



## Technische Mechanik II

Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. P. Eberhard

Prof. Dr.-Ing. M. Hanss

Prof. Dr.-Ing. J. Fehr

**Vorlesung:** Die Vorlesung wird für die Studierenden der Bachelorstudiengänge Maschinenbau, Mechatronik, Technologiemanagement, Technische Kybernetik, Fahrzeugtechnik, Chemie- und Bioingenieurwesen, Mathematik und Informatik gehalten.

**Übungen:** Die Vorlesung wird durch Vortragsübungen ergänzt, die unmittelbar auf den Vorlesungsstoff abgestimmt sind. Zusätzlich findet ein Seminarbetrieb statt. Dort lösen die Studierenden unter individueller Anleitung selbständig Aufgaben. Die Seminaristischen Übungen finden in Gruppen statt.

**Sprechstunden:** Zur Beratung der Studierenden finden im Sprechstundenbereich, vor Zimmer 4.155 des Instituts, Dienstag und Donnerstag von 13.00 bis 14.00 Uhr Sprechstunden statt. Diese Sprechstunden werden sowohl in der Vorlesungszeit als auch, in zeitlichem Zusammenhang mit der Modulprüfung, in der vorlesungsfreien Zeit angeboten. Fragen, die in den Vorlesungen und Übungen offengeblieben sind, können dort besprochen werden. Darüber hinaus werden fachliche Auskünfte am Institut durch Herrn Niklas Fahse, M.Sc. (Raum 3.107) erteilt.

**Ort/Zeit:** Vorlesungstermine und Hörsaaleinteilung sind unten aufgeführt. Die Lehrveranstaltungen werden in diesem Semester wieder in Präsenz angeboten. Der Wechsel zwischen Übung und Vorlesung wird im Semesterplan bekannt gegeben.

Vorlesungen und Vortragsübungen		
Dienstag 11.30 - 13.00 Uhr, V 53.01	mach, cbiw, ft, tema,	Vorlesung: Prof. Eberhard,
Freitag 11.30 - 13.00 Uhr, V 53.01	mecha, math, info, kyb	Übung: Niklas Fahse

Seminaristische Übungen		
G01	Donnerstag 08:00 – 09:30 Uhr, V 57.02	ft
G02	Donnerstag 08:00 – 09:30 Uhr, V 47.04	tema
G03	Donnerstag 15:45 – 17:15 Uhr, V 47.03	mach
G04	Donnerstag 15:45 – 17:15 Uhr, V 55.01	mecha, kyb, cbiw, math, info



## Hinweise

**Institut:** Die Räume des Instituts für Technische und Numerische Mechanik befinden sich im Ingenieurwissenschaftlichen Zentrum (IWZ), Pfaffenwaldring 9, 4.Stock.

**www:** <https://www.itm.uni-stuttgart.de/>

**Unterlagen:** Zur Kennzeichnung der vom Institut herausgegebenen schriftlichen Unterlagen werden folgende Kennbuchstaben – gefolgt von der laufenden Nummer – verwendet:

M ... Merkblätter zur Vorlesung	P ... Prüfungen
A ... Arbeitsblätter	L ... Lösungen
Ü ... Übungsaufgaben	

**Merkblätter:** Die Merkblätter können im Internet heruntergeladen werden: [https://www.itm.uni-stuttgart.de/lehre/lehrveranstaltungen/technische\\_mechanik\\_II/](https://www.itm.uni-stuttgart.de/lehre/lehrveranstaltungen/technische_mechanik_II/)

**Aufgaben:** In den Vortragsübungen werden Aufgaben aus einer Aufgabensammlung (Ü) vorgerechnet. Auch im Seminar werden Aufgaben aus dieser Aufgabensammlung sowie weitere Arbeitsblätter (A) behandelt. Die Aufgabensammlung (Ü) und Aufgabenblätter (A) sind im Internet auf den Institutsseiten erhältlich. Die Lösungen der verbleibenden Aufgaben werden ausgehängt.

**Unterlagen im Internet:** Organisatorische Hinweise sowie aktuelle Unterlagen zur TM II finden Sie auch im Internet unter [https://www.itm.uni-stuttgart.de/lehre/lehrveranstaltungen/technische\\_mechanik\\_II/](https://www.itm.uni-stuttgart.de/lehre/lehrveranstaltungen/technische_mechanik_II/)

**Prüfungsvorleistungen/Scheine:** Sind seit Einführung des Bachelors nicht mehr erforderlich.

**Prüfung:** Für das Modul TM II + TM III findet eine gemeinsame Prüfung statt. Der Termin der Prüfung im Frühjahr 2024 steht noch nicht fest und ist im Laufe des Wintersemesters 2023/24 beim Prüfungsamt zu erfahren.

**Prüfungsanmeldung:** Die Anmeldung erfolgt immer über das Prüfungsamt.

**Hilfsmittel:** In der Prüfung sind als Hilfsmittel ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.



## **Technische Mechanik II**

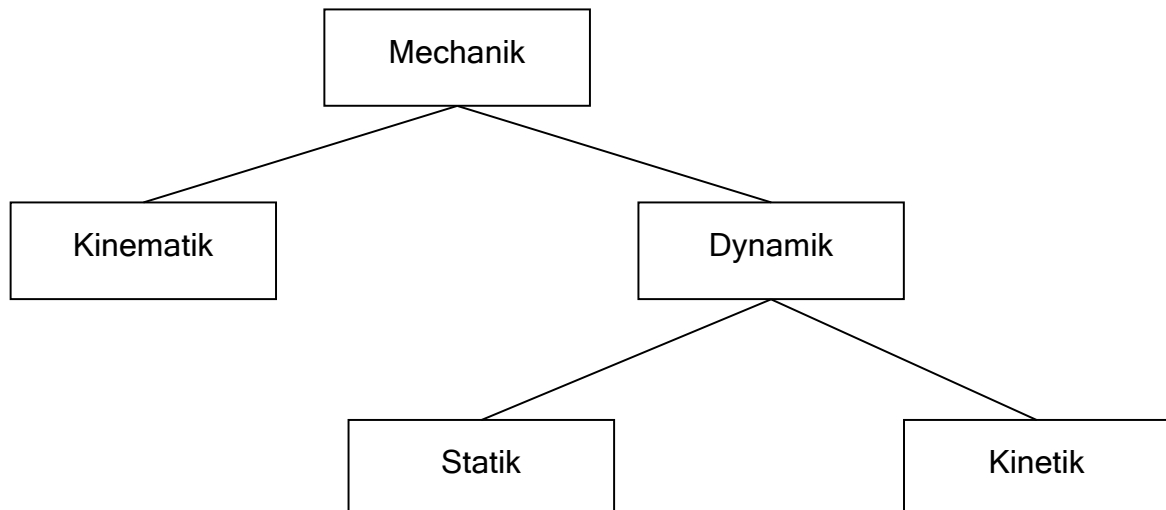
- 3. Elasto-Statik
  - 3.1. Spannungen und Dehnungen
  - 3.2. Zug und Druck
  - 3.3. Torsion von Wellen
  - 3.4. Technische Biegelehre
  - 3.5. Überlagerung einfacher Belastungsfälle
  - 3.6. Knickung
  
- 4. Kinematik
  - 4.1. Punktbewegungen
  - 4.2. Relativbewegungen
  - 4.3. Bewegungen von Punktsystemen
  - 4.4. Kinematik des starren Körpers



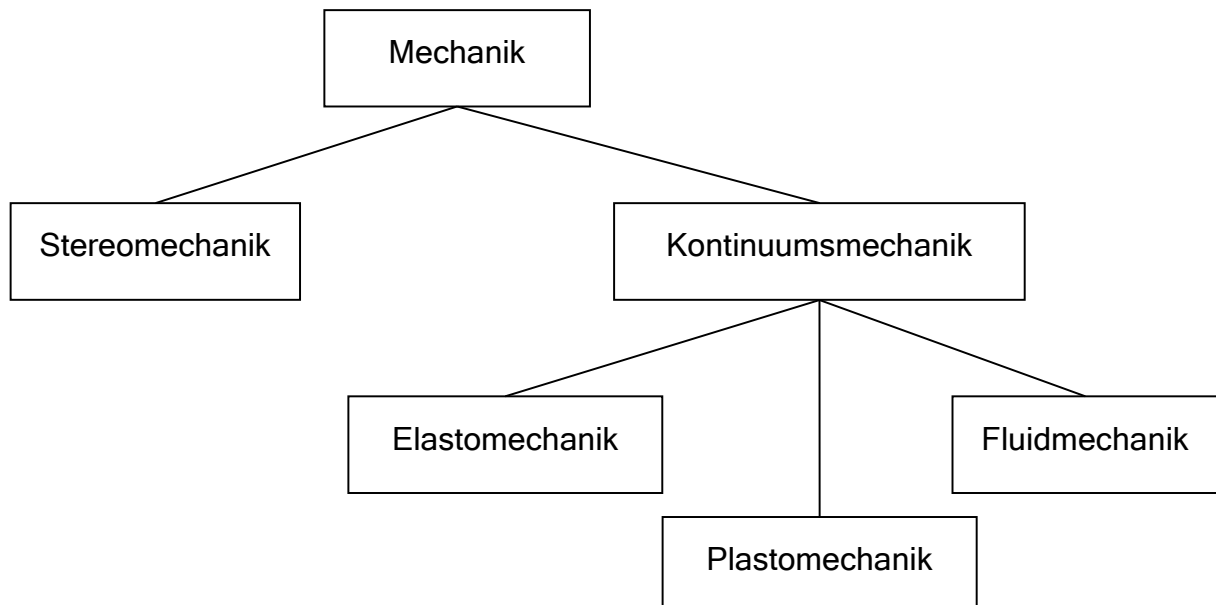
## Einteilung der Mechanik

Die Technische Mechanik kann man nach den physikalischen Vorgängen oder nach den Modellkörpern einteilen.

### A) Physikalische Vorgänge



### B) Eigenschaften der Modellkörper



In den Vorlesungen werden die folgenden Gebiete behandelt:

- Technische Mechanik I : Stereostatik
- Technische Mechanik II : Elastostatik, Kinematik
- Technische Mechanik III : Kinetik
- Technische Mechanik IV : Elastomechanik, Kontinuum



## Lösung von Mechanik–Aufgaben

Bei der Lösung von **Mechanik–Aufgaben** unterscheidet man die folgenden fünf Schritte:

1. Formulieren der technischen Aufgabe.
2. Auswahl eines mechanischen Ersatzmodells.  
(Massenpunkt, starrer Körper)
3. Mathematische Beschreibung des Ersatzmodells durch Grundgesetze.  
(Vektoren, Tensoren, Impuls– und Drallsatz)
4. Mathematische Lösung des Problems.  
(Integration von Differentialgleichungen,  
Lineare Gleichungssysteme, Schwingungen)
5. Technische Deutung der Ergebnisse.  
(Vergleich mit Experiment)

Diese Schritte kennzeichnen die Problemlösung in der Praxis.  
Übungsaufgaben beschränken sich häufig auf einzelne Schritte.



## Literatur

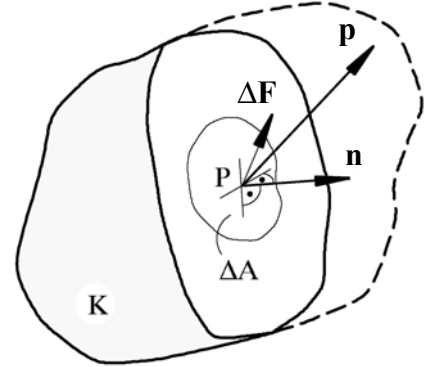
- Gross, D.; Hauger, W.; Schröder, J.; Wall, W.: Technische Mechanik. Band 1/2/3/4.  
Berlin: Springer, 2011/2012/2012/2012.  
(€ 22,99/19,95/19,95/29,95)
- Hauger, W.; Mannl, V.; Wall, W.: Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3. Berlin:  
Springer 2011. (€ 24,95)
- Ehlers, W.; Gross, D.; Wriggers, P.: Formeln und Aufgaben zur Technischen  
Mechanik. Band 1 und 2, Berlin: Springer, 2011/2011. (€ 17,99/14,95)
- Hagedorn, P.: Technische Mechanik. Band I/II/III.  
Frankfurt: Verlag Harri Deutsch, 2008/2006/2008.  
(€ 19,80/19,80/19,80)
- Hibbeler, R.C.: Technische Mechanik 3 - Dynamik.  
München: Pearson Studium, 2012 (€ 49,95)  
(einige Fotos aus der Vorlesung werden mit Genehmigung des  
Verlages aus diesem Buch genommen)
- Irretier, H.: Grundlagen der Schwingungstechnik 1.  
Wiesbaden: Vieweg, 2000.
- Magnus, K.; Müller-Slany, H. H.: Grundlagen der Technischen Mechanik. 7.  
Auflage.  
Stuttgart: Teubner, 2005. (€ 24,90)
- Szabo, I.: Einführung in die Technische Mechanik. 8. Auflage.  
Berlin: Springer, 2002. (€ 174,99)
- Taylor, J. R.: Klassische Mechanik – Ein Lehr- und Übungsbuch.  
München: Pearson Studium, 2014. (Euro 49,90)
- Weidemann, H.-J.; Pfeiffer, F.: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und  
Lösungen. 3. Auflage. Stuttgart: Teubner, 2006. (€ 29,90)
- Ziegler, F.: Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper.  
3. Auflage. Wien: Springer, 1998. (€ 49,50)

## Der ebene Spannungszustand (Mohrscher Spannungskreis)

Zur Untersuchung des Spannungszustands in einem Körper  $K$  betrachtet man einen beliebigen Punkt  $P$ .

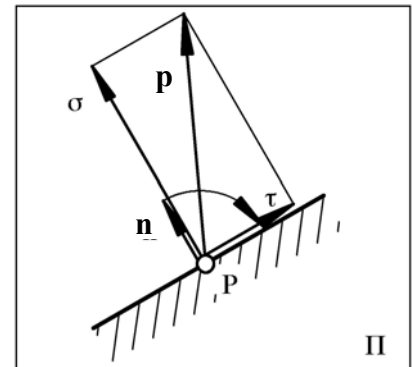
Legt man einen Schnitt durch  $P$ , so ergibt sich an der Schnittebene, deren räumliche Ausrichtung durch ihren nach außen weisenden Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}$  festgelegt wird, ein Spannungsvektor  $\mathbf{p}$ . Dieser hängt von der Schnittrichtung ab.

Ist  $\Delta A$  eine den Punkt  $P$  enthaltende Fläche in der Schnittebene und  $\Delta \mathbf{F}$  die an  $\Delta A$  angreifende resultierende Kraft, so ist der Spannungsvektor als  $\mathbf{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$  definiert.

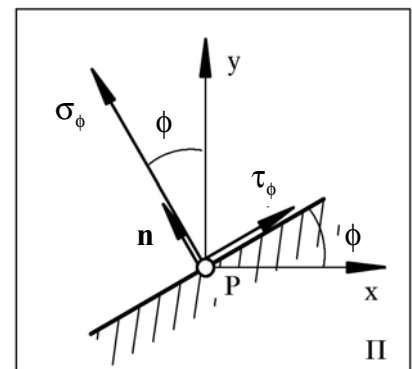


Liegen die Spannungsvektoren bei jeder beliebigen (räumlichen) Schnittrichtung in ein und derselben Ebene  $\Pi$ , so spricht man von einem (in dieser Ebene  $\Pi$ ) **ebenen Spannungszustand**. Es genügt dann, nur Schnitte senkrecht zu  $\Pi$  zu betrachten.

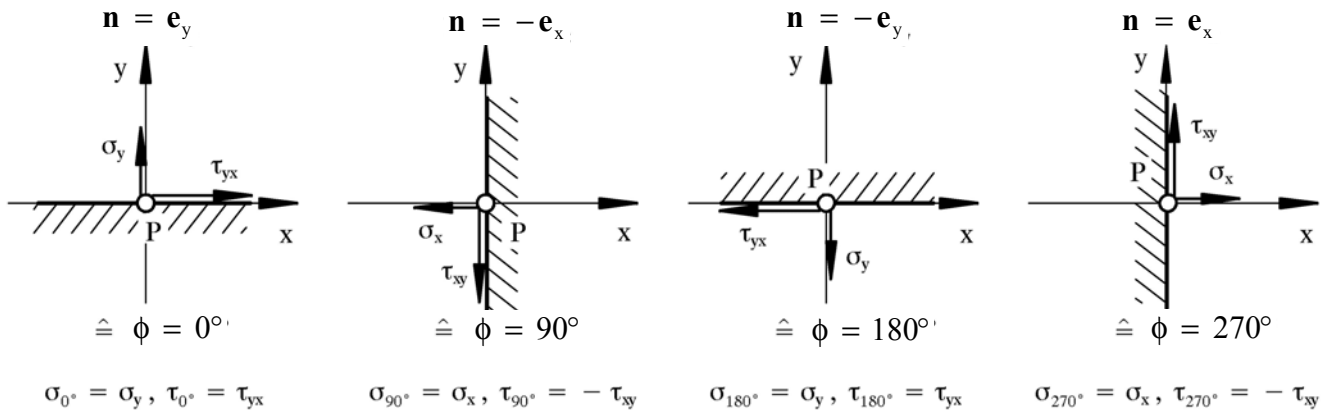
Der Mohrsche Spannungskreis beschreibt in diesem Fall die Abhängigkeit des Spannungsvektors  $\mathbf{p}$  von der Schnittrichtung bei festgehaltenem Punkt  $P$ . Der Spannungsvektor  $\mathbf{p}$  wird dazu in zwei Richtungen normal und tangential zur Schnittrichtung zerlegt. Das ergibt die Normalspannung  $\sigma$  und die Schubspannung  $\tau$ . Die Normalspannung  $\sigma$  ist **in Richtung von  $\mathbf{n}$**  (also nach außen) positiv definiert. Die positive Richtung der Schubspannung  $\tau$  ergibt sich durch **Drehung von  $\mathbf{n}$  im Uhrzeigersinn um  $90^\circ$** .



Die Schnittrichtung wird mit Hilfe eines Winkels  $\phi$  und eines kartesischen  $(x, y)$ -Koordinatensystems in  $\Pi$  mit Ursprung in  $P$  angegeben. Dabei ist  $\phi$  derjenige Winkel, um den der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  gegenüber der positiven  $y$ -Achse im **mathematisch positiven** Sinn (= gegen den Uhrzeiger) gedreht ist. Die Spannungen an der Schnittfläche mit dem Winkel  $\phi$  heißen  $\sigma_\phi$  und  $\tau_\phi$ .



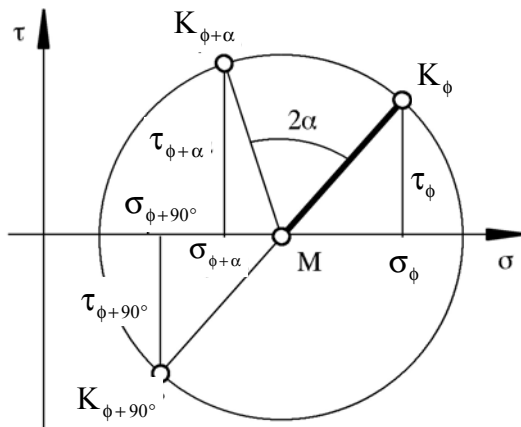
Für Schnittrichtungen parallel zu den Koordinatenachsen verwendet man auch die Bezeichnungen  $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{yx}$ . Der erste Index gibt dabei jeweils die Richtung von  $\mathbf{n}$ , der zweite die Richtung der Spannung selber an. Dabei gelten folgende Vorzeichenregelungen und Zusammenhänge mit den bisherigen Bezeichnungen  $\sigma_\phi, \tau_\phi$ . (Gezeichnet sind jeweils die positiven Richtungen der Spannungen  $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$  und  $\tau_{yx}$  )



Es gilt stets  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  (Satz von der Gleichheit einander zugeordneter Schubspannungen).

Sind bei einem ebenen Spannungszustand die zu zwei verschiedenen Schnittrichtungen gehörenden Spannungen bekannt, so ist der ganze Spannungszustand in P eindeutig bestimmt.

Trägt man in einem  $(\sigma, \tau)$ -Koordinatensystem die zu beliebigen Winkeln  $\phi$  gehörenden Punkte  $K_\phi(\sigma_\phi, \tau_\phi)$  ein, so liegen diese Punkte alle auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M auf der  $\sigma$ -Achse, dem sogenannten **Mohrschen Spannungskreis**.

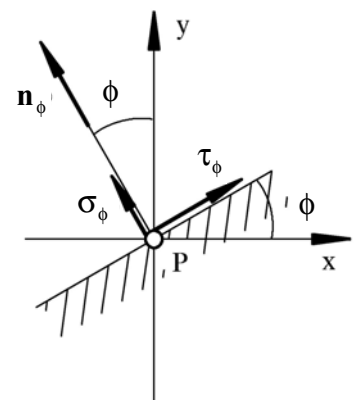
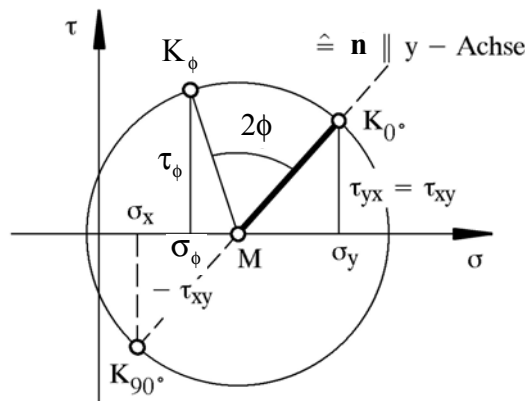


Kennt man diesen Kreis und die Spannungen  $\sigma_\phi, \tau_\phi$  zu einem Schnittwinkel  $\phi$ , so erhält man die zum Schnittwinkel  $\phi + \alpha$  gehörenden Spannungen  $\sigma_{\phi + \alpha}, \tau_{\phi + \alpha}$ , indem man  $K_\phi$  um M **um den Winkel  $2\alpha$**  gegen den Uhrzeiger dreht, also **gleichsinnig** mit der Drehung der Schnittnormalen. Daher liegen je zwei zu aufeinander senkrechten Schnittrichtungen gehörende Punkte  $K_\phi, K_{\phi+90^\circ}$  auf einem Kreisdurchmesser. Umgekehrt läßt sich der Kreismittelpunkt zum Beispiel als arithmetisches Mittel zweier zu aufeinander senkrechten Schnittrichtungen gehörenden Normalspannungen  $\sigma_\phi, \sigma_{\phi+90^\circ}$  konstruieren.

Oft sind in einem Punkt P die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$  bekannt. Man konstruiert dann den Mohrschen Spannungskreis folgendermaßen:

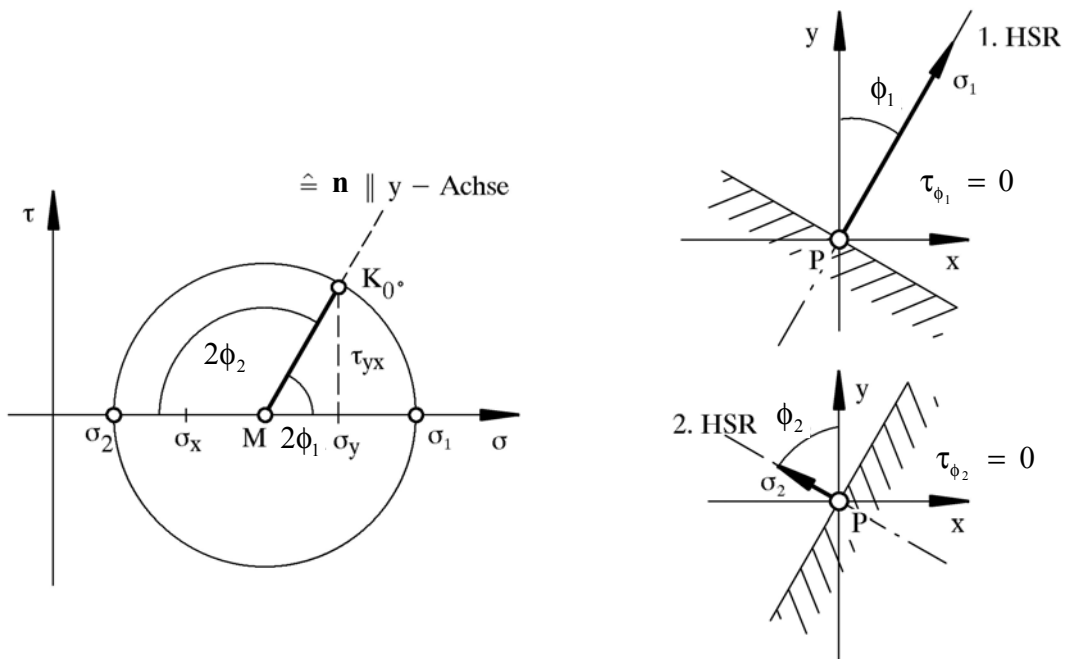
1) M:  $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$

2)  $K_{0^\circ}(\sigma_{0^\circ}, \tau_{0^\circ})$   
 $\sigma_{0^\circ} = \sigma_y$   
 $\tau_{0^\circ} = \tau_{yx} = \tau_{xy}$





Eine ausgezeichnete Rolle spielen die Schnittpunkte des Kreises mit der  $\sigma$ -Achse. Dort verschwinden die Schubspannungen. Die Normalspannungen an den zugehörigen Schnittebenen heißen **Hauptspannungen**  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Dabei ist  $\sigma_1$  als die größere von beiden definiert. Die zugehörigen Schnittrichtungen heißen **Hauptspannungsrichtungen** (HSR). Sie stehen aufeinander senkrecht und werden durch die Winkel  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  festgelegt.

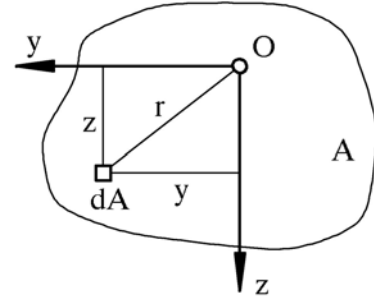


Für die analytische Beschreibung der hier beschriebenen Zusammenhänge siehe Magnus/Müller, 3.1.1.1.

## Quadratische Flächenmomente (Flächenmomente 2. Ordnung)

Für jede Fläche  $A$  lassen sich bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems  $(y, z)$ , das in der Ebene der Fläche liegt, die quadratischen Flächenmomente

$$\left. \begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 \, dA \\ I_z &= \int_A y^2 \, dA \\ I_{yz} &= - \int_A yz \, dA \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



definieren. Die axialen Momente  $I_y$  und  $I_z$  werden auch als Flächenträgheitsmomente und das gemischte Moment  $I_{yz}$  als Deviations- oder Zentrifugalmoment bezeichnet.

Das quadratische Flächenmoment

$$I_p = \int_A r^2 \, dA \quad (2)$$

heißt polares Flächenträgheitsmoment. Wegen  $r^2 = y^2 + z^2$  gilt

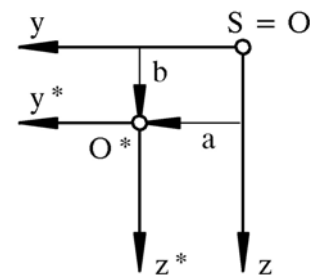
$$I_p = I_y + I_z \quad (3)$$

Beim Übergang zu einem anderen, ebenfalls in der Ebene von  $A$  liegenden Koordinatensystem  $(y^*, z^*)$  ändern sich im allg. die Flächenmomente. Dabei können die beiden Systeme parallelverschoben und / oder gedreht sein.

### Parallelverschiebung:

Liegt der Ursprung  $O$  von  $(y, z)$  im Schwerpunkt  $S$  der Fläche  $A$ , so gilt mit den Gleichungen der Parallelverschiebung  $y^* = y - a$  und  $z^* = z - b$  nach dem Satz von Huygens-Steiner

$$\left. \begin{aligned} I_y^* &= I_y + b^2 A, \\ I_z^* &= I_z + a^2 A, \\ I_{yz}^* &= I_{yz} - a b A. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

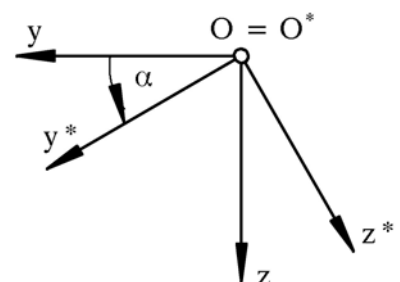


Daraus folgt, daß die Flächenmomente für Achsen durch den Schwerpunkt minimal sind.

### Drehung:

Mit den Gleichungen der Koordinatendrehung um den Winkel  $\alpha$ ,  $y^* = y \cos \alpha + z \sin \alpha$  und  $z^* = -y \sin \alpha + z \cos \alpha$ , folgt

$$\left. \begin{aligned} I_y^* &= \frac{1}{2} (I_y + I_z) + \frac{1}{2} (I_y - I_z) \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha, \\ I_z^* &= \frac{1}{2} (I_y + I_z) - \frac{1}{2} (I_y - I_z) \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha, \\ I_{yz}^* &= -\frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} (5)$$



Das polare Flächenmoment  $I_p$  ist gegenüber Drehungen des Bezugssystems invariant, da es nur von  $r$  abhängt.

Ordnen wir die Flächenmomente in einer Matrix bzw. in einem Tensor 2. Stufe

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_y & I_{yz} \\ I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

an, so sind (5) gerade die Transformationsformeln, die die Komponenten von  $\mathbf{I}$  von System  $(y, z)$  in  $(y^*, z^*)$  transformieren. Dieser Tensor  $\mathbf{I}$  heißt Flächenmomententensor der Fläche  $A$  im Punkt  $O$ . Wegen der Symmetrie des Flächenmomententensors ist eine Hauptachsentransformation möglich, d.h. es gibt ein spezielles Koordinatensystem  $(y_H, z_H)$ , in dem das Deviationsmoment  $I_{yz}$  verschwindet. Die Momente  $I_{yH}$  und  $I_{zH}$  sind dann maximal, sie heißen Hauptflächenmomente 2. Ordnung und die Richtungen der Achsen  $y_H$  und  $z_H$  heißen Hauptachsen von  $\mathbf{I}$ .

Die Hauptachsentransformation kann rechnerisch und zeichnerisch durchgeführt werden:

a) **Rechnerische Transformation**

Aus der Säkulargleichung

$$\det(\mathbf{I} - I\mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{E} \text{ Einheitstensor,}$$

folgt ein Polynom 2. Grades für  $I$ , dessen Lösung die Hauptflächenmomente  $I_{yH}$  und  $I_{zH}$  sind. Die dazugehörigen Hauptrichtungen  $\mathbf{r}_{yH}$  und  $\mathbf{r}_{zH}$  ergeben sich durch Einsetzen von  $I_{yH}$  bzw.  $I_{zH}$  in die Eigenwertgleichungen

$$(\mathbf{I} - I_{yH}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{r}_{yH} = \mathbf{0}, \text{ bzw. } (\mathbf{I} - I_{zH}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{r}_{zH} = \mathbf{0}.$$

Das Hauptachsensystem  $(y_H, z_H)$  geht aus dem System  $(y, z)$  durch Drehung um die  $x$ -Achse mit dem Winkel  $\alpha_H$  hervor.

Durch Ausrechnen der obigen Beziehung folgt für die Hauptflächenmomente

$$I_{yH} = I_1 = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + I_{yz}^2}$$

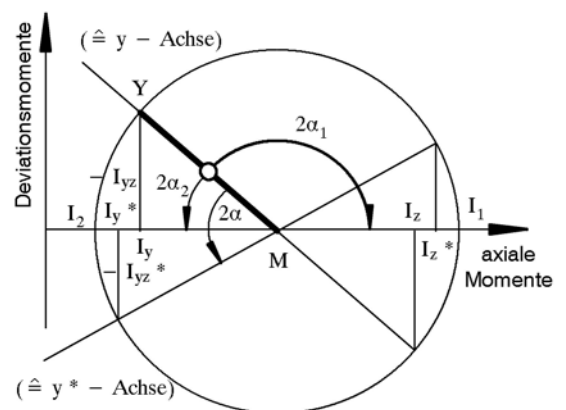
$$I_{zH} = I_2 = \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + I_{yz}^2}$$

und für den Drehwinkel  $\alpha_H$

$$\tan 2\alpha_H = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

b) **Zeichnerische Transformation mit dem Mohrschen Kreis**

Wie beim Hauptspannungsproblem lassen sich die Hauptflächenmomente und die dazugehörigen Hauptachsen graphisch aus dem Mohrschen Kreis gewinnen. Dazu trägt man auf der Abszisse die nach (1) berechneten Flächenmomente  $I_y$  und  $I_z$  ab. Das Deviationsmoment  $-I_{yz}$  wird über  $I_y$  aufgetragen und man kommt so zu zwei Punkten des Kreises. Der Kreis schneidet die Abszisse in den beiden Hauptflächenmomenten  $I_1$  und  $I_2$ , für die  $I_1 > I_2$  gelten soll. Die Winkel  $2\alpha_1$  und  $2\alpha_2$  zwischen  $YM$  ( $\hat{=}$  der  $y$ -Achse in der Zeichnung) und der Abszisse sind die doppelten Drehwinkel, die nötig sind, um die  $y$ -Achse in die 1. bzw. 2. Hauptachse überzuführen.





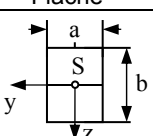
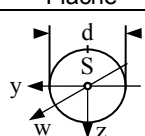
Soll nun bei gegebenem Mohrschen Kreis das Flächen- und das Deviationsmoment bezüglich eines Systems  $(y^*, z^*)$ , das um den Winkel  $\alpha$  gegenüber dem System  $(y, z)$  gedreht ist, bestimmt werden, so ergibt sich der zugehörige Punkt auf dem Mohrschen Kreis, indem man die Gerade YM um  $2\alpha$  im gleichen Sinne dreht.

Das Bestimmen der Hauptachsen wird stark vereinfacht, wenn die Fläche Symmetrieeigenschaften hat:

Jede Symmetrieachse von A durch O ist zugleich Hauptachse von I.

Jede Achse durch O senkrecht zu einer Symmetrieachse von A ist Hauptachse von I.

Die Hauptflächenträgheitsmomente gängiger Flächen bezogen auf Achsen durch den Schwerpunkt sind tabelliert (z.B. Hütte I, 28.Aufl., S.673 ff; Dubbel I, 13.Aufl., S.371 ff).

Fläche	Flächenmoment	Fläche	Flächenmoment
	$I_y = \frac{ab^3}{12}, I_z = \frac{ba^3}{12}$ <p>Quadrat: <math>a = b</math></p>		$I_y = I_z = I_w = \frac{\pi d^4}{64}$



## Kinematische Grundaufgaben für geradlinige Punktbewegungen

Die **Lage** eines bewegten Punktes P wird durch den vom Ursprung O eines ruhenden Koordinatensystems zum Punkt P weisenden Ortsvektor  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{op}(t)$  eindeutig beschrieben.

Die **Geschwindigkeit** des Punktes P wird als zeitliche Änderung des Ortsvektors  $\mathbf{r}(t)$  durch den Geschwindigkeitsvektor definiert

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (1)$$

Die **Beschleunigung** des Punktes P wird als zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}(t)$  durch den Beschleunigungsvektor definiert

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (2)$$

Bei der **geradlinigen** Bewegung entfällt der Vektorcharakter der Gleichungen (1) und (2), sie gehen in skalare Gleichungen über. Wählt man als Bewegungsrichtung z.B. die x-Achse, so erhält man mit der Lagekoordinate x aus (1) und (2) die Gleichungen

$$v(t) = \dot{x}(t), \quad (3)$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t). \quad (4)$$

Für diesen Fall soll im Folgenden die Kinematik, d.h. der Zusammenhang zwischen x, v, a und t betrachtet werden. Ist eine dieser Variablen als Funktion einer anderen gegeben, so können die restlichen Größen daraus bestimmt werden. Dabei treten die anschließend behandelten Aufgabenstellungen häufig auf.

**1. Aufgabe:** Gegeben  $x(t)$ , gesucht  $v(t)$  und  $a(t)$ .

Nach den Definitionen (3) und (4) gilt

$$v(t) = \frac{dx}{dt}, \quad (5)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (6)$$

**2. Aufgabe:** Gegeben  $a(t)$ , gesucht  $v(t)$  und  $x(t)$ .

Aus (6) folgt durch Separieren  $dv = a(t) dt$ . Die bestimmte Integration beider Seiten führt auf

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t) dt \quad \text{oder} \quad v - v_0 = \int_{t_0}^t a(t) dt \quad \text{oder} \quad v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt. \quad (7)$$

In der gleichen Weise folgt aus (5) durch Separieren  $dx = v(t) dt$ , und die Integration liefert

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t) dt \quad \text{oder} \quad x - x_0 = \int_{t_0}^t v(t) dt \quad \text{oder} \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (8)$$

$$\text{oder mit (7)} \quad x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \int_{t_0}^t a(t) dt \right] dt. \quad (9)$$

Hinweis: Bei den Integralen wird zur übersichtlicheren Darstellung für die Integrationsvariable oft keine eigene Bezeichnung eingeführt. Die bestimmte Integration läuft von einem fest vorgegebenen Wert  $x_0$ ,  $v_0$ ,  $t_0$  bis zu dem entsprechenden laufenden Wert x, v, t. Das Ergebnis der Integration ist also eine Funktion der oberen Grenze.



**3. Aufgabe:** Gegeben  $v(t)$ , gesucht  $x(t)$  und  $a(t)$ .

Die Ergebnisse für diese Aufgabe liegen in der Form (8) und (6) bereits vor.

Bei den nun folgenden Mischformen sind die Definitionsgleichungen (5) und (6) durch geeignete Substitutionen so lange umzuformen, bis die Variablen in der gesuchten Abhängigkeit vorliegen und die entsprechende Integrationsvariable auftritt.

**4. Aufgabe:** Gegeben  $a(v)$ , gesucht  $x(v)$  und  $t(v)$ .

Nach der Kettenregel der Differentiation lässt sich (6) auch in der Form

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv dx}{dx dt} = \frac{dv}{dx} v = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} v^2 \quad (10)$$

schreiben. Aus  $a(v) = \frac{dv}{dx} v$  folgt

$$dx = \frac{v}{a(v)} dv \quad \text{oder} \quad x(v) = x_0 + \int_{v_0}^v \frac{v}{a(v)} dv. \quad (11)$$

Weiterhin findet man

$$dt = \frac{dv}{a(v)} \quad \text{oder} \quad t(v) = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)}. \quad (12)$$

**5. Aufgabe:** Gegeben  $a(x)$ , gesucht  $v(x)$  und  $t(x)$ .

Aus (10), d.h.  $a(x) = \frac{dv}{dx} v(x)$ , folgt

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a(x) dx \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^x a(x) dx \quad \text{oder} \quad v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x a(x) dx}. \quad (13)$$

Ebenso gilt  $v(x) = \frac{dx}{dt}$  oder  $dt = \frac{dx}{v(x)}$ . Durch Integration wird daraus

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)} \quad \text{oder mit (13)} \quad t(x) = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{x_0}^x a(x) dx}}. \quad (14)$$

**6. Aufgabe:** Gegeben  $v(x)$ , gesucht  $a(x)$  und  $t(x)$ .

Wie in Aufgabe 5 gilt  $a(x) = v(x) \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx}$ . (15)

Aus (5) folgt

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \quad \text{oder} \quad t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)}. \quad (16)$$

Weitere mögliche Aufgabenstellungen lassen sich in ähnlicher Weise durch Substitution und anschließende Differentiation oder bestimmte Integration lösen.

## Typische Zeitverläufe einachsiger Punktbewegungen

Kinematische Grundgleichungen

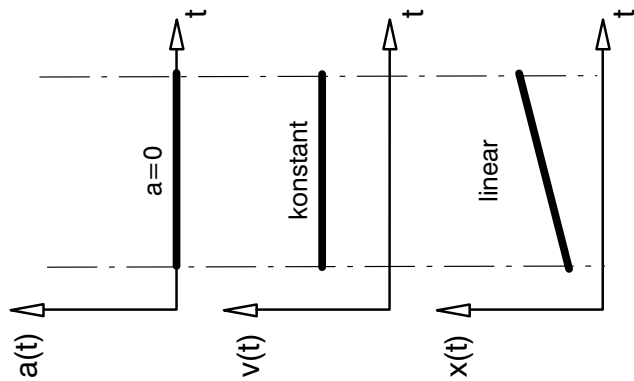
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

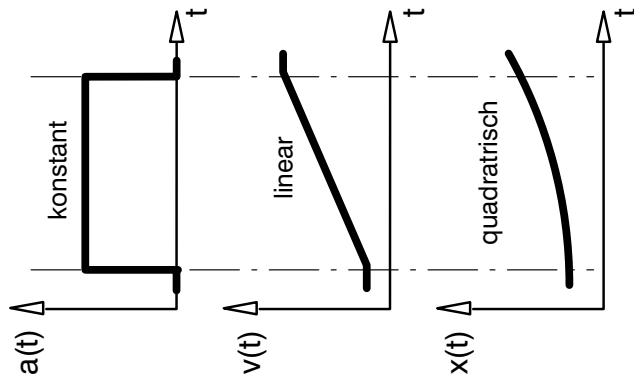
Bemerkung: Kraftstöße sind idealisierte Kräfteinwirkungen, die zu Geschwindigkeits-sprüngen führen.

$a(t)$	$> 0$	$= 0$	$< 0$
$v(t)$	steigend $= 0$	konstant $= 0$	fallend $= 0$
$x(t)$	fallend waagerechte Tangente	fallend konstant	steigend fallend waagerechte Tangente
	Linkskurve	Gerade	Rechtskurve

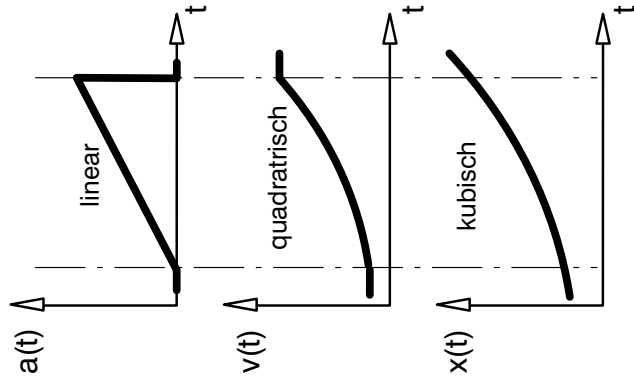
kräftefreie Bewegung



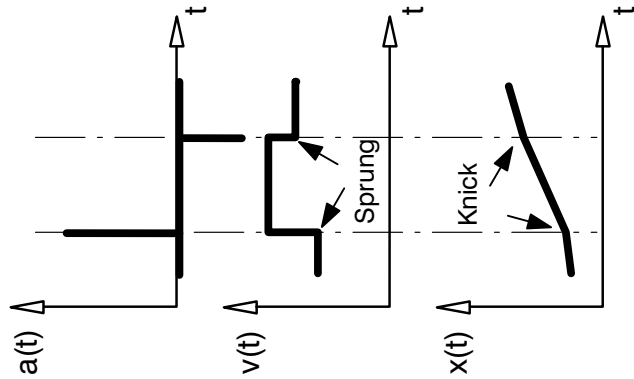
konstante Beschleunigung



linear anwachsende Beschleunigung



Kraftstöße (Impulse)





## Vektoren und Koordinatensysteme

### 1) Koordinatensystem und Darstellung eines Vektors

Zur Darstellung von Vektoren sollen rechtshändige, kartesische Koordinatensysteme mit orthogonalen Einsektoren verwendet werden. Das Koordinatensystem  $\{O, x, y, z\}$  mit dem Ursprung  $O$  und den Einsektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  wird zur Abkürzung durch den Buchstaben  $K$  gekennzeichnet. Ebenso heißt das Koordinatensystem  $\{O', x', y', z'\}$  kurz  $K'$ .

Ein Vektor  $\mathbf{A}$  kann in einem Koordinatensystem  $K$  durch seine Koordinaten  $A_x, A_y, A_z$  dargestellt werden. Dabei muss genau unterschieden werden zwischen dem Vektor in seiner eigentlichen physikalischen Bedeutung und dem Tripel seiner Koordinaten. Falls mehrere Koordinatensysteme  $K, K'$  verwendet werden, schreibt man in  $\mathbf{A}_K$  bzw.  $\mathbf{A}_{K'}$  die Koordinaten in  $K$  bzw.  $K'$

$$\mathbf{A}_K = [A_x, A_y, A_z], \quad \mathbf{A}_{K'} = [A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}].$$

Nur wenn keine Verwechslungen möglich sind, werden die Indizes  $K, K'$  weggelassen.

### 2) Transformationsmatrix

Die Transformationsmatrix  $\mathbf{C}_{KK'}$ , auch Drehungsmatrix oder Matrix der Richtungskosinusse genannt, definiert die Verdrehung von  $K'$  relativ zu  $K$ . Eine Verschiebung des Ursprungs  $O'$  gegenüber  $O$  hat dabei keinen Einfluss. Zur Berechnung von  $\mathbf{C}_{KK'}$  verschiebt man die Koordinatensysteme so, dass ihre Ursprungspunkte zusammenfallen. Die Spalten von  $\mathbf{C}_{KK'}$  entsprechen den Koordinaten der Einsektoren  $\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}$  in  $K$ . Es ist

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} \cos(x, x') & \cos(x, y') & \cos(x, z') \\ \cos(y, x') & \cos(y, y') & \cos(y, z') \\ \cos(z, x') & \cos(z, y') & \cos(z, z') \end{bmatrix} \quad \text{(Die Winkel sind jeweils zwischen den positiven Achsen zu nehmen).}$$

|

|

|

$\mathbf{e}_{x'}$

$\mathbf{e}_{y'}$

$\mathbf{e}_{z'}$

Entsprechendes gilt für  $\mathbf{C}_{K'K}$ , wobei  $\mathbf{C}_{K'K} = \mathbf{C}_{KK'}^T$  ist. Der Kürze halber wird gelegentlich nur  $\mathbf{C}$  für  $\mathbf{C}_{KK'}$  geschrieben. Die Transformationsmatrix ist stets orthogonal, das heißt

$$\mathbf{C}_{KK'}^{-1} = \mathbf{C}_{KK'}^T, \quad \text{oder} \quad \mathbf{C}_{KK'} \cdot \mathbf{C}_{KK'}^T = \mathbf{E} \quad \text{und es gilt} \quad \det \mathbf{C}_{KK'} = 1.$$

### 3) Transformation von Vektorkoordinaten

Die Matrizen  $\mathbf{C}_{KK'}$ ,  $\mathbf{C}_{K'K}$  vermitteln die Transformation zwischen den Darstellungen  $\mathbf{A}_{K'}$  und  $\mathbf{A}_K$  eines Vektors  $\mathbf{A}$  in  $K'$  und  $K$ . Die Transformationsformeln lauten:

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{C}_{KK'} \cdot \mathbf{A}_{K'}, \quad \mathbf{A}_{K'} = \mathbf{C}_{K'K} \cdot \mathbf{A}_K.$$





#### 4) Drehgeschwindigkeitsvektor

Wenn sich die Lage von  $K'$  gegen  $K$  mit der Zeit ändert, so wird der Rotationsanteil dieser Bewegung durch den momentanen Drehgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}_{KK'}$  beschrieben. Er ist parallel zur momentanen Drehachse und sein Betrag ist die momentane Drehgeschwindigkeit. Seine Koordinaten in  $K$  erhält man aus der schief-symmetrischen Matrix

$$\dot{\mathbf{C}}_{KK'} \cdot \mathbf{C}_{KK'}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

durch *Rösselsprung*, beginnend in der Mitte der dritten Zeile

$$\boldsymbol{\omega}_{KK'} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z].$$

Die Matrix  $\dot{\mathbf{C}}_{KK'} \cdot \mathbf{C}_{KK'}^T$  wird durch elementweises Ableiten nach der Zeit gebildet.

In dem häufig vorkommenden Fall, dass sich  $K'$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine bekannte Achse mit Einsektor  $\mathbf{e}$  dreht, lässt sich  $\boldsymbol{\omega}$  auch ohne obige Rechnung angeben, nämlich

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}.$$

#### 5) Änderungsgeschwindigkeit von Vektoren

Die *Änderung* einer physikalischen Größe ist kein selbständiger Begriff. *Ändern* kann sich eine Größe nur relativ zu einer anderen Größe oder einem Bezugssystem. Die Änderungsgeschwindigkeit (das ist die zeitliche Änderung) eines Vektors  $\mathbf{A}$  ist daher stets in Zusammenhang mit dem Koordinatensystem zu sehen, in dem die Änderung von  $\mathbf{A}$  beobachtet wird.

Hat man zwei Koordinatensysteme  $K$  und  $K'$ , welche sich gegeneinander bewegen, so bezeichnet man mit

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} \text{ die Änderungsgeschwindigkeit von } \mathbf{A} \text{ relativ zu } K$$

und mit

$$\frac{d'}{dt} \mathbf{A} \text{ die Änderungsgeschwindigkeit von } \mathbf{A} \text{ relativ zu } K'.$$

Im Allgemeinen sind das verschiedene Vektoren. Es gilt der vektorielle Zusammenhang (zeitliche Ableitungen von Vektoren in bewegten Bezugssystemen)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = \frac{d'}{dt} \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}_{KK'} \times \mathbf{A},$$

wobei  $\boldsymbol{\omega}_{KK'}$  der Drehgeschwindigkeitsvektor von  $K'$  gegen  $K$  ist.



### 6) Berechnung der Koordinaten einer Änderungsgeschwindigkeit

Die Koordinaten von  $\frac{d}{dt} \mathbf{A}$  bzw.  $\frac{d'}{dt} \mathbf{A}$  erhält man, indem man die Koordinaten von  $\mathbf{A}$  in  $K$  bzw.  $K'$  aufstellt und einzeln nach der Zeit ableitet. Und zwar erhält man damit die Koordinaten von  $\frac{d}{dt} \mathbf{A}$  bzw.  $\frac{d'}{dt} \mathbf{A}$  bezüglich  $K$  bzw.  $K'$ ! Es gilt also

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_K = \begin{bmatrix} \dot{A}_x \\ \dot{A}_y \\ \dot{A}_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{A}}_K, \quad \left. \frac{d'\mathbf{A}}{dt} \right|_{K'} = \begin{bmatrix} \dot{A}_{x'} \\ \dot{A}_{y'} \\ \dot{A}_{z'} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{A}}_{K'}.$$

(Der Punkt meint deren elementweise zeitliche Ableitung).

Es ist falsch, etwa zur Berechnung von  $\frac{d}{dt} \mathbf{A}$ , die Koordinaten von  $\mathbf{A}$  in  $K'$  aufzustellen und dann abzuleiten!

Wendet man die Formel für die Ableitung von Vektoren in bewegten Bezugssystemen entsprechend Abschnitt 5 auf Koordinatendarstellungen an, so ist zu beachten, daß die Vektoren auf der rechten Seite zuerst alle im gleichen Koordinatensystem dargestellt werden müssen und daß man auch die Ergebnisse in diesem System erhält.

### 7) Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes

Die Lage eines Punktes  $P$  in einem Koordinatensystem  $K$  wird durch seinen Ortsvektor  $\mathbf{r}$  beschrieben. Wenn  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  zeitlich veränderlich ist, interessieren auch sein

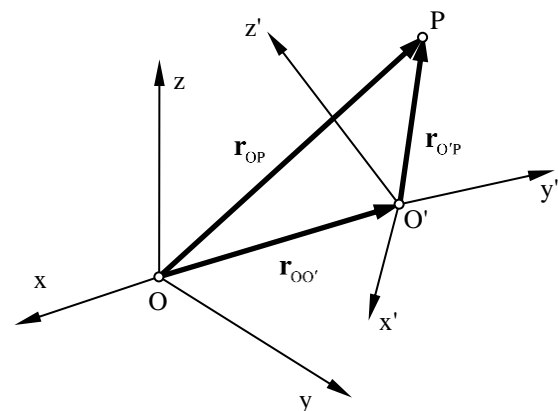
Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}$

und sein

Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}$

relativ zu  $K$ . Falls die Koordinaten von  $\mathbf{r}$  in  $K$  bekannt sind, erhält man  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{a}$  in Koordinaten in  $K$  durch Differenzieren.

Oft aber ist es notwendig oder günstig, die Bewegung von  $P$  nicht in  $K$ , sondern in einem bewegten Koordinatensystem  $K'$  zu beobachten. Der Ursprung  $O'$  von  $K'$  habe den Ortsvektor  $\mathbf{r}_{OO'}$  bezüglich  $O$ . Der Drehgeschwindigkeitsvektor von  $K'$  gegenüber  $K$  sei  $\boldsymbol{\omega}_{KK'}$ .





Es sind dann folgende Vektoren zu unterscheiden:

Bedeutung					Bezeichnung	
Ortsvektor	von	P	bezüglich	O	$\mathbf{r}_{OP}$	$\mathbf{r}_{abs}$
Ortsvektor	von	P	bezüglich	O'	$\mathbf{r}_{O'P}$	$\mathbf{r}_{rel}$
Ortsvektor	von	O'	bezüglich	O	$\mathbf{r}_{OO'}$	
Geschwindigkeit	von	P	relativ zu	K	$\mathbf{v}_{OP}, \frac{d}{dt}\mathbf{r}_{OP}$	$\mathbf{v}_{abs}$
Geschwindigkeit	von	P	relativ zu	K'	$\mathbf{v}_{O'P}, \frac{d'}{dt}\mathbf{r}_{O'P}$	$\mathbf{v}_{rel}$
Geschwindigkeit	von	O'	relativ zu	K	$\mathbf{v}_{OO'}, \frac{d}{dt}\mathbf{r}_{OO'}$	
Beschleunigung	von	P	relativ zu	K	$\mathbf{a}_{OP}, \frac{d}{dt}\mathbf{v}_{OP}, \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_{OP}$	$\mathbf{a}_{abs}$
Beschleunigung	von	P	relativ zu	K'	$\mathbf{a}_{O'P}, \frac{d'}{dt}\mathbf{v}_{O'P}, \frac{d'^2}{dt'^2}\mathbf{r}_{O'P}$	$\mathbf{a}_{rel}$
Beschleunigung	von	O'	relativ zu	K	$\mathbf{a}_{OO'}, \frac{d}{dt}\mathbf{v}_{OO'}, \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_{OO'}$	

Jeder dieser Vektoren kann in Koordinaten eines beliebigen Koordinatensystems angegeben werden. Die Ableitungen müssen allerdings entsprechend Abschnitt 6 ausgeführt werden.

Die Bezeichnungen der letzten Spalte werden sehr anschaulich, wenn man sich K als raumfestes Koordinatensystem vorstellt. Unabhängig davon, ob dies tatsächlich der Fall ist, werden sie im Folgenden verwendet.

Unmittelbar klar ist der Zusammenhang der Ortsvektoren  $\mathbf{r}_{abs} = \underbrace{\mathbf{r}_{OO'}}_{\mathbf{r}_{Führung}} + \mathbf{r}_{rel}$

Durch zeitliche Ableitung in K erhält man entsprechend Abschnitt 5  $\mathbf{v}_{abs} = \underbrace{\mathbf{v}_{OO'} + \boldsymbol{\omega}_{KK'} \times \mathbf{r}_{rel}}_{\mathbf{v}_{Führung}} + \mathbf{v}_{rel}$

Nochmaliges Ableiten in K ergibt  $\mathbf{a}_{abs} = \underbrace{\mathbf{a}_{OO'} + \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_{KK'}\right) \times \mathbf{r}_{rel} + \boldsymbol{\omega}_{KK'} \times (\boldsymbol{\omega}_{KK'} \times \mathbf{r}_{rel})}_{\mathbf{a}_{Führung}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}_{KK'} \times \mathbf{v}_{rel}}_{\mathbf{a}_{Coriolis}} + \mathbf{a}_{rel}$ .

Die Bezeichnungen  $\mathbf{r}_{Führung}$ ,  $\mathbf{v}_{Führung}$ ,  $\mathbf{a}_{Führung}$  bringen zum Ausdruck, dass diese Terme auch dann auftreten, wenn P in K' ortsfest ist. Sie sind also allein durch die Bewegung von K' (die Führung) relativ zu K bedingt.