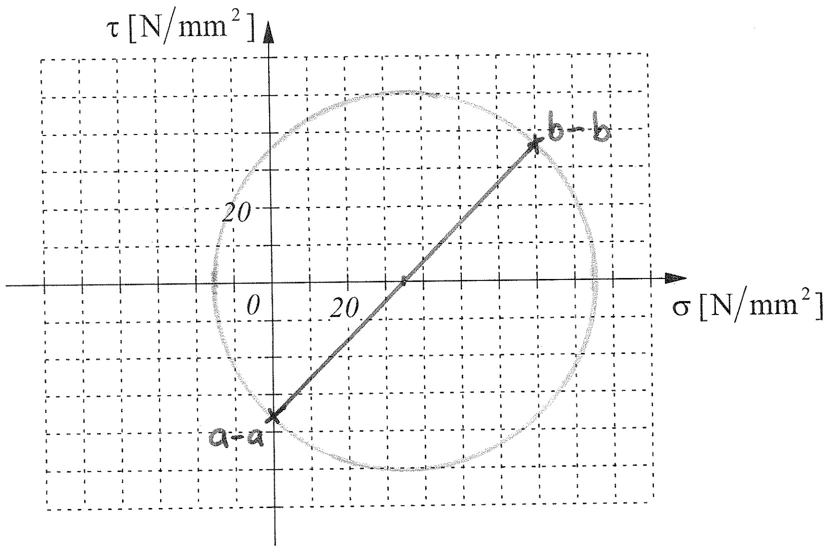
Aufgabe 3 (6 Punkte)

In einem Bauteil ist der Betrag der maximal auftretenden Schubspannungen im Punkt P $|\tau_{max}| = 50\,N/mm^2$. Weiterhin ist die Normalspannung in P für einen Schnitt a-a, der gegenüber der Schnittrichtung der ersten Hauptspannung um -67.5° verdreht ist, gleich Null.

a) Wie groß ist die Differenz der Hauptspannungen?

$\sigma_1 - \sigma_2 =$ 100 N/mm^2

b) Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis und kennzeichnen Sie den Schnitt a-a und den Schnitt b-b senkrecht zu a-a.



c) Wie groß sind die Hauptspannungen?

$\sigma_1 =$ 85 N/mm^2, $\sigma_2 =$ −15 N/mm^2

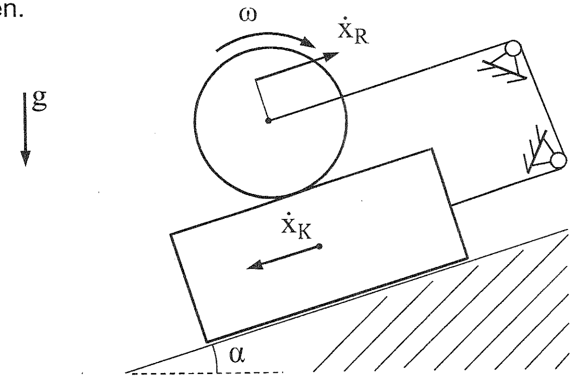
d) Wie sieht der Mohrsche Spannungskreis für $\sigma_1 = \sigma_2$ aus?

es ist ein Punkt

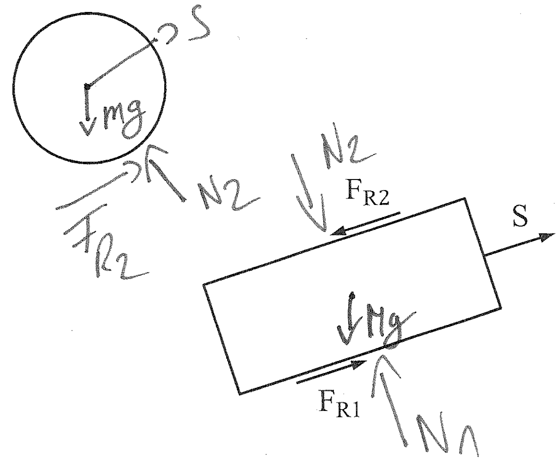
Aufgabe 4 (15 Punkte)

Ein Vollzylinder (Masse m, Radius R) rollt ohne zu gleiten auf einer Kiste (Masse M). Die Kiste rutscht auf einer rauen schiefen Ebene (Reibungskoeffizient μ, Neigungswinkel α) nach unten. Die Erdbeschleunigung g wirkt wie eingezeichnet.

Im Folgenden soll das Bewegungsverhalten des Systems untersucht werden. Die Massen des Seils und der Umlenkrollen können hierbei vernachlässigt werden.



a) Ergänzen Sie den folgenden Freischnitt.



b) Klassifizieren Sie die folgenden Kräfte.

	eingeprägte Kraft	Reaktionskraft	keine Aussage möglich
F_{R1}	☒	☐	☐
F_{R2}	☐	☒	☐

c) Geben Sie die Impulssätze für Rolle und Kiste an.

$N_2 - mg\cos\alpha = 0$

$N_1 - N_2 - Mg\cos\alpha = 0$

$m\ddot{x}_R = S + F_{R2} - mg\sin\alpha$

$M\ddot{x}_K = Mg\sin\alpha - F_{R1} + F_{R2} - S$

d) Geben Sie den Drallsatz für die Rolle an.

$\frac{1}{2} mR^2 \dot{\omega} = -RF_{R2}$

e) Geben Sie die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ und die Schwerpunktsbeschleunigung $\ddot{x}_R$ der Rolle in Abhängigkeit der Kistenbeschleunigung $\ddot{x}_K$ an.

$\dot{\omega} = \frac{2\ddot{x}_K}{R}$, $\ddot{x}_R = \ddot{x}_K$

f) Wie groß ist die Normalkraft zwischen Rolle und Kiste?

$N_2 = mg\cos\alpha$

g) Wie groß ist die Normalkraft zwischen Kiste und Ebene?

$N_1 = (M+m)g\cos\alpha$

h) Welchen Betrag hat die Kraft F_{R1} ?

$F_{R1} = \mu(M+m)g\cos\alpha$

i) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Systems?

$\ddot{x}_K = \frac{(M-m)g\sin\alpha - \mu(M+m)g\cos\alpha}{M+3m}$

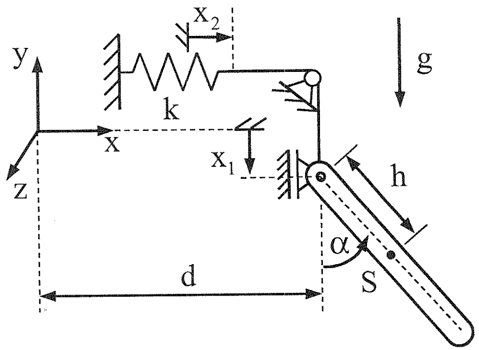
Im Folgenden sei die Reibung zwischen Kiste und Ebene vernachlässigbar klein ($\mu = 0$).

j) Was müsste für die Masse M der Kiste gelten, damit sich diese aus der Ruhe nach oben bewegen würde?

$M < m$

Aufgabe 5 (18 Punkte)

Ein ebenes Schwingungssystem soll mit Hilfe der Methoden der analytischen Mechanik untersucht werden. Eine Pendelstange (Masse m, Trägheitsmoment J bezüglich des Schwerpunkts S, Schwerpunktsabstand h) ist über ein masseloses, stets gespanntes Seil mit einer Feder verbunden. Die Feder (Federsteifigkeit k) sei für $x_2 = x_1 = 0$ entspannt. Die Erdbeschleunigung g wirkt in Richtung der negativen y-Achse.



a) Welche der nachfolgenden verallgemeinerten Koordinaten sind geeignet um das System zu beschreiben?

☐ $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$

☒ $q_1 = \alpha$, $q_2 = x_1$

☐ $q_1 = \alpha$, $q_2 = h$

b) Wie lautet der Ortsvektor $\mathbf{r}$ zum Schwerpunkt der Pendelstange in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten q_1 und q_2?

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} d + h\sin q_1 \\ -q_2 - h\cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ des Schwerpunkts und die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ des Körpers an.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} h\dot{q}_1 \cos q_1 \\ -\dot{q}_2 + h\dot{q}_1 \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

d) Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems.

$$T = \frac{1}{2} m \left(h^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_2 \dot{q}_1 h \sin q_1\right) + \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2$$

e) Berechnen Sie die potentielle Energie des Systems.

$$V = \frac{1}{2} k q_2^2 - mg\left(h\cos q_1 + q_2\right)$$

f) Geben Sie die Lagrange-Funktion L^* an.

$$L^* = \left(h^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_2 \dot{q}_1 h \sin q_1\right) \cdot \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} k q_2^2 + mg\left(h \cos q_1 + q_2\right)$$

g) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion.

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_1} = hm\left(-g \sin q_1 - \dot{q}_2 \dot{q}_1 \cos q_1\right)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_2} = -k q_2 + mg$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_1} = hm\left(h \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \sin q_1\right) + J \dot{q}_1$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_2} = m \dot{q}_2 - h m \dot{q}_1 \sin q_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_1}\right) = J \ddot{q}_1 + hm\left(h \ddot{q}_1 - \dot{q}_2 \dot{q}_1 \cos q_1 - \ddot{q}_2 \sin q_1\right)$$

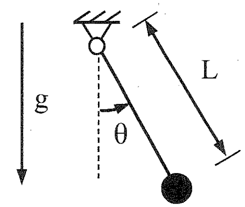
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_2}\right) = m \ddot{q}_2 - m h \ddot{q}_1 \sin q_1 - m h \dot{q}_1^2 \cos q_1$$

h) Wie berechnen sich die Bewegungsgleichungen des Systems aus den Ergebnissen von Aufgabenteil g?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_2} = 0$$

Aufgabe 6 (9 Punkte)



Ein mathematisches Pendel ist gegeben. An einer masselosen Pendelstange (Länge L) ist eine Punktmasse (Masse m) angebracht. Der Ausschlag des Pendels wird durch den Winkel θ beschrieben. Die Erdbeschleunigung g wirkt wie eingezeichnet. Das Pendel wird aus der Ruhe mit Anfangsauslenkung $\theta(0)=\theta_0$ losgelassen.

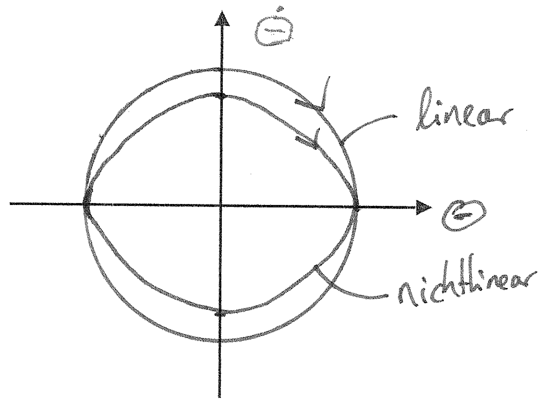
a) Wie lautet die nichtlineare Schwingungsdifferentialgleichung?

- ☐ $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\cos(\theta) = 0$
- ☒ $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$
- ☐ $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$
- ☐ $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\dot{\theta}\cos(\theta) = 0$
- ☐ $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta\sin(\theta) = 0$
- ☐ $\ddot{\theta} + v^2\theta = 0$

b) Geben Sie die um $\theta=0$ linearisierte Bewegungsgleichung an.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

c) Skizzieren Sie für gleiche Anfangswinkel qualitativ die Phasendiagramme für die nichtlineare Bewegungsgleichung (Teilaufgabe a) und die linearisierte Bewegungsgleichung (Teilaufgabe b). Beschriften Sie die Achsen und Kurven eindeutig. Zeichnen Sie den Umlaufsinn ein.



d) Bewerten Sie die folgenden Aussagen als richtig oder falsch.

richtig	falsch	
☐	☒	Die Schwingungsdauer des nichtlinearen Pendels ist kleiner als die des linearisierten Systems.
☒	☐	Für kleine Anfangswinkel sind die Unterschiede zwischen linearisiertem und nichtlinearem Pendel vernachlässigbar.
☐	☒	Das linearisierte Pendel hat konjugiert komplexe Eigenwerte mit Realteil größer 0.
☒	☐	Die allgemeine Lösung für das linearisierte Pendel hat die Form $\theta(t) = C\cos(\omega t - \varphi)$.
☐	☒	Die allgemeine Lösung für das nichtlineare Pendel hat die Form $\theta(t) = C\cos(\omega t - \varphi)$.
☒	☐	Die Schwingungsfrequenz des mathematischen Pendels geht gegen 0, wenn θ_0 gegen $180°$ geht.
☒	☐	Sowohl im nichtlinearen als auch im linearisierten Schwingungssystem tritt ein periodischer Wechsel zwischen kinetischer und potentieller Energie auf.
☐	☒	Für $\theta=0$ ist die potentielle Energie stets 0.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Geben Sie die Drehmatrizen für eine positive und eine negative Drehung mit dem Winkel α um die y-Achse an.

$$\mathbf{C}_{KK',pos} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{KK',neg} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ENDE