Aufgabe 1: Relativbewegung

Viele Punktbewegungen, die z.B. durch den Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ eines Punktes P in einem raumfesten Koordinatensystem $K\{O, x, y, z\}$ gegeben sind, lassen sich einfacher beschreiben, wenn man die Bewegung in einem geeignet gewählten bewegten Koordinatensystem $K'\{O', x', y', z'\}$ darstellt. Die Bewegung setzt sich dann zusammen aus der Relativbewegung in K' und der Bewegung von K'.

Nun sei die Bewegung in K' durch

$$\mathbf{r}_{O'PK'} = [u(t), v(t), 0]^T$$

und der Ortsvektor des Ursprungs O' von K' (beschrieben in K) durch

$$\mathbf{r}_{OO'K} = [1, 1, 1]^T$$

gegeben. Die Drehung von K' gegen K werde durch folgende Transformationsmatrix dargestellt:

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8\cos\varphi & -0.8\sin\varphi \\ -0.8 & 0.6\cos\varphi & -0.6\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi = \varphi(t).$$

Gesucht ist jetzt die Absolutgeschwindigkeit des Punktes P (gegenüber K), dargestellt in K'

$$\mathbf{v}_{OPK'} = \mathbf{v}_{OO'K'} + \boldsymbol{\omega}_{KK'K'} \times \mathbf{r}_{O'PK'} + \mathbf{v}_{O'PK'} \ .$$

Der Drehvektor $\boldsymbol{\omega}_{KK'K}$ (im K–System) kann aus dem Matrizenprodukt $\dot{\mathbf{C}}_{KK'} \cdot \mathbf{C}_{K'K}$ gewonnen werden:

$$\dot{\mathbf{C}}_{KK'} \cdot \mathbf{C}_{K'K} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}8\dot\varphi\sin\varphi & -0{,}8\dot\varphi\cos\varphi \\ 0 & -0{,}6\dot\varphi\sin\varphi & -0{,}6\dot\varphi\cos\varphi \\ 0 & \dot\varphi\cos\varphi & -\dot\varphi\sin\varphi \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ 0{,}8\cos\varphi & 0{,}6\cos\varphi & \sin\varphi \\ -0{,}8\sin\varphi & -0{,}6\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}_{KK'}^T}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}8\dot\varphi \\ 0 & 0 & -0{,}6\dot\varphi \\ 0{,}8\dot\varphi & 0{,}6\dot\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe des Rösselsprungs kann man $\boldsymbol{\omega}_{KK'K}$ ablesen

$$\boldsymbol{\omega}_{KK'K} = \begin{bmatrix} 0{,}6\dot{\varphi} \,, & -0{,}8\dot{\varphi} \,, & 0 \end{bmatrix}^T$$

Welche Koordinaten hat $\boldsymbol{\omega}_{KK'K'}$?

$$\boldsymbol{\omega}_{KK'K'} = \underline{\underline{C}}_{K'K} \cdot \boldsymbol{\omega}_{KK'K} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 & 0 \\ 0{,}8\cos\varphi & 0{,}6\cos\varphi & \sin\varphi \\ -0{,}8\sin\varphi & -0{,}6\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6\dot{\varphi} \\ -0{,}8\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Welche Relativgeschwindigkeit hat der Punkt P (dargestellt in K')?

$$\mathbf{v}_{O'PK'} = \frac{d'}{dt}\mathbf{r}_{O'PK'} = \begin{bmatrix} \dot{u} \,, & \dot{v} \,, & 0 \end{bmatrix}^T$$

Welche Absolutgeschwindigkeit hat der Punkt P (dargestellt in K')?

$$\mathbf{v}_{OPK'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_{OO'K'}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v\dot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}_{KK'K'} \times \mathbf{r}_{O'PK'}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_{O'PK'}} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ v\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Zum Vergleich soll jetzt die Absolutgeschwindigkeit im raumfesten Koordinatensystem K ermittelt werden.

Welche Koordinaten hat dort der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ des Punktes P?

$$\mathbf{r}_{OPK} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8\cos\varphi & -0{,}8\sin\varphi \\ -0{,}8 & 0{,}6\cos\varphi & -0{,}6\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{KK'}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_{O'PK'}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_{OO'K}} = \begin{bmatrix} 0{,}6\,u + 0{,}8\,v\cos\varphi + 1 \\ -0{,}8\,u + 0{,}6\,v\cos\varphi + 1 \\ v\sin\varphi + 1 \end{bmatrix}$$

Die Absolutgeschwindigkeit in K erhält man durch Differenzieren der Koordinaten von $\mathbf{r}_{\mathrm{OPK}}(t)$ nach der Zeit

$$\mathbf{v}_{\mathrm{OPK}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{\mathrm{OPK}} = \begin{bmatrix} 0{,}6\dot{u} + 0{,}8\dot{v}\cos\varphi - 0{,}8v\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -0{,}8\dot{u} + 0{,}6\dot{v}\cos\varphi - 0{,}6v\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{v}\sin\varphi + v\dot{\varphi}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Zur Überprüfung der Rechnung wird $\mathbf{v}_{\mathrm{OPK'}}$ in das raumfeste System K transformiert.

$$\mathbf{v}_{\mathrm{OPK}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8\cos\varphi & -0{,}8\sin\varphi \\ -0{,}8 & 0{,}6\cos\varphi & -0{,}6\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\mathrm{KK'}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ v\dot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_{\mathrm{OPK'}}} = \begin{bmatrix} 0{,}6\dot{u} + 0{,}8\dot{v}\cos\varphi - 0{,}8v\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -0{,}8\dot{u} + 0{,}6\dot{v}\cos\varphi - 0{,}6v\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{v}\sin\varphi + v\dot{\varphi}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Vergleichen Sie die beiden letzten Ergebnisse.

gleich!

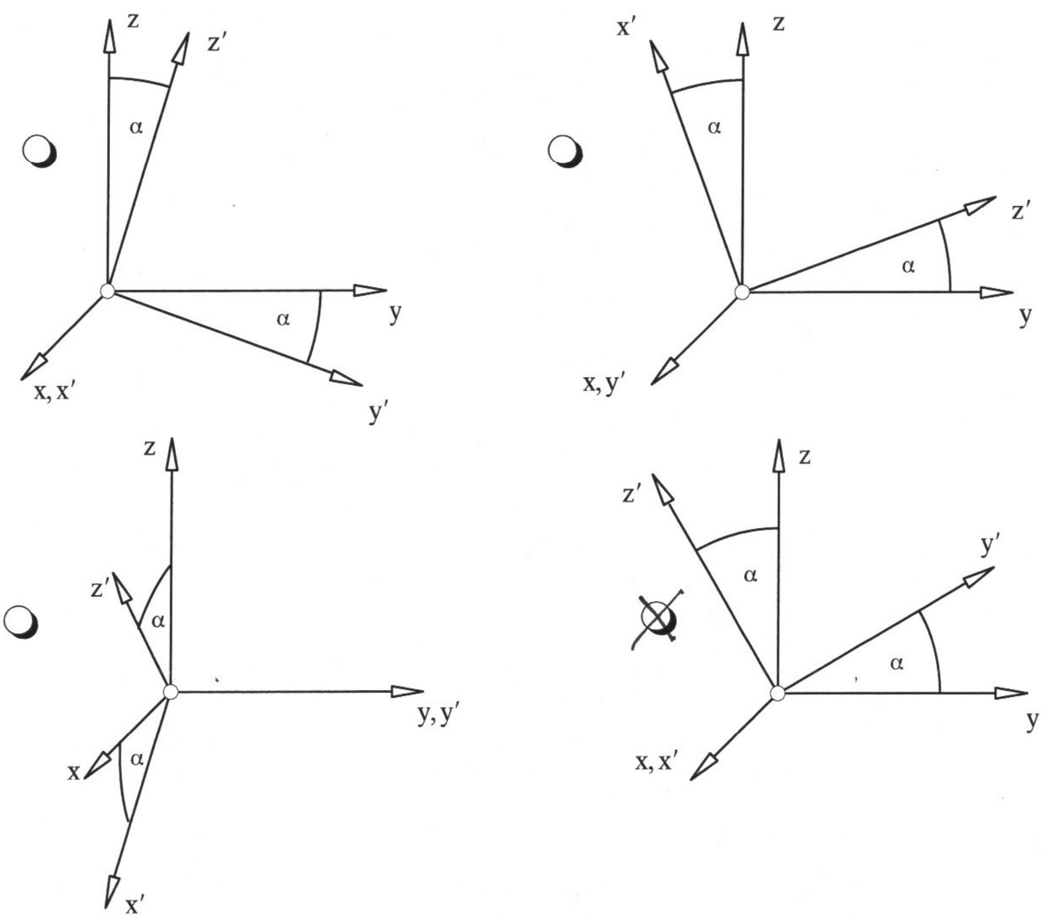
Aufgabe 2:

Die Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen K und K′ lautet

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

$$\underbrace{}_{e_{x'K}} \quad \underbrace{}_{e_{y'K}} \quad \underbrace{}_{e_{z'K}}$$

a) Welche Lage haben die Systeme zueinander?



b) Wie lautet der Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{KK'K}$, mit dem sich K′ gegen K dreht, dargestellt im System K?

$$\boldsymbol{\omega}_{KK'K} = \left[\ \dot{\alpha}\ ,\ 0\ ,\ 0\ \right]^T$$

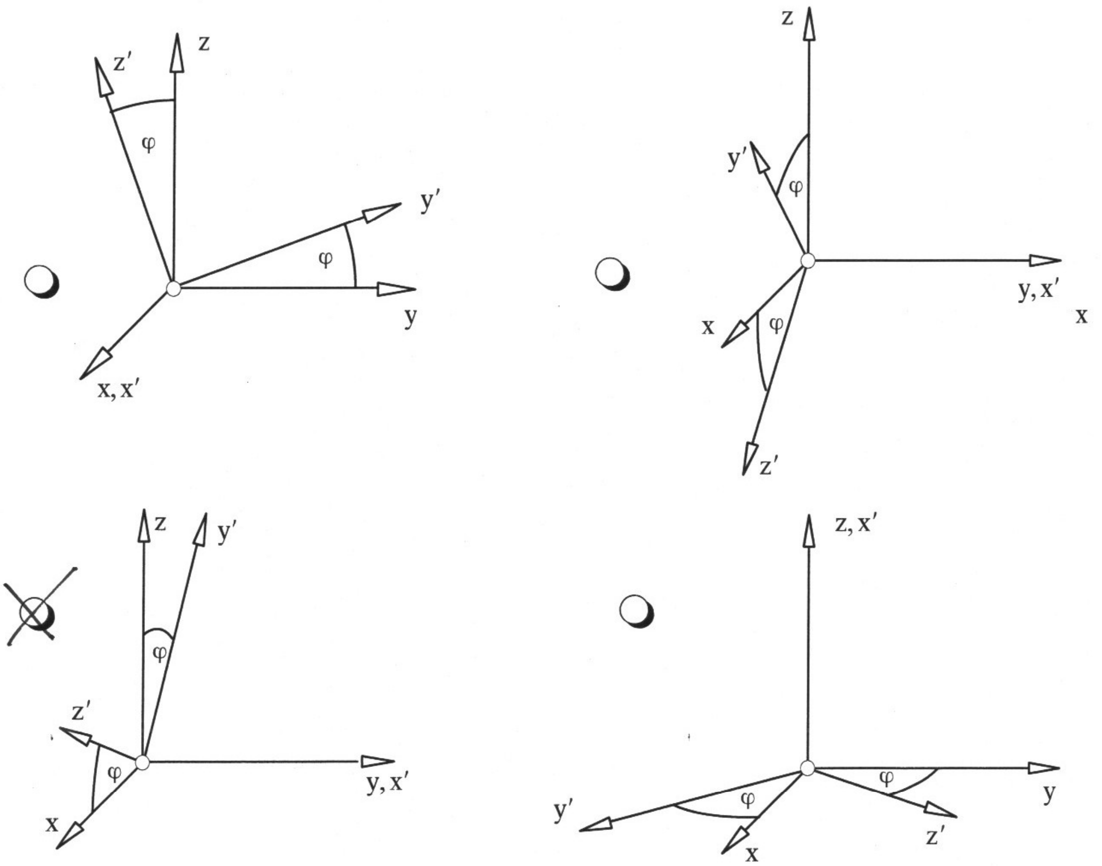
Aufgabe 3: Gegeben ist die Matrix der Richtungskosinusse für die beiden kartesischen Koordinatensysteme K und K'

$\cos(\underline{e}_x, \underline{e}_{z'})$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{KK}'} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi = \omega t, \quad \omega > 0 .$$

$\underline{e}_y \parallel \underline{e}_{x'}$

a) Welche Lage haben die Systeme zueinander?



b) Der Drehvektor $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK}'}$, mit dem sich K' gegen K dreht, liegt in

- positiver
- negativer

- x – Richtung
- y – Richtung
- z – Richtung.