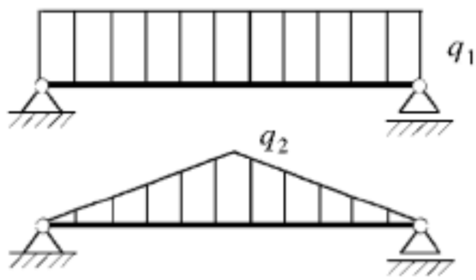
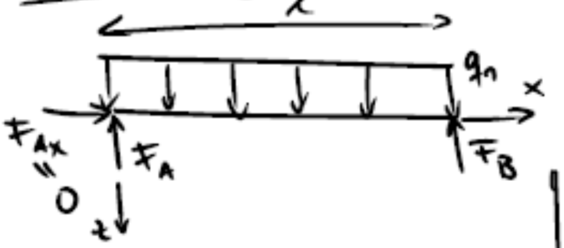
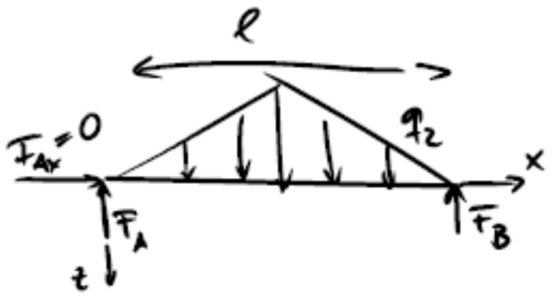
Aufgabe 17 *: Zwei gleiche, beiderseits frei aufliegende, homogene Träger von konstantem Querschnitt sind durch die kontinuierlichen Belastungen q_1 und q_2 beansprucht.

In welchem Verhältnis stehen in diesen zwei Belastungsfällen die Durchbiegungen in der Balkenmitte zueinander?



Berechnung der Biegelinie





Lagerreaktionen (Symmetrie)

$$F_A = F_B = \frac{q_1 l}{2} \qquad\Big|\qquad F_A = F_B = \frac{q_2 l}{4}$$

Streckenlast $q(x)$

$$q(x) = q_1 \qquad\Big|\qquad q(x) = \frac{2q_2}{l}x - \frac{4q_2}{l}\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^1$$

Querkraftverlauf $Q(x) = -\int q(x)\,dx - \sum_i F_i \langle x - x_i\rangle^0$

⋮

Momentenverlauf $M(x) = \int Q(x)\,dx - \sum_i M_i \langle x - x_i\rangle^0$

$$M(x) = \frac{1}{2} q_1 l x - \frac{1}{2} q_1 x^2 \qquad\Big|\qquad M(x) = \frac{1}{4} q_2 l x - \frac{q_2}{3l} x^3 + \frac{2q_2}{3l}\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^3$$

Biegelinie $EI w''(x) = -M(x)$

$$EI w''(x) = -\frac{1}{2} q_1 l x + \frac{1}{2} q_1 x^2$$

$$EI w(x) = -\frac{1}{12} q_1 l x^3 + \frac{1}{24} q_1 x^4 + C_1 x + C_2$$

$$EI w(x) = -\frac{1}{24} q_2 l x^3 + \frac{q_2}{60l} x^5 - \frac{q_2}{30l}\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^5 + C_1 x + C_2$$

Randbedingungen und Integrationskonstanten

$$w(0)=0 \Rightarrow C_2=0$$
$$w(\ell)=0$$
$$-\frac{1}{12}q_1\ell^4+\frac{1}{24}q_1\ell^4=-C_1\ell$$
$$C_1=\frac{1}{24}q_1\ell^3$$

$$w(0)=0 \Rightarrow C_2=0$$
$$w(\ell)=0$$
$$-\frac{1}{24}q_2\ell^4+\frac{q_2}{60}\ell^4-\frac{q_2}{30\ell}\left(\frac{\ell}{2}\right)^5=-C_1\ell$$
$$C_1=q_2\ell^3\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{60}+\frac{1}{30\cdot 32}\right)$$
$$C_1=\frac{25}{960}q_2\ell^3$$

Biegelinie, Durchbiegung in der Mitte

$$w_1(x)=\frac{q_1}{24EI}\left(x^4-2\ell x^3+\ell^3 x\right)$$
$$w_1\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{5}{384}\frac{q_1\ell^4}{EI}$$

$$w_2(x)=\frac{q_2}{960EI}\left(\frac{16x^5}{\ell}-\frac{32}{\ell}\left\langle x-\frac{\ell}{2}\right\rangle^5-40\ell x^3+25\ell^3x\right)$$
$$w_2\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{1}{120}\frac{q_2\ell^4}{EI}$$

Verhältnis der Durchbiegungen

$$\frac{w_1\left(\frac{\ell}{2}\right)}{w_2\left(\frac{\ell}{2}\right)}=\frac{25}{16}\frac{q_1}{q_2}$$

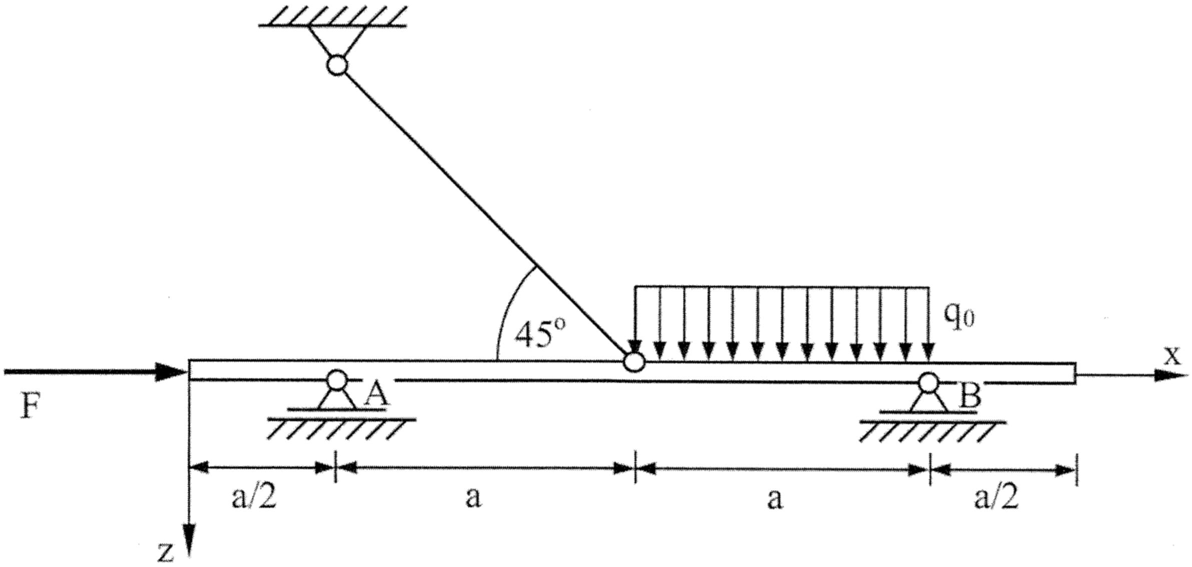
Soll die Ersatzlast für q_1 und q_2 gleich groß sein, gilt

$$q_2=2q_1$$

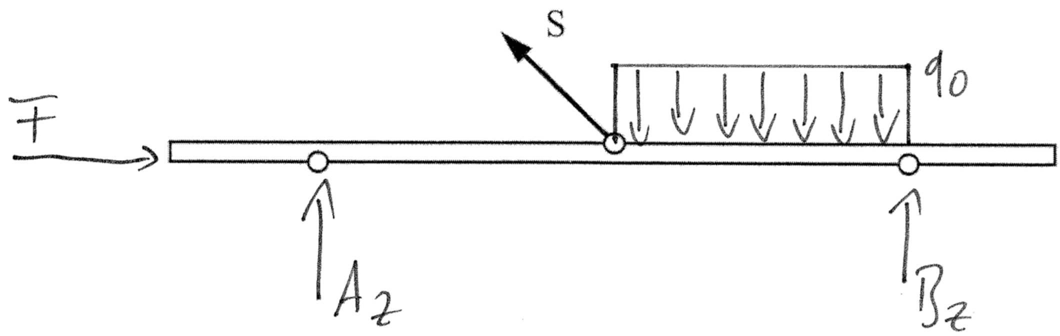
$$\Rightarrow \frac{w_1(\ell/2)}{w_2(\ell/2)}=\frac{25}{32}$$

Aufgabe 1: Prüfungsaufgabe Wintersemester 05/06

Ein Balken (Länge $3a$, Biegesteifigkeit EI) ist in den Punkten A und B gelagert und in der Balkenmitte an einem undehnbaren Seil aufgehängt. Der Balken ist wie skizziert durch eine Streckenlast q_0 sowie durch eine Kraft F belastet.



a) Schneiden Sie zur Berechnung der Lagerreaktionen den Balken frei. Zeichnen Sie alle fehlenden Kräfte ein und bezeichnen Sie diese.



b) Berechnen Sie die Seilkraft S sowie die Kräfte auf den Balken in A und B.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}F - \frac{1}{4}q_0 a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}F - \frac{3}{4}q_0 a \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie den Normalkraftverlauf $N(x)$, die kontinuierliche Belastung $q(x)$ sowie Querkraft- $Q(x)$ und Biegemomentenverlauf $M(x)$ für den Balken.

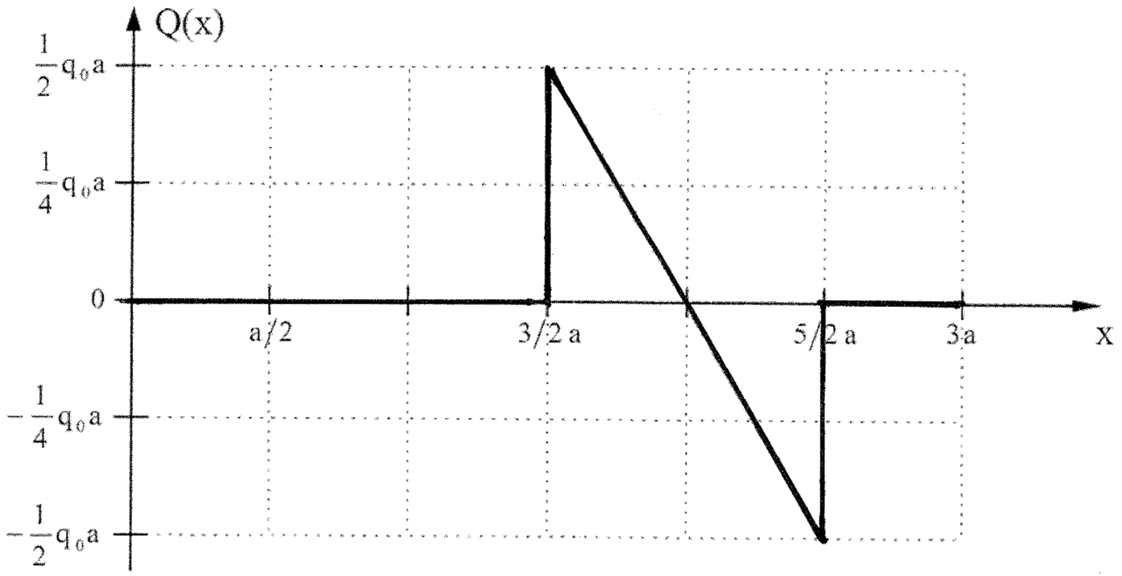
$$N(x) = -F\{x-0\}^0 + F\{x-\tfrac{3}{2}a\}^0$$

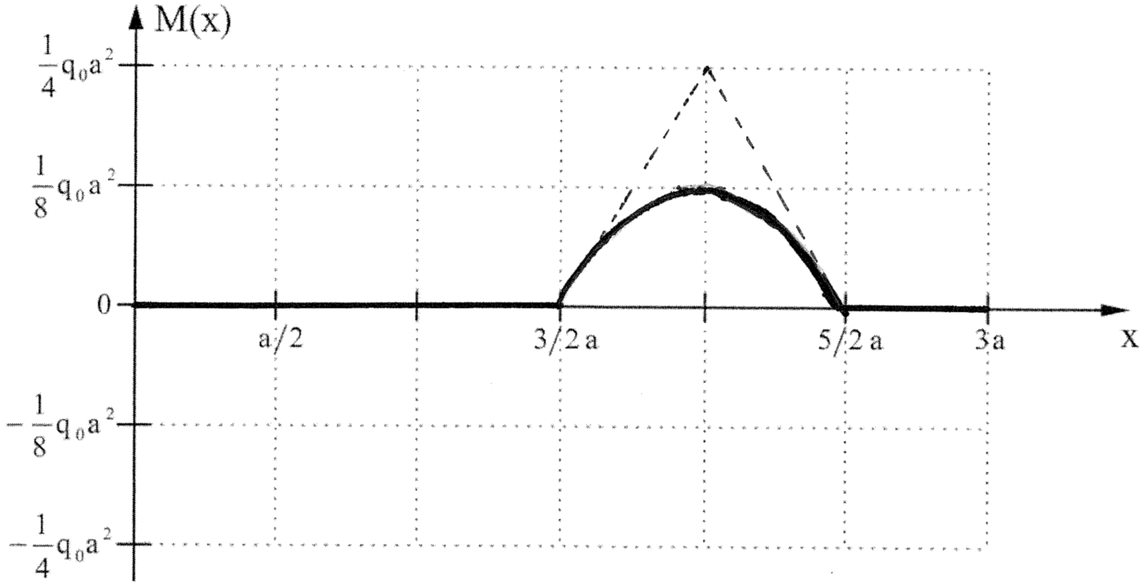
$$q(x) = q_0\{x-\tfrac{3}{2}a\}^0 - q_0\{x-\tfrac{5}{2}a\}^0$$

$$Q(x) = \left(\tfrac{1}{4}q_0 a - \tfrac{1}{2}F\right)\{x-\tfrac{a}{2}\}^0 + F\{x-\tfrac{3}{2}a\}^0 - q_0\{x-\tfrac{3}{2}a\}^1 + q_0\{x-\tfrac{5}{2}a\}^1 + \left(\tfrac{3}{4}q_0 a - \tfrac{1}{2}F\right)\{x-\tfrac{5}{2}a\}^0$$

$$M(x) = \left(\tfrac{1}{4}q_0 a - \tfrac{1}{2}F\right)\{x-\tfrac{a}{2}\}^1 + F\{x-\tfrac{3}{2}a\}^1 - \tfrac{1}{2}q_0\{x-\tfrac{3}{2}a\}^2 + \tfrac{1}{2}q_0\{x-\tfrac{5}{2}a\}^2 + \left(\tfrac{3}{4}q_0 a - \tfrac{1}{2}F\right)\{x-\tfrac{5}{2}a\}^1$$

d) Zeichnen Sie den Querkraft- und Biegemomentenverlauf für $F = \frac{1}{2}q_0 a$.



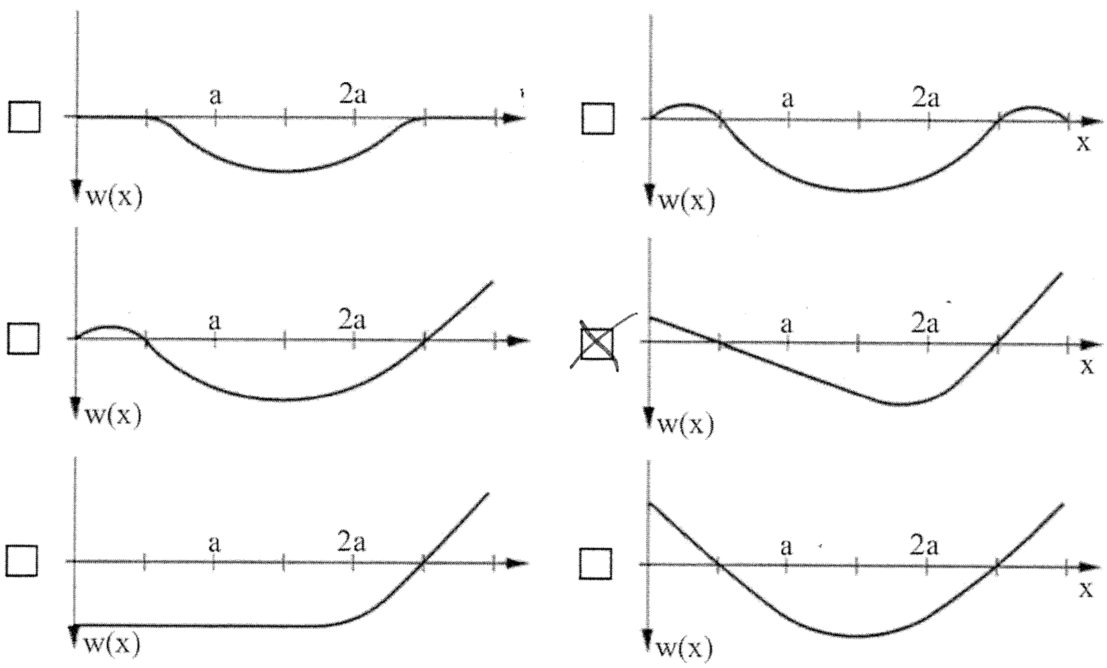


e) Vervollständigen Sie die Differentialgleichung der Biegelinie $w(x)$ und geben Sie die Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten an.

$$w''(x) = -\frac{1}{EI} M(x)$$

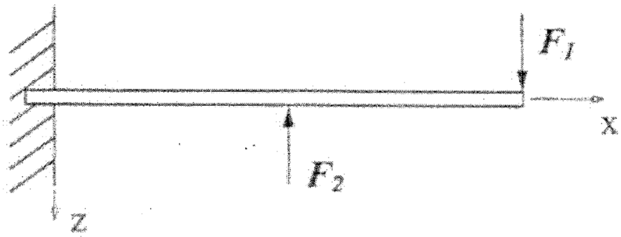
Randbedingungen: $w\left(\frac{a}{2}\right) = 0$, $w\left(\frac{5}{2}a\right) = 0$

f) Kreuzen Sie die resultierende Biegelinie für $F = \frac{1}{2}q_0 a$ an.

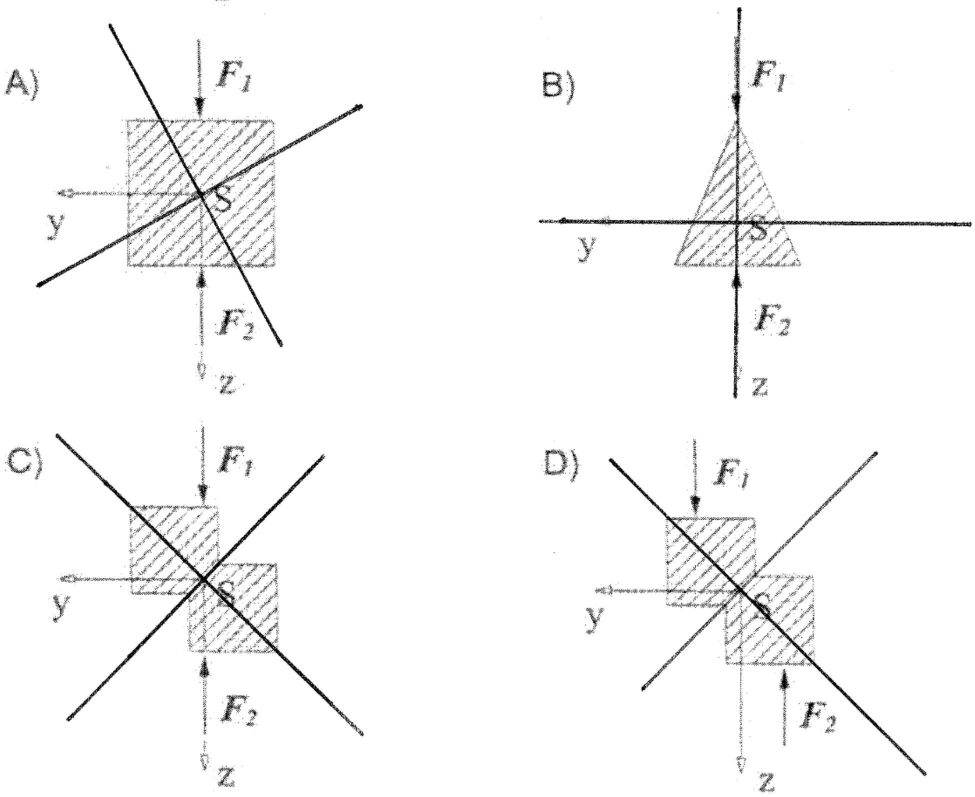


Aufgabe 2: Prüfungsaufgabe Sommersemester 2003

Für einen Balken stehen die Querschnitte A bis D zur Auswahl. Zeichnen Sie in die Skizzen die Hauptträgheitsachsen in der yz-Ebene durch den Schwerpunkt S ein.



alle rechtwinkligen Achsen durch S bilden HAS

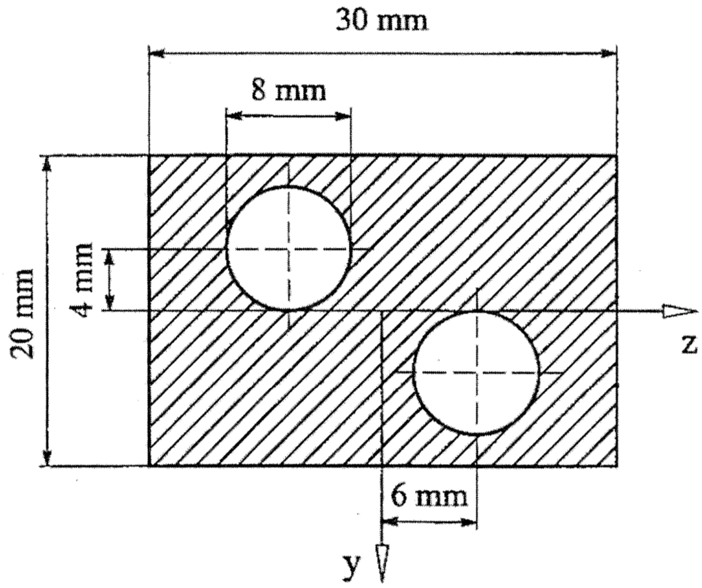


Klassifizieren Sie die Belastungsfälle und den Spannungszustand.

Fall	Biegung			Torsion
	reine	gerade	schiefe	
A		X		
B		X		
C			X	
D			X	X

Aufgabe 3: Prüfungsaufgabe Wintersemester 2001/2002

Beim dargestellten Rechteckprofil wurden punktsymmetrisch zum Koordinaten–ursprung zwei Bohrungen vorgenommen.



a) Berechnen Sie die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sowie das Flächendeviationsmoment I_{yz}.

I_y = $(4{,}5 \cdot 10^4 - 1280\pi)\ \text{mm}^4$

I_z = $(2{,}0 \cdot 10^4 - 640\pi)\ \text{mm}^4$

I_{yz} = $+768\pi\ \text{mm}^4$

b) Entscheiden Sie ohne Rechnung, welche Orientierung der Hauptträgheitsachsen die richtige ist.