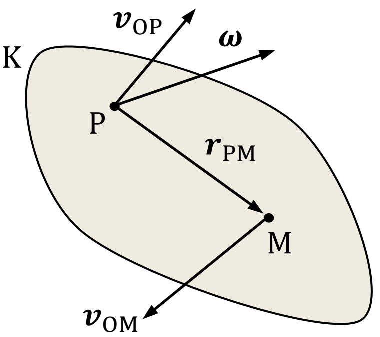
Arbeits- und Energiesatz für starre Körper

Kinetische Energie des starren Körpers

Für den Körper K als abgeschlossenes System gilt

$$T = \frac{1}{2}\int_K \boldsymbol{v}_{\mathrm{OM}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{OM}}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int_K \boldsymbol{v}_{\mathrm{OM}}^2\,\mathrm{d}m\ .$$

Die Kinematik des starren Körpers liefert



$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{OM}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}}$$

eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\int_K \big(\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} + 2\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}}) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}})\big)\,\mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{2} m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} + m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PS}}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \int_K \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PM}})\,\mathrm{d}m \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}}}_{\text{Translation}} + \underbrace{m\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{PS}})}_{\text{Kopplung}} + \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{\omega}}_{\text{Rotation}}\ .
\end{aligned}$$

Die Kopplungsenergie verschwindet für $\mathrm{P} \equiv \mathrm{S}$, d.h. $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PS}} \equiv \mathbf{0}$:

$$T = \frac{1}{2} m\, \boldsymbol{v}_{\mathrm{OS}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{s}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Die kinetische Energie des starren Körpers setzt sich aus der Translationsbewegung seines Massenmittelpunkts und der Rotationsenergie bezüglich seines Massenmittelpunkts zusammen.

Sowohl die Translationsenergie als auch die Koppelenergie verschwinden, wenn P (momentan) in Ruhe ist, d.h. für $\boldsymbol{v}_{\mathrm{OP}} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{r}_{\mathrm{PS}}$ beliebig):

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Arbeit am starren Körper

- innere Kräfte

$$W_{\mathrm{i}12} = \int_{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{r}_1}^{\mathrm{r}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

→ die inneren Kräfte leisten am starren Körper keine Arbeit

- äußere Reaktionskräfte

  Reaktionskräfte werden an starren Körpern durch Lagerungen hervorgerufen:

  - bewegungsfreie Lagerungen (feste Einspannung, Haftreibung, rollendes Rad, ...)
    $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; W_{\mathrm{a}12}^{\mathrm{r}} = 0$

  - reibungsfreie Lagerungen (Gelenke, Führungen, …)
    $\mathrm{d}\boldsymbol{r} \perp \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{r}} \;\rightarrow\; W_{\mathrm{a}12}^{\mathrm{r}} = 0$

  → die äußeren Reaktionskräfte leisten keine Arbeit (Prinzip der virtuellen Arbeit)

- äußere eingeprägte Kräfte

$$W_{\mathrm{a}12}^{\mathrm{e}} = \int_{\mathrm{K}} \int_{\mathrm{r}_1}^{\mathrm{r}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

→ am starren Körper leisten nur die äußeren eingeprägten Kräfte Arbeit

Arbeits- und Energiesatz für den starren Körper

Die Differenz der kinetischen Energie eines starren Körpers entspricht der an ihm durch die eingeprägten Kräfte geleisteten Arbeit:

$$T_2 - T_1 = W_{\mathrm{a}12}^{\mathrm{e}}$$

oder, falls die äußeren eingeprägten Kräfte ein Potential V haben:

$$T_2 - T_1 = -(V_2 - V_1)$$