# Kinematische Grundaufgaben für geradlinige Punktbewegungen

Die **Lage** eines bewegten Punktes P wird durch den vom Ursprung O eines ruhenden Koordinatensystems zum Punkt P weisenden Ortsvektor **r**(t) =**r**$_{op}$(t) eindeutig beschrieben.

Die **Geschwindigkeit** des Punktes P wird als zeitliche Änderung des Ortsvektors **r**(t) durch den Geschwindigkeitsvektor definiert

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t)\,. \tag{1}$$

Die **Beschleunigung** des Punktes P wird als zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors **v**(t) durch den Beschleunigungsvektor definiert

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)\,. \tag{2}$$

Bei der **geradlinigen** Bewegung entfällt der Vektorcharakter der Gleichungen (1) und (2), sie gehen in skalare Gleichungen über. Wählt man als Bewegungsrichtung z.B. die x−Achse, so erhält man mit der Lagekoordinate x aus (1) und (2) die Gleichungen

$$v(t) = \dot{x}(t)\,, \tag{3}$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)\,. \tag{4}$$

Für diesen Fall soll im Folgenden die Kinematik, d.h. der Zusammenhang zwischen x, v, a und t betrachtet werden. Ist eine dieser Variablen als Funktion einer anderen gegeben, so können die restlichen Größen daraus bestimmt werden. Dabei treten die anschließend behandelten Aufgabenstellungen häufig auf.

**1. Aufgabe:** Gegeben x(t), gesucht v(t) und a(t).

Nach den Definitionen (3) und (4) gilt

$$v(t) = \frac{dx}{dt}\,, \tag{5}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,. \tag{6}$$

**2. Aufgabe:** Gegeben a(t), gesucht v(t) und x(t).

Aus (6) folgt durch Separieren dv = a(t) dt. Die bestimmte Integration beider Seiten führt auf

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \;\text{ oder }\; v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \;\text{ oder }\; v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,. \tag{7}$$

In der gleichen Weise folgt aus (5) durch Separieren dx = v(t) dt, und die Integration liefert

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \;\text{ oder }\; x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \;\text{ oder }\; x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \tag{8}$$

$$\text{oder mit (7)}\;\; x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\right]dt\,. \tag{9}$$

Hinweis: Bei den Integralen wird zur übersichtlicheren Darstellung für die Integrationsvariable oft keine eigene Bezeichnung eingeführt. Die bestimmte Integration läuft von einem fest vorgegebenen Wert $x_0$, $v_0$, $t_0$ bis zu dem entsprechenden laufenden Wert x, v, t. Das Ergebnis der Integration ist also eine Funktion der oberen Grenze.

**3. Aufgabe:** Gegeben v(t), gesucht x(t) und a(t).

Die Ergebnisse für diese Aufgabe liegen in der Form (8) und (6) bereits vor.

Bei den nun folgenden Mischformen sind die Definitionsgleichungen (5) und (6) durch geeignete Substitutionen so lange umzuformen, bis die Variablen in der gesuchten Abhängigkeit vorliegen und die entsprechende Integrationsvariable auftritt.

**4. Aufgabe:** Gegeben a(v), gesucht x(v) und t(v).

Nach der Kettenregel der Differentiation lässt sich (6) auch in der Form

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv\,dx}{dx\,dt} = \frac{dv}{dx}v = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}v^2 \tag{10}$$

schreiben. Aus $a(v) = \frac{dv}{dx}v$ folgt

$$dx = \frac{v}{a(v)}dv \quad \text{oder} \quad x(v) = x_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{a(v)}dv\,. \tag{11}$$

Weiterhin findet man

$$dt = \frac{dv}{a(v)} \quad \text{oder} \quad t(v) = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)}\,. \tag{12}$$

**5. Aufgabe:** Gegeben a(x), gesucht v(x) und t(x).

Aus (10), d.h. $a(x) = \frac{dv}{dx}v(x)$, folgt

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx \quad \text{oder} \quad v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx}\,. \tag{13}$$

Ebenso gilt $v(x) = \frac{dx}{dt}$ oder $dt = \frac{dx}{v(x)}$. Durch Integration wird daraus

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)} \quad \text{oder mit (13)} \quad t(x) = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx}}\,. \tag{14}$$

**6. Aufgabe:** Gegeben v(x), gesucht a(x) und t(x).

Wie in Aufgabe 5 gilt $a(x) = v(x)\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx}$. (15)

Aus (5) folgt

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \quad \text{oder} \quad t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}\,. \tag{16}$$

Weitere mögliche Aufgabenstellungen lassen sich in ähnlicher Weise durch Substitution und anschließende Differentiation oder bestimmte Integration lösen.

# Typische Zeitverläufe einachsiger Punktbewegungen

Kinematische Grundgleichungen

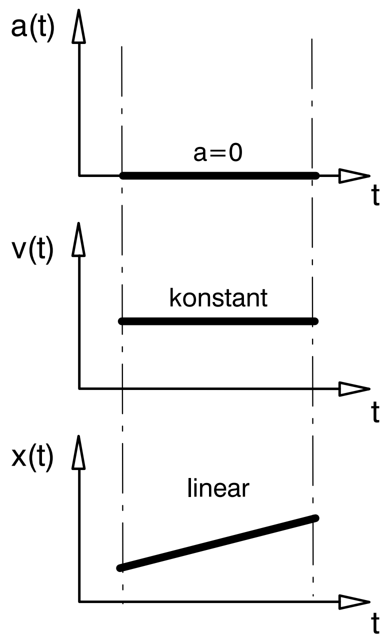
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

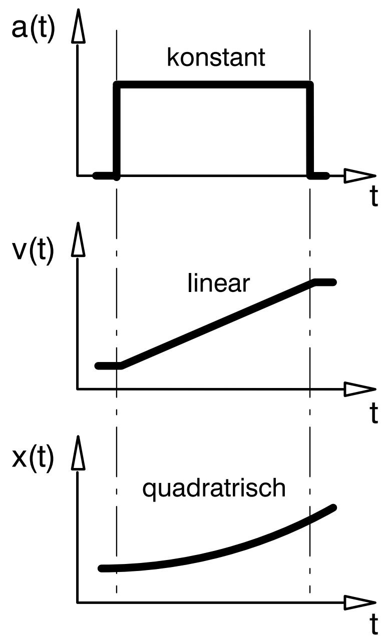
Bemerkung: Kraftstöße sind idealisierte Krafteinwirkungen, die zu Geschwindigkeits– sprüngen führen.

| a(t) | > 0 | | | = 0 | | | < 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v(t) | steigend | | | konstant | | | fallend | | |
| | <0 | = 0 | >0 | <0 | = 0 | >0 | <0 | = 0 | >0 |
| x(t) | fallend | waagerechte Tangente | steigend | fallend | konstant | steigend | fallend | waagerechte Tangente | steigend |
| | Linkskurve | | | Gerade | | | Rechtskurve | | |

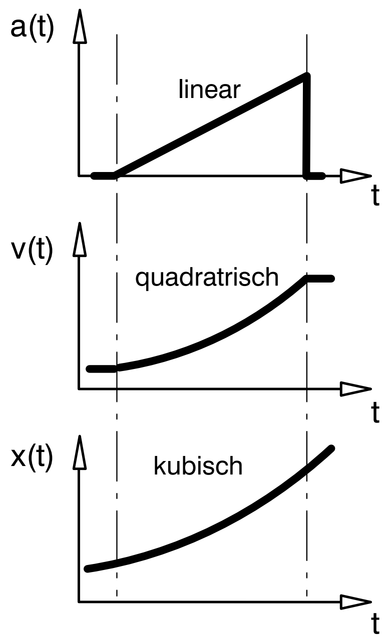
kräftefreie Bewegung




konstante Beschleunigung




linear anwachsende Beschleunigung




Kraftstöße **(Impulse)**