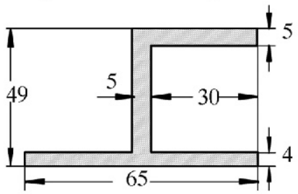
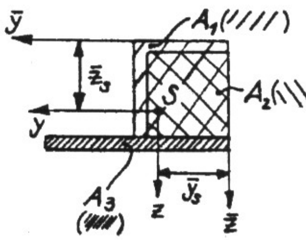
Aufgabe 11: Für das gezeichnete Profil sind die Lage des Schwerpunkts S, die auf S bezogenen Hauptträgheitsmomente und die Lage der Hauptträgheitsachsen zu bestimmen. Maße in mm.



1. Lage des Flächenschwerpunktes S



Der Schwerpunkt $(\bar{y}_S, \bar{z}_S)$ wird bezüglich des Koordinatensystems $\{\bar{y}, \bar{z}\}$ bestimmt. Das Profil kann dazu als zusammengesetzte Fläche mit den Teilflächen A_1, A_2, A_3 betrachtet werden (A_2 zählt in der Rechnung negativ).

Für den Schwerpunkt zusammengesetzter Flächen gilt

$$\underline{r}_S \sum_i A_i = \sum_i \underline{r}_{Si} A_i \quad , \quad \text{oder} \quad \bar{y}_S = \frac{1}{\sum_i A_i} \sum_i \bar{y}_{Si} A_i$$

$$\bar{z}_S = \frac{1}{\sum_i A_i} \sum_i \bar{z}_{Si} A_i \quad .$$

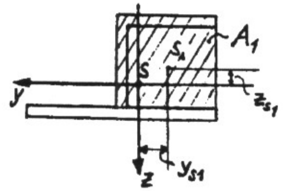
Zwischenergebnisse :

Fläche	$\bar{y}_{Si}$ (mm)	$\bar{z}_{Si}$ (mm)	A_i (mm²)	$\bar{y}_{Si} A_i$ (mm³)	$\bar{z}_{Si} A_i$ (mm³)
1	17,5	22,5	1575	27562,5	35437,5
2	15,0	25,0	-1200	-18 000	-30 000
3	32,5	47,0	260	8 450	12220
Σ	—	—	635	18 000	17 620

Mit den angegebenen Zwischenergebnissen erhält man

$$\bar{y}_S = \frac{18\,000}{635}\,\text{mm} = 28{,}4\ \text{mm} \quad , \quad \bar{z}_S = \frac{17\,620}{635}\,\text{mm} = 27{,}8\ \text{mm}$$

2. Auf den Schwerpunkt S bezogene Hauptträgheitsmomente



Zunächst werden die Flächenträgheitsmomente und das Deviationsmoment bezüglich eines Koordinatensystems $\{y, z\}$ im Schwerpunkt S bestimmt. Aus der Addition der Anteile der Teilflächen und Berücksichtigung des Steinerschen Satzes erhält man

$$J_y = J_{1y} + z_{S1}^2 A_1 + J_{2y} + z_{S2}^2 A_2 + J_{3y} + z_{S3}^2 A_3 \quad ,$$
$$J_z = J_{1z} + y_{S1}^2 A_1 + J_{2z} + y_{S2}^2 A_2 + J_{3z} + y_{S3}^2 A_3 \quad ,$$
$$J_{yz} = -y_{S1} z_{S1} A_1 - y_{S2} z_{S2} A_2 - y_{S3} z_{S3} A_3 \quad .$$

Dabei sind J_{iy}, J_{iz}, $i = 1(1)3$ die Flächenträgheitsmomente der Teilflächen bezüglich eines Koordinatensystems $\{y_i, z_i\}$ im jeweiligen Teilflächen-Schwerpunkt S_i, der im Koordinatensystem $\{y, z\}$ die Koordinaten y_{Si}, z_{Si} hat.
Mit den entsprechenden Koordinaten im System $\{\bar{y}, \bar{z}\}$ findet man für die Koordinaten der Teilflächen-Schwerpunkte im System $\{y, z\}$

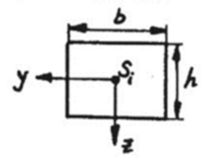
$$y_{Si} = \bar{y}_{Si} - \bar{y}_S \quad , \quad z_{Si} = \bar{z}_{Si} - \bar{z}_S \quad .$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich

$$y_{S1} = -10{,}9\ \text{mm} \quad , \quad y_{S2} = -13{,}4\ \text{mm} \quad , \quad y_{S3} = 4{,}1\ \text{mm}$$
$$z_{S1} = -5{,}3\ \text{mm} \quad , \quad z_{S2} = -2{,}8\ \text{mm} \quad , \quad z_{S3} = 19{,}2\ \text{mm} \quad .$$

Bei den einzelnen Teilflächen handelt es sich um Rechtecke, deren Trägheitsmomente bezgl. der Symmetrieachsen aus

$$J_{iy} = \frac{1}{12}\, b h^3 \;,\quad J_{iz} = \frac{1}{12}\, h b^3$$



bestimmt werden können.

Für die Teilflächen A_1, A_2, A_3 ergibt sich mit den gegebenen Abmessungen

$$J_{1y} = \frac{1}{12}\cdot 35\cdot 45^3\,mm^4 = 266\cdot 10^3\,mm^4$$
$$-\,J_{2y} = \frac{1}{12}\cdot 30\cdot 40^3\,mm^4 = 160\cdot 10^3\,mm^4$$
$$J_{3y} = \frac{1}{12}\cdot 65\cdot 4^3\,mm^4 = 0{,}35\cdot 10^3\,mm^4$$
$$J_{1z} = \frac{1}{12}\cdot 45\cdot 35^3\,mm^4 = 161\cdot 10^3\,mm^4$$
$$-\,J_{2z} = \frac{1}{12}\cdot 40\cdot 30^3\,mm^4 = 90\cdot 10^3\,mm^4$$
$$J_{3z} = \frac{1}{12}\cdot 4\cdot 65^3\,mm^4 = 91{,}5\cdot 10^3\,mm^4 \,.$$

Damit erhält man schließlich für die Trägheitsmomente und das Deviationsmoment des Profils bezüglich des Koordinatensystems $\{y, z\}$ im Flächenschwerpunkt S:

$$J_y = 237{,}1\cdot 10^3\,mm^4$$
$$J_z = 138{,}5\cdot 10^3\,mm^4$$
$$\underline{J_{yz} = -66{,}5\cdot 10^3\,mm^4} \,.$$

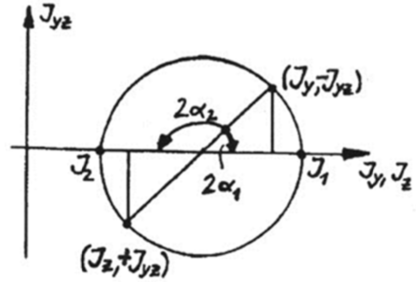
3. Hauptträgheitsmomente und Lage der Hauptträgheitsachsen

Die Hauptträgheitsmomente und die Lage der Hauptträgheitsachsen können mit Hilfe des Mohrschen Trägheitskreises bestimmt werden.

Dabei macht man von den folgenden Analogien zum Mohrschen Spannungskreis Gebrauch:

$$J_y \mathrel{\hat{=}} \sigma_y \;,\quad J_z \mathrel{\hat{=}} \sigma_z \;,\quad J_{yz} \mathrel{\hat{=}} \tau_{yz}$$

Skizze des Mohrschen Trägheitskreises:



Die Hauptträgheitsmomente J_1, J_2 sowie der Winkel α_1 können auch aus den Beziehungen

$$J_{1/2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}$$

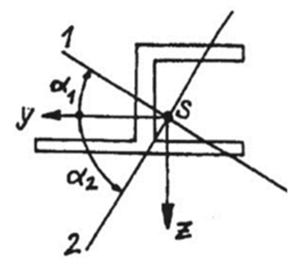
$$\tan(2\alpha_1) = \frac{2\,J_{yz}}{J_y - J_z}$$

bestimmt werden.

Man erhält schließlich

$$\underline{J_1 = 271{,}0\cdot 10^3\,mm^4 \;,\quad J_2 = 105\cdot 10^3\,mm^4}$$
$$\underline{\alpha_1 = -26{,}75^\circ}$$

Wie im Mohrschen Spannungskreis wird der Winkel α_1 von der y-Achse abgetragen.

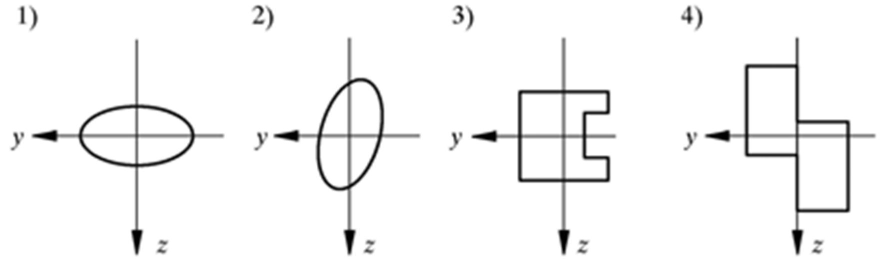


Aufgabe 13: Es sind vier verschiedene Flächen gegeben.

Überlegen Sie, ohne lange zu rechnen;

a) Bei welcher Fläche ist $I_y < I_z$?

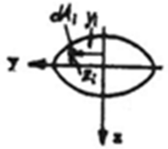
b) Bei welcher Fläche ist das Deviationsmoment $I_{yz} < 0$, $I_{yz} = 0$ oder $I_{yz} > 0$?



Flächenträgheitsmomente : $I_y = \int_A z^2 dA$, $I_z = \int_A y^2 dA$

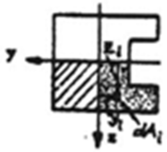
Deviationsmoment : $I_{yz} = -\int_A yz\, dA$

a) Entscheidend ist der quadratische Abstand von Flächenelementen von derjenigen Achse, bezüglich derer das entsprechende Flächenträgheitsmoment gebildet wird.



Fläche 1 : Es gibt mehr Flächenelemente, für die $y_i > z_i$ gilt als umgekehrt.
Daher : $I_z = \int_A y^2\, dA > I_y = \int_A z^2 dA$

Fläche 2 : Bei Fläche 2 gibt es mehr Flächenelemente mit $z_i > y_i$ als umgekehrt, daher $I_y > I_z$.



Fläche 3 : In der schraffierten Teilfläche ist $I_y = I_z$.
In der gepunkteten Teilfläche gibt es mehr Flächenelemente, für die $z_i > y_i$ gilt als umgekehrt. Daher : $I_y > I_z$.

Fläche 4 : Es gibt mehr Flächenelemente, für die $z_i > y_i$ gilt als umgekehrt. Daher ist $I_y > I_z$.

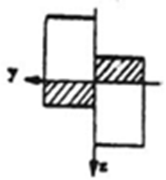
Nur bei Fläche 1 ist $I_y < I_z$.

b) Deviationsmomente

Fläche 1 : $I_{yz} = 0$. Die Koordinatenachsen fallen mit geometrischen Symmetrieachsen zusammen und sind daher Hauptträgheitsachsen.

Fläche 2 : Anteile zu $I_{yz} = -\int_A yz\, dA$ aus den schraffierten Teilflächen sind negativ (y_i und z_i beide pos. oder beide neg.) und überwiegen betragsmäßig die positiven Anteile der nicht-schraffierten Teilflächen. Daher ist $I_{yz} < 0$.

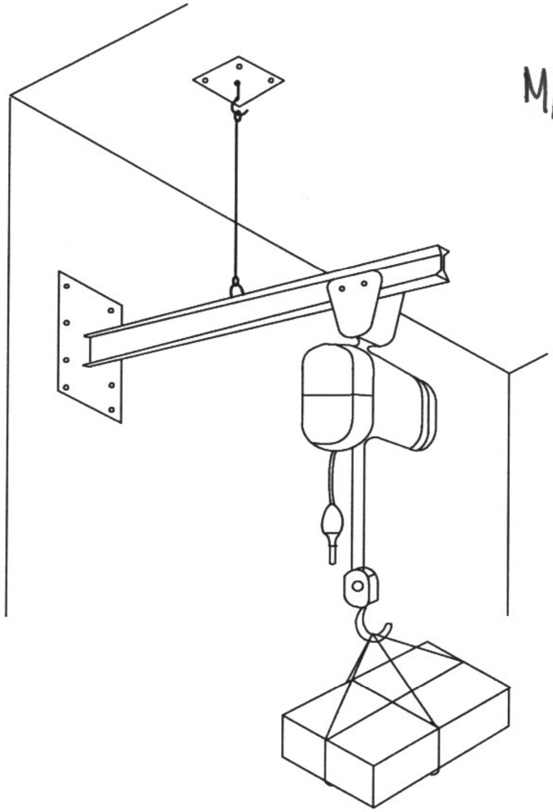
Fläche 3 : $I_{yz} = 0$. Koordinatensystem ist Hauptachsensystem.



Fläche 4 : Anteile zu $I_{yz} = -\int_A yz\, dA$ aus den nicht-schraffierten Teilflächen sind positiv (y pos. und z neg. oder umgekehrt) und betragsmäßig größer als die negativen Anteile aus den schraffierten Teilflachen.
Daher ist $I_{yz} > 0$.

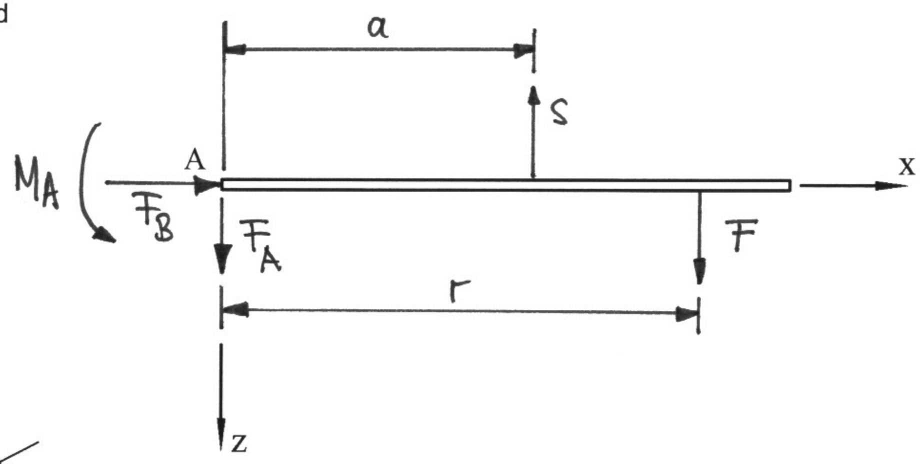
Ein Werkstattkran besteht aus einem waagerechten, einseitig eingespannten I-Träger (Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I, Länge $2a$) und einer Laufkatze.

Der Träger ist in seiner Mitte noch durch ein vertikales Stahlseil (Elastizitätsmodul E_s, Querschnittsfläche A_s) gegen die Decke abgehängt. Im unverformten Zustand der Konstruktion hat das Seil die Länge L.
Die Eigengewichte von Träger und Seil seien vernachlässigbar.
Die Gewichte von Laufkatze und Last können in einer Einzelkraft $\mathbf{F}$ im variablen Abstand r von der Einspannstelle A zusammengefasst werden.



a) Tragen Sie am Balken die eingeprägten Kräfte und die Lagerreaktionen F_A, M_A ein (F_A senkrecht zur x-Achse), und ersetzen Sie das Seil durch die äquivalente Schnittkraft S. Ergänzen Sie die Skizze um die geometrischen Abmessungen.

Skizze:



b) Berechnen Sie die Lagerreaktionen F_A, M_A.
(Lassen Sie S als vorläufig unbekannt stehen)

$F_A = S - F$ $\qquad$ $M_A = rF - aS$

c) Bestimmen Sie die Querkraft $Q(x)$, das Biegemoment $M(x)$, die erste Ableitung der Biegelinie $w'(x)$ und die Biegelinie $w(x)$ mit Hilfe von Klammerfunktionen. Setzen Sie die Ergebnisse von b) ein.

$$Q(x) = F - S + S\{x-a\}^0 - F\{x-r\}^0$$

$$M(x) = -rF + aS + (F-S)\{x\}^1 + S\{x-a\}^1 - F\{x-r\}^1$$

$$EIw'(x) = (rF - aS)x + \frac{1}{2}(S-F)x^2 - \frac{1}{2}S\{x-a\}^2 + \frac{1}{2}F\{x-r\}^2 + \cancelto{0,\; w'(0)=0}{C_1}$$

$$EIw(x) = \frac{1}{2}(rF - aS)x^2 + \frac{1}{6}(S-F)x^3 - \frac{1}{6}S\{x-a\}^3 + \frac{1}{6}F\{x-r\}^3 + \cancelto{0,\; w(0)=0}{C_2}$$

d) Wie groß ist der Biegepfeil f in der Balkenmitte?

$$EIf = -\frac{1}{3}a^3S + \frac{1}{6}\left(3ra^2 - a^3 + \{a-r\}^3\right)F$$

e) Wie groß ist die Dehnung ε des Seils?

$$\varepsilon = \frac{f}{L} = \frac{-2a^3S + (3ra^2 - a^3 + \{a-r\}^3)F}{6EIL}$$

f) Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Längenänderung ε und der Spannung σ_s im Seil an (Hookesches Gesetz).

$$\sigma_s = E_s\varepsilon \quad \Rightarrow \quad S = E_s A_s \frac{f}{L}$$

g) Berechnen Sie die Seilkraft S.

$$S = \frac{1}{2a^3}\,\frac{3ra^2 - a^3 + \{a-r\}^3}{1 + \frac{3EIL}{E_s A_s a^3}}\,F$$

$$= \frac{E_s A_s F}{2a^3 E_s A_s + 6EIL}\left(3ra^2 - a^3 + \{a-r\}^3\right)$$

h) Die Seilkraft nimmt mit wachsender Entfernung der Laufkatze von der Einspannstelle beständig zu.
Wie groß ist die maximale Seilkraft?

$$S_{max} = \frac{5F}{2\left(1 + \frac{3EIL}{E_s A_s a^3}\right)}$$

i) Skizzieren Sie den Querkraft- $Q(x)$ und Momentenverlauf $M(x)$ für die Werte $r = \frac{a}{2}$ und $S = \frac{2}{3}F$.