Vektoren und Koordinatensysteme

1) Koordinatensystem und Darstellung eines Vektors

Zur Darstellung von Vektoren sollen rechtshändige, kartesische Koordinatensysteme mit orthogonalen Einsvektoren verwendet werden. Das Koordinatensystem $\{O, x, y, z\}$ mit dem Ursprung O und den Einsvektoren $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ wird zur Abkürzung durch den Buchstaben K gekennzeichnet. Ebenso heißt das Koordinatensystem $\{O', x', y', z'\}$ kurz K'.

Ein Vektor $\mathbf{A}$ kann in einem Koordinatensystem K durch seine Koordinaten A_x, A_y, A_z dargestellt werden. Dabei muss genau unterschieden werden zwischen dem Vektor in seiner eigentlichen physikalischen Bedeutung und dem Tripel seiner Koordinaten. Falls mehrere Koordinatensysteme K, K' verwendet werden, schreibt man in $\mathbf{A_K}$ bzw. $\mathbf{A_{K'}}$ die Koordinaten in K bzw. K'

$$\mathbf{A_K} = [A_x\,, A_y\,, A_z], \qquad \mathbf{A_{K'}} = [A_{x'}\,, A_{y'}\,, A_{z'}].$$

Nur wenn keine Verwechslungen möglich sind, werden die Indizes K, K' weggelassen.

2) Transformationsmatrix

Die Transformationsmatrix $\mathbf{C}_{KK'}$, auch Drehungsmatrix oder Matrix der Richtungskosinusse genannt, definiert die Verdrehung von K' relativ zu K. Eine Verschiebung des Ursprungs O' gegenüber O hat dabei keinen Einfluss. Zur Berechnung von $\mathbf{C}_{KK'}$ verschiebt man die Koordinatensysteme so, dass ihre Ursprungspunkte zusammenfallen. Die Spalten von $\mathbf{C}_{KK'}$ entsprechen den Koordinaten der Einsvektoren $\mathbf{e}_{x'}$, $\mathbf{e}_{y'}$, $\mathbf{e}_{z'}$ in K. Es ist

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos(x,x') & \cos(x,y') & \cos(x,z') \\ \cos(y,x') & \cos(y,y') & \cos(y,z') \\ \cos(z,x') & \cos(z,y') & \cos(z,z') \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} | \qquad\qquad & | & \qquad\qquad | \\ \mathbf{e}_{x'} \qquad\qquad & \mathbf{e}_{y'} & \qquad\qquad \mathbf{e}_{z'} \end{array} \end{array}$$

(Die Winkel sind jeweils zwischen den positiven Achsen zu nehmen).

Entsprechendes gilt für $\mathbf{C}_{K'K}$, wobei $\mathbf{C}_{K'K} = \mathbf{C}_{KK'}^{T}$ ist. Der Kürze halber wird gelegentlich nur $\mathbf{C}$ für $\mathbf{C}_{KK'}$ geschrieben. Die Transformationsmatrix ist stets orthogonal, das heißt

$$\mathbf{C}_{KK'}^{-1} = \mathbf{C}_{KK'}^{T} \text{ oder } \mathbf{C}_{KK'} \cdot \mathbf{C}_{KK'}^{T} = E \text{ und es gilt } \det \mathbf{C}_{KK'} = 1\,.$$

3) Transformation von Vektorkoordinaten

Die Matrizen $\mathbf{C}_{KK'}$, $\mathbf{C}_{K'K}$ vermitteln die Transformation zwischen den Darstellungen $\mathbf{A}_{K'}$ und $\mathbf{A}_K$ eines Vektors $\mathbf{A}$ in K' und K. Die Transformationsformeln lauten:

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{C}_{KK'} \cdot \mathbf{A}_{K'}\,, \qquad \mathbf{A}_{K'} = \mathbf{C}_{K'K} \cdot \mathbf{A}_K\,.$$

4) Drehgeschwindigkeitsvektor

Wenn sich die Lage von K' gegen K mit der Zeit ändert, so wird der Rotationsanteil dieser Bewegung durch den momentanen Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{KK'}$ beschrieben. Er ist parallel zur momentanen Drehachse und sein Betrag ist die momentane Drehgeschwindigkeit. Seine Koordinaten in K erhält man aus der schiefsymmetrischen Matrix

$$\dot{\mathbf{C}}_{KK'} \cdot \mathbf{C}^{T}_{KK'} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

durch *Rösselsprung*, beginnend in der Mitte der dritten Zeile

$$\boldsymbol{\omega}_{KK'} = [\omega_x , \omega_y , \omega_z].$$

Die Matrix $\dot{\mathbf{C}}_{KK'} \cdot \mathbf{C}^{T}_{KK'}$ wird durch elementweises Ableiten nach der Zeit gebildet.

In dem häufig vorkommenden Fall, dass sich K' mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine bekannte Achse mit Einsvektor $\mathbf{e}$ dreht, läßt sich $\boldsymbol{\omega}$ auch ohne obige Rechnung angeben, nämlich

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}.$$

5) Änderungsgeschwindigkeit von Vektoren

Die *Änderung* einer physikalischen Größe ist kein selbständiger Begriff. *Ändern* kann sich eine Größe nur relativ zu einer anderen Größe oder einem Bezugssystem. Die Änderungsgeschwindigkeit (das ist die zeitliche Änderung) eines Vektors $\mathbf{A}$ ist daher stets in Zusammenhang mit dem Koordinatensystem zu sehen, in dem die Änderung von $\mathbf{A}$ beobachtet wird.

Hat man zwei Koordinatensysteme K und K', welche sich gegeneinander bewegen, so bezeichnet man mit

$\frac{d}{dt}\mathbf{A}$ die Änderungsgeschwindigkeit von $\mathbf{A}$ relativ zu K

und mit

$\frac{d'}{dt}\mathbf{A}$ die Änderungsgeschwindigkeit von $\mathbf{A}$ relativ zu K' .

Im Allgemeinen sind das verschiedene Vektoren. Es gilt der vektorielle Zusammenhang (zeitliche Ableitungen von Vektoren in bewegten Bezugsystemen)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = \frac{d'}{dt}\mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}_{KK'} \times \mathbf{A} \ ,$$

wobei $\boldsymbol{\omega}_{KK'}$ der Drehgeschwindigkeitsvektor von K' gegen K ist.

6) Berechnung der Koordinaten einer Änderungsgeschwindigkeit

Die Koordinaten von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{A}$ bzw. $\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{dt}}\mathbf{A}$ erhält man, indem man die Koordinaten von $\mathbf{A}$ in K bzw. K' aufstellt und einzeln nach der Zeit ableitet. Und zwar erhält man damit die Koordinaten von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{A}$ bzw. $\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{dt}}\mathbf{A}$ bezüglich K bzw. K' ! Es gilt also

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{A}}_x \\ \dot{\mathrm{A}}_y \\ \dot{\mathrm{A}}_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}} , \qquad \left.\frac{\mathrm{d}'\mathbf{A}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{K}'} = \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{A}}_{x'} \\ \dot{\mathrm{A}}_{y'} \\ \dot{\mathrm{A}}_{z'} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}'} .$$

(Der Punkt meint deren elementweise zeitliche Ableitung).

Es ist falsch, etwa zur Berechnung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{A}$, die Koordinaten von $\mathbf{A}$ in K' aufzustellen und dann abzuleiten!

Wendet man die Formel für die Ableitung von Vektoren in bewegten Bezugssystemen entsprechend Abschnitt 5 auf Koordinatendarstellungen an, so ist zu beachten, daß die Vektoren auf der rechten Seite zuerst alle im gleichen Koordinatensystem dargestellt werden müssen und daß man auch die Ergebnisse in diesem System erhält.

7) Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes

Die Lage eines Punktes P in einem Koordinatensystem K wird durch seinen Ortsvektor $\mathbf{r}$ beschrieben. Wenn $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathrm{t})$ zeitlich veränderlich ist, interessieren auch sein

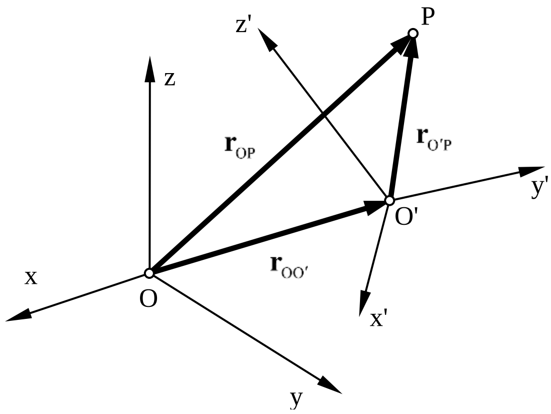
Geschwindigkeitsvektor $\qquad \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}$

und sein

Beschleunigungsvektor $\qquad \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\mathbf{r}$

relativ zu K. Falls die Koordinaten von $\mathbf{r}$ in K bekannt sind, erhält man $\mathbf{v}$ und $\mathbf{a}$ in Koordinaten in K durch Differenzieren.

Oft aber ist es notwendig oder günstig, die Bewegung von P nicht in K, sondern in einem bewegten Koordinatensystem K' zu beobachten. Der Ursprung O' von K' habe den Ortsvektor $\mathbf{r}_{\mathrm{OO}'}$ bezüglich O. Der Drehgeschwindigkeitsvektor von K' gegenüber K sei $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK}'}$.



Es sind dann folgende Vektoren zu unterscheiden:

Bedeutung					Bezeichnung	
Ortsvektor	von	P	bezüglich	O	$\mathbf{r}_{\mathrm{OP}}$	$\mathbf{r}_{\mathrm{abs}}$
Ortsvektor	von	P	bezüglich	$\mathrm{O'}$	$\mathbf{r}_{\mathrm{O'P}}$	$\mathbf{r}_{\mathrm{rel}}$
Ortsvektor	von	$\mathrm{O'}$	bezüglich	O	$\mathbf{r}_{\mathrm{OO'}}$	
Geschwindigkeit	von	P	relativ zu	K	$\mathbf{v}_{\mathrm{OP}},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{\mathrm{OP}}$	$\mathbf{v}_{\mathrm{abs}}$
Geschwindigkeit	von	P	relativ zu	K'	$\mathbf{v}_{\mathrm{O'P}},\ \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{\mathrm{O'P}}$	$\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$
Geschwindigkeit	von	O'	relativ zu	K	$\mathbf{v}_{\mathrm{OO'}},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{\mathrm{OO'}}$	
Beschleunigung	von	P	relativ zu	K	$\mathbf{a}_{\mathrm{OP}},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{v}_{\mathrm{OP}},\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\mathbf{r}_{\mathrm{OP}}$	$\mathbf{a}_{\mathrm{abs}}$
Beschleunigung	von	P	relativ zu	K'	$\mathbf{a}_{\mathrm{O'P}},\ \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{dt}}\mathbf{v}_{\mathrm{O'P}},\ \frac{\mathrm{d}'^2}{\mathrm{dt}^2}\mathbf{r}_{\mathrm{O'P}},$	$\mathbf{a}_{\mathrm{rel}}$
Beschleunigung	von	O'	relativ zu	K	$\mathbf{a}_{\mathrm{OO'}},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{v}_{\mathrm{OO'}},\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\mathbf{r}_{\mathrm{OO'}}$	

Jeder dieser Vektoren kann in Koordinaten eines beliebigen Koordinatensystems angegeben werden. Die Ableitungen müssen allerdings entsprechend Abschnitt 6 ausgeführt werden.

Die Bezeichnungen der letzten Spalte werden sehr anschaulich, wenn man sich K als raumfestes Koordinatensystem vorstellt. Unabhängig davon, ob dies tatsächlich der Fall ist, werden sie im Folgenden verwendet.

Unmittelbar klar ist der Zusammenhang der Ortsvektoren $\mathbf{r}_{\mathrm{abs}} = \underbrace{\mathbf{r}_{\mathrm{OO'}}}_{\mathbf{r}_{\mathrm{Führung}}} + \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}$

Durch zeitliche Ableitung in K erhält man entsprechend Abschnitt 5 $\mathbf{v}_{\mathrm{abs}} = \underbrace{\mathbf{v}_{\mathrm{OO'}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK'}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}}_{\mathbf{v}_{\mathrm{Führung}}} + \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$

Nochmaliges Ableiten in K ergibt $\mathbf{a}_{\mathrm{abs}} = \underbrace{\mathbf{a}_{\mathrm{OO'}} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK'}}\right) \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK'}} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK'}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}\right)}_{\mathbf{a}_{\mathrm{Führung}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK'}} \times \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}}_{\mathbf{a}_{\mathrm{Coriolis}}} + \mathbf{a}_{\mathrm{rel}}.$

Die Bezeichnungen $\mathbf{r}_{\mathrm{Führung}}$, $\mathbf{v}_{\mathrm{Führung}}$, $\mathbf{a}_{\mathrm{Führung}}$ bringen zum Ausdruck, dass diese Terme auch dann auftreten, wenn P in $\mathrm{K'}$ ortsfest ist. Sie sind also allein durch die Bewegung von $\mathrm{K'}$ (die Führung) relativ zu K bedingt.