Technische Mechanik III

Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. P. Eberhard
Prof. Dr.-Ing. M. Hanss
Prof. Dr.-Ing. J. Fehr

Vorlesung: Die Vorlesung wird für die Studierenden der Bachelorstudiengänge Maschinenbau (mach), Mechatronik (mecha), Technologiemanagement (tema), Technische Kybernetik (kyb), Fahrzeugtechnik (ft), Chemie- und Bioingenieurwesen (cbiw), Mathematik und Informatik gehalten.

Übungen: Die Vorlesung wird durch Vortragsübungen ergänzt, die unmittelbar auf den Vorlesungsstoff abgestimmt sind. Zusätzlich findet ein Seminarbetrieb statt. Dort lösen die Studierenden unter individueller Anleitung selbstständig Aufgaben.

Sprechstunden: Zur Beratung der Studierenden finden im Sprechstundenbereich, vor Zimmer 4.155 des Instituts, Dienstag und Donnerstag von 13.00 bis 14.00 Uhr Sprechstunden statt. Fragen, die in den Vorlesungen und Übungen offengeblieben sind, können dort besprochen werden. In zeitlichem Zusammenhang mit der Modulprüfung werden in der vorlesungsfreien Zeit Prüfungssprechstunden angeboten, die auf der Webseite bekanntgeben werden. Darüber hinaus werden fachliche Auskünfte am Institut durch Herrn Mark Kurcsics, M.Sc. (Raum 4.114) erteilt.

Ort/Zeit:

Vorlesungen und Vortragsübungen		
Montag 11.30 – 13.00 Uhr, V 53.01 Dienstag 8.00 – 9.30 Uhr, V 53.01	alle Studiengänge	Vorlesung: Prof. Hanss Übung: Mark Kurcsics

Seminaristische Übungen (voraussichtlich ab KW 44)		
	~~Freitag 11.30 – 13.00 Uhr, M 2.02~~	
	~~Freitag 11.30 – 13.00 Uhr, V 7.31~~	
G02	Freitag 11.30 – 13.00 Uhr, M 17.01 (nur am 10.11.23, 02.02.24 zusätzlich zu Seminar G02)	mach, tema, ft
G04	Freitag 11.30 – 13.00 Uhr, V 9.01	mach, tema, ft
G05	Freitag 11.30 – 13.00 Uhr, V 57.03	mecha, kyb, cbiw

Hinweise

Institut: Die Räume des Instituts für Technische und Numerische Mechanik befinden sich im Ingenieurwissenschaftlichen Zentrum (IWZ), Pfaffenwaldring 9, 4. + 3. Stock.

www: `https://www.itm.uni-stuttgart.de`

Unterlagen: Zur Kennzeichnung der vom Institut herausgegebenen schriftlichen Unterlagen werden folgende Kennbuchstaben − gefolgt von der laufenden Nummer − verwendet:

M … Merkblätter zur Vorlesung
A … Arbeitsblätter
Ü … Übungsaufgaben
P … Prüfungen
L … Lösungen

Merkblätter: Die Merkblätter sind im Internet auf den Institutsseiten erhältlich.

Aufgaben: In den Vortragsübungen werden Aufgaben aus einer Aufgabensammlung (Ü) vorgerechnet. Auch im Seminar werden Aufgaben aus dieser Aufgabensammlung sowie weitere Arbeitsblätter (A) behandelt. Die Aufgabensammlung (Ü) und Aufgabenblätter (A) sind im Internet auf den Institutsseiten erhältlich.

Unterlagen im Internet: Organisatorische Hinweise sowie aktuelle Unterlagen zur TM III finden Sie auch im Internet unter `https://www.itm.uni-stuttgart.de/lehre/lehrveranstaltungen/technische_mechanik_III/`

Prüfungsvorleistungen/Scheine: Sind nicht erforderlich.

Prüfung: Für das Modul TM II + TM III findet eine gemeinsame Prüfung statt. Der Termin der Prüfung im Frühjahr 2024 steht noch nicht fest und ist im Laufe des Wintersemesters 2023/24 beim Prüfungsamt zu erfahren.

Prüfungsanmeldung: Die Anmeldung erfolgt immer über das Prüfungsamt.

Hilfsmittel: In der Prüfung sind als Hilfsmittel ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.

Technische Mechanik III

Literatur

Gross, D; Hauger, W.; Schröder, J.; Wall, W.A.: Technische Mechanik. Band 1/2/3. Berlin: Springer, 2019/2017/2019. (€ 24,99/29,99/29,99)

Gross, D.; Hauger, W.; Wriggers, P.: Technische Mechanik. Band 4. Berlin: Springer, 2018. (€ 37,99)

Hauger, W.; Krempaszky, C.; Wall, W.; Werner, E.: Aufgaben zur Technischen Mechanik 1-3. Berlin: Springer, 2017. (€ 29,99)

Gross, D.; Ehlers, W.; Wriggers, P.; Schröder, J.; Müller, R.: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik. Band 1/2. Berlin: Springer, 2016/2017. (€ 22,99/27,99)

Hagedorn, P.; Wallaschek, J.: Technische Mechanik. Band 1/2/3. Frankfurt: Harri Deutsch, 2018/2015/2016. (€ 20,90/20,90/25,30)

Hibbeler, R. C.: Technische Mechanik 3 - Dynamik. München: Pearson Studium, 2018. (€ 59,95)
(einige Fotos aus der Vorlesung sind mit Genehmigung des Verlages aus diesem Buch entnommen)

Magnus, K.; Müller-Slany, H.H.: Grundlagen der Technischen Mechanik. Stuttgart: Teubner, 2005. (€ 34,99)

Szabo, I.: Einführung in die Technische Mechanik. Berlin: Springer, 2003. (€ 58,31)

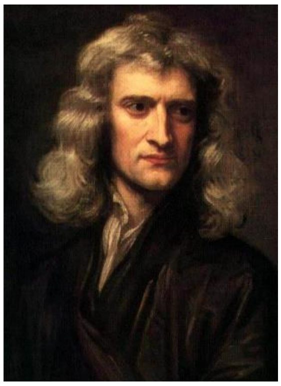
Taylor, J. R.: Klassische Mechanik – Ein Lehr- und Übungsbuch. München: Pearson Studium, 2014. (€ 49,95)

Ulbrich, H.; Weidemann, H.-J.; Pfeiffer, F.: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen. Stuttgart: Teubner, 2011. (€ 44,99)

Ziegler, F.: Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper. Wien: Springer, 1998. (€ 54,99)

Die Preisangaben sind als grober Richtwert zu verstehen und gänzlich ohne Gewähr.

Newton‘sche Gesetze

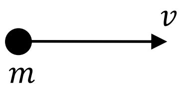


Sir Isaac Newton
(1643–1727)

1. Newton‘sches Gesetz: Trägheitsgesetz

„Jeder Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken.“ (Galilei, 1630)

Für den Massenpunkt gilt

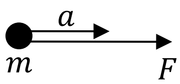


$v = \text{const.}$ bzw. $v = 0 \rightarrow x = \text{const.}$

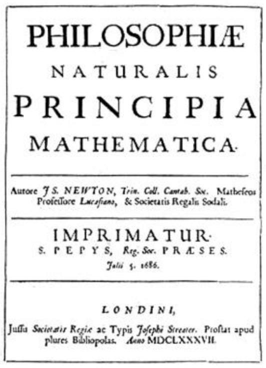
2. Newton‘sches Gesetz: Bewegungsgesetz

„Die Änderung der Bewegungsgröße ist der einwirkenden äußeren Kraft proportional und erfolgt längs der Geraden in der diese Kraft wirkt.“

Für den Massenpunkt gilt



$ma = F$
z.B. $F = 0 \;\rightarrow\; a = 0 \;\rightarrow\; v = \text{const.}$


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

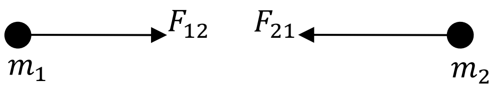
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

In der *Principia* (1687) konstatierte Newton die drei Grundgesetze der Mechanik.

3. Newton‘sches Gesetz: Gegenwirkungsprinzip

„Eine in einem System wirkende innere Kraft ist stets mit einer gleich großen, aber entgegengesetzten Gegenwirkung verbunden.“

Für zwei Massenpunkte gilt



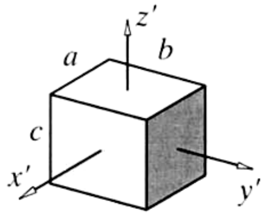
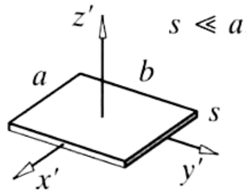
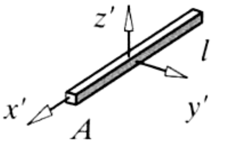
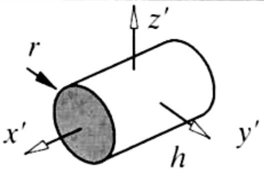
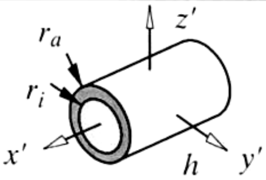
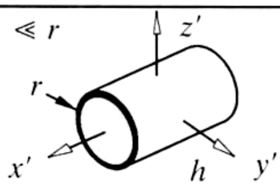
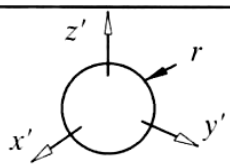
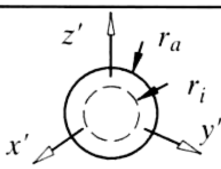
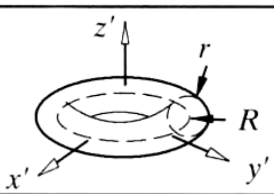
$\rightarrow \; F_{12} = F_{21}$

Bemerkungen:

- Newton hat seine Gesetze für den Massenpunkt formuliert. Die Übertragung vom einzelnen Massenpunkt auf den gesamten Körper wurde von Euler vorgenommen.
- Die Masse kann als schwere Masse $\mathrm{m} = \mathrm{G/g}$ oder als träge Masse $\mathrm{m} = \mathrm{F/a}$ aufgefasst werden. Beide Massenbegriffe sind völlig gleichwertig. Einheit der Kraft (aus $\mathrm{F} = \mathrm{mg}$) $[\mathrm{kg\,m/s^2}]$.
- Die kinetischen Grundgleichungen gelten für beliebige, auch nichtstarre, Körper und mechanische Systeme, ohne dass dies im Folgenden stets ausdrücklich betont wird.
- Das zweite Newton‘sche Gesetz gilt nur in einem Inertialsystem, d.h. es muss die absolute Beschleunigung gegenüber dem Inertialsystem eingesetzt werden.
  Beispiele für Inertialsysteme: Ursprung im Erdmittelpunkt und Achsen fixsternfest, Ursprung auf Erdoberfläche und Achsen erdbodenfest (für TM ausreichend).

Grundgleichungen der Kinetik im Inertialsystem bzw. dazu parallel bewegten Koordinatensystemen ■: gilt □: gilt automatisch mit	abgeschlossenes System	nichtabgeschlossenes System	konservative Kräfte	nicht konservative Kräfte	fester Bezugspunkt	bewegter Bezugspunkt
Impulssatz						
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}_\mathrm{O} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}_\mathrm{OS}) \overset{m=const.}{=} m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_\mathrm{OS} = \boldsymbol{F}_\mathrm{a}$	■		□	■	■	
$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_\mathrm{QS} + \boldsymbol{a}_\mathrm{OQ}m = \boldsymbol{F}_\mathrm{a}\,,\quad \boldsymbol{v}_\mathrm{QS} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_\mathrm{QS}$	■		□	■	□	■
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\boldsymbol{v}_\mathrm{OS}) = \boldsymbol{F}_\mathrm{a} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_\mathrm{OA}$ oder: $m(\mathrm{t})\,\boldsymbol{a}_\mathrm{OS} = \boldsymbol{F}_\mathrm{a} + \dot{m}\,\boldsymbol{v}_\mathrm{SA}$	□	■	□	■	■	
Drallsatz						
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_\mathrm{O} = \boldsymbol{M}_\mathrm{aO}$	■		□	■	■	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_\mathrm{Q} + \boldsymbol{r}_\mathrm{QS} \times \boldsymbol{a}_\mathrm{OQ}\,m = \boldsymbol{M}_\mathrm{aQ}$	■		□	■	□	■
Arbeitssatz / Energiesatz						
$T_2 - T_1 = W_\mathrm{a12} + W_\mathrm{i12} = W_{12}$ oder: $T_2 - T_1 + V_2 - V_1 = \widetilde{W}_{12}$ $\widetilde{W}_{12}$ Arbeit der nichtkonservativen Kräfte	■		□	■	■	
$T_2 - T_1 = -(V_2 - V_1)$	■		■		■	

Trägheitsmomente ausgewählter homogener Körper

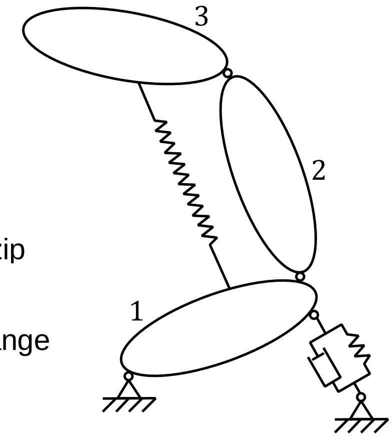
Körper	Geometrie	Masse	Trägheitsmomente
Quader		$m = \rho abc$	$I'_{xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ $I'_{yy} = \frac{m}{12}(c^2 + a^2)$ $I'_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
Platte	$s \ll a, b$ 	$m = \rho abs$	$I'_{xx} = \frac{m}{12} b^2$ $I'_{yy} = \frac{m}{12} a^2$ $I'_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
dünner Stab		$m = \rho Al$	$I'_{xx} = 0$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{ml^2}{12}$
Kreis-zylinder		$m = \rho\pi r^2 h$	$I'_{xx} = \frac{1}{2} mr^2$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{m}{12}(3r^2 + h^2)$
Hohl-zylinder		$m = \rho\pi(r_a^2 - r_i^2)h$	$I'_{xx} = \frac{m}{2}\left(r_a^2 + r_i^2\right)$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{m}{4}\left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{h^2}{3}\right)$
Zylinder-schale	$s \ll r$ 	$m = \rho 2\pi rsh$	$I'_{xx} = mr^2$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{m}{12}(6r^2 + h^2)$
Kugel		$m = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$	$I'_{xx} = I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{2}{5} mr^2$
Hohl-kugel		$m = \rho\frac{4}{3}\pi(r_a^3 - r_i^3)$	$I'_{xx} = I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{2}{5} m \frac{r_a^5 - r_i^5}{r_a^3 - r_i^3}$
Kreis-torus		$m = \rho 2\pi^2 r^2 R$	$I'_{xx} = I'_{yy} = \frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2)$ $I'_{zz} = \frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2)$

Trägheitsmomente beziehen sich auf das eingezeichnete Hauptachsensystem. Bei Wechsel des Bezugspunkts muss der Trägheitstensor entsprechend transformiert werden.

Mehrkörpersysteme

Für ein Mehrkörpersystem mit n **starren Körpern** sind das Schnittprinzip, der Impulssatz und der Drallsatz für **jeden Körper** anzuwenden. Dies führt auf die Newton-Euler'schen Gleichungen.

Für den i-ten Teilkörper gilt:



$$m_i \boldsymbol{a}_{OS_i} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{a}_i} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}_i} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{a}_i} \qquad \text{Impulssatz}$$

$$\boldsymbol{I}_{S_i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{I}_{S_i}\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{M}_{\mathrm{a}S_i} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}S_i} + \boldsymbol{M}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{a}S_i} \qquad \text{Drallsatz}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}_i} &= f\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}_1}, \dots, \boldsymbol{F}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}_n}\right) \\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}S_i} &= h\left(\boldsymbol{M}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}S_1}, \dots, \boldsymbol{M}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{a}S_n}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{Schnittprinzip}$$

$+$ ggfs. kinematische Zusammenhänge

Wichtig: **Reaktionen** nicht vergessen!

Die Reaktionen müssen eliminiert werden, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten. Dies kann

- für sehr kleine Systeme per Hand, und ansonsten
- zum Beispiel mithilfe des Prinzips von d'Alembert aus der analytischen Mechanik (siehe Kapitel 6)

geschehen. Der Formalismus der Herleitung der Bewegungsgleichungen über die Newton-Euler'schen Gleichungen eignet sich sehr gut, um algorithmisch umgesetzt zu werden und damit eine computergestützte Modellbildung zu ermöglichen. Die Bewegungsgleichungen können anschließend vielfältig verwendet werden, beispielsweise zur numerischen Simulation oder für die Reglersynthese. In der Vorlesung Maschinendynamik wird unter anderem der Umgang mit Mehrkörpersystemen eingehend behandelt.

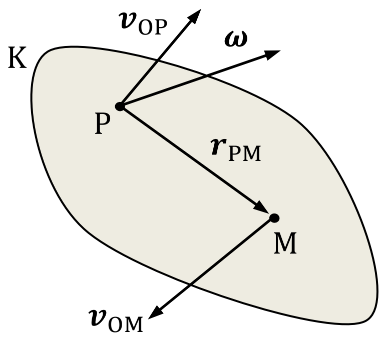
Arbeits- und Energiesatz für starre Körper

Kinetische Energie des starren Körpers

Für den Körper K als abgeschlossenes System gilt

$$T = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{OM}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{OM}}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{v}_{\mathrm{OM}}^2\,\mathrm{d}m\ .$$

Die Kinematik des starren Körpers liefert



$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{OM}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}}$$

eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_{\mathrm{K}} \big(\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} + 2\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}}) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}})\big)\,\mathrm{d}m \\ &= \frac{1}{2} m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} + m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PS}}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}})\,\mathrm{d}m \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}}}_{\text{Translation}} + \underbrace{m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PS}})}_{\text{Kopplung}} + \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{\omega}}_{\text{Rotation}}\ . \end{aligned}$$

Die Kopplungsenergie verschwindet für $\mathrm{P} \equiv \mathrm{S}$, d.h. $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PS}} \equiv \mathbf{0}$:

$$T = \frac{1}{2} m\, \boldsymbol{v}_{\mathrm{OS}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{s}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Die kinetische Energie des starren Körpers setzt sich aus der Translationsbewegung seines Massenmittelpunkts und der Rotationsenergie bezüglich seines Massenmittelpunkts zusammen.

Sowohl die Translationsenergie als auch die Koppelenergie verschwinden, wenn P (momentan) in Ruhe ist, d.h. für $\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{r}_{\mathrm{PS}}$ beliebig):

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Arbeit am starren Körper

- innere Kräfte

$$W_{\mathrm{i}12} = \int_{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{r}_1}^{\mathrm{r}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

→ die inneren Kräfte leisten am starren Körper keine Arbeit

- äußere Reaktionskräfte

  Reaktionskräfte werden an starren Körpern durch Lagerungen hervorgerufen:

  - bewegungsfreie Lagerungen (feste Einspannung, Haftreibung, rollendes Rad, ...)
    $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; W_{\mathrm{a}12}^{\mathrm{r}} = 0$

  - reibungsfreie Lagerungen (Gelenke, Führungen, …)
    $\mathrm{d}\boldsymbol{r} \perp \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{r}} \;\rightarrow\; W_{\mathrm{a}12}^{\mathrm{r}} = 0$

  → die äußeren Reaktionskräfte leisten keine Arbeit (Prinzip der virtuellen Arbeit)

- äußere eingeprägte Kräfte

$$W_{\mathrm{a}12}^{\mathrm{e}} = \int_{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{r}_1}^{\mathrm{r}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

→ am starren Körper leisten nur die äußeren eingeprägten Kräfte Arbeit

Arbeits- und Energiesatz für den starren Körper

Die Differenz der kinetischen Energie eines starren Körpers entspricht der an ihm durch die eingeprägten Kräfte geleisteten Arbeit:

$$T_2 - T_1 = W_{\mathrm{a}12}^{\mathrm{e}}$$

oder, falls die äußeren eingeprägten Kräfte ein Potential V haben:

$$T_2 - T_1 = -(V_2 - V_1)$$

Schwingungen

Schwingungen sind typisch für den Maschinenbau. Elastisch oder pendelnd aufgehängte Maschinenteile können zu Schwingungen angeregt werden.



Warum werden Maschinenteile elastisch oder pendelnd aufgehängt?

- Schwingungsisolation (Radaufhängung, Motoren, Waschmaschinentrommel etc.)
- Leichtbau (Kranseil, Roboterarme, Tragflügelflattern, Werkzeugmaschinenrattern etc.)
- Schwingungserzeugung (Uhrenpendel, Rüttelsiebe, Klaviersaite, Schaukel etc.)
- Gleichgewichtslagen (Zeigerinstrumente etc.)

Wodurch werden Schwingungen angeregt?

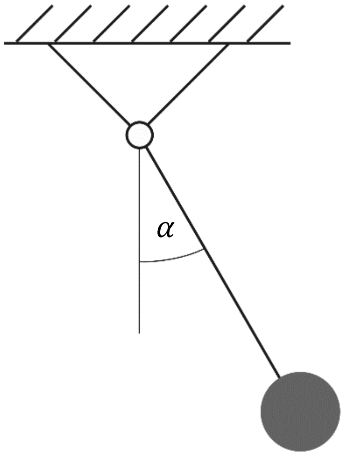
- Anfangsauslenkung (Schaukel, Roboterarm etc.)
- Stöße (Radaufhängung, Klaviersaite etc.)
- selbsterregte Schwingungen (Tragflügelflattern, Kreiselinstabilitäten etc.)
- parametererregte Schwingungen (Zeigerinstrumente etc.)
- periodische Anregungen (Motoren, Waschmaschine, Rüttelsieb etc.)

→ Schwingungslehre ist eine umfangreiche Wissenschaft für alle Schwingungserscheinungen. Begriffe der Schwingungslehre entsprechend der Norm DIN 1311.

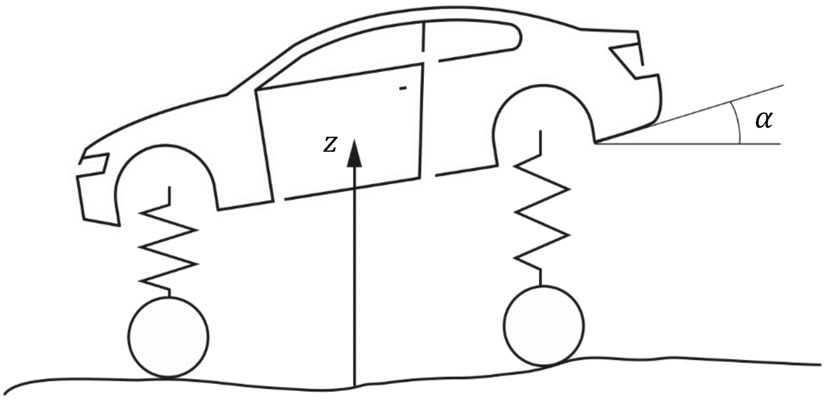
Einteilung der Schwingungen

Anzahl der Freiheitsgrade

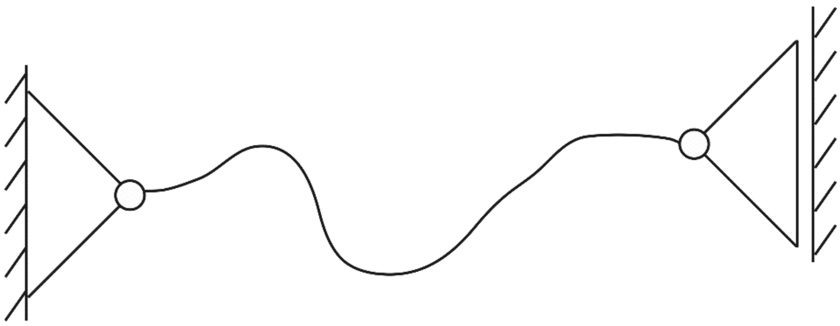
- einfacher (einläufiger) Schwinger $f = 1$



- mehrfache Schwinger $1 < f < \infty$



- kontinuierliche Schwinger $f \to \infty$



stetige Massen- und Steifigkeitsverteilung

Art der Differentialgleichung

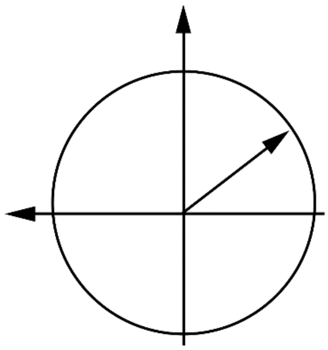
- lineare Schwingungen: z.B. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- nichtlineare Schwingungen: z.B. $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$

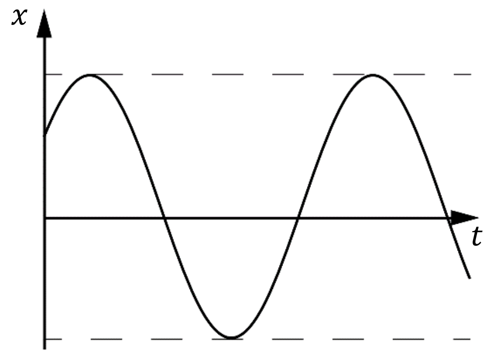
Entstehungsmechanismus

- freie Schwingungen: keine Energiezufuhr, einmaliger Anstoß von außen
- selbsterregte Schwingungen: selbstgesteuerte Energiezufuhr
  $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$
- parametererregte Schwingungen: Energiezufuhr durch periodisch veränderliche Parameter
  $\ddot{x} + p(t)x = 0$

Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)

- reelle Darstellung: $x(t) = C\cos(\omega t - \varphi)$





Amplitude:	C
Periode (Schwingzeit):	$T = \frac{2\pi}{\omega}$
Eigen(kreis)frequenz:	ω
Phasenverschiebung / Nullphasenwinkel:	φ

- komplexe Darstellung: $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi)}$

$$= \underbrace{C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}_{\bar{C}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \bar{C}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

hieraus folgt mit der Euler‘schen Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t$$

durch Koeffizientenvergleich

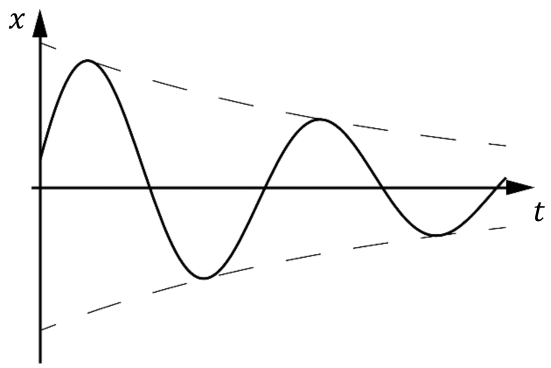
$$x(t) = \mathrm{Re}\{\bar{C}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\}$$

Zeiger der harmonischen Schwingung (komplexe Amplitude)

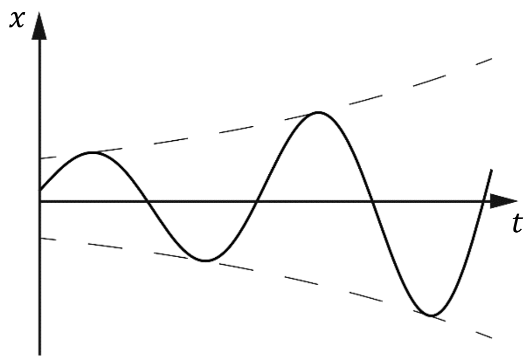
$$\bar{C} = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$

Zeigerdarstellung vereinfacht die Addition zweier Schwingungen gleicher Frequenz (z.B. Wechselströme).

Sinusverwandte Schwingungen



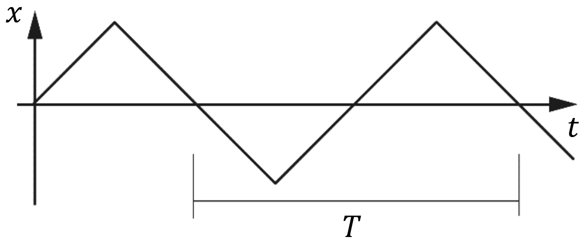
gedämpfte / asymptotisch stabile Schwingung



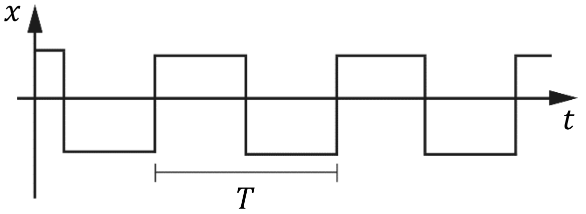
entdämpfte Schwingung (selbst anfachend)

→instabil

Allgemeine periodische Schwingungen



Dreiecksschwingung



Rechteckschwingung

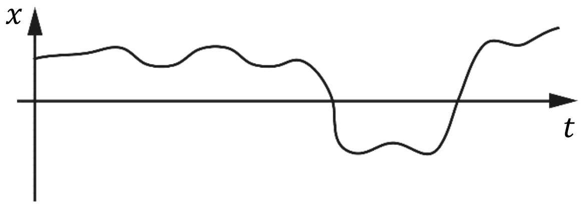
$x(t) = x(t+T)\ldots$ periodisch

Mit Hilfe der Periode T ist eine Fourier-Zerlegung möglich

$x(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$

Sonderfall: $k = 1$: harmonische Schwingung

Nichtperiodische Schwingungen



z.B. chaotische Bewegung (nichtlineare Dynamik),
zufällige Bewegungen (stochastische Prozesse) → Rauschvorgänge