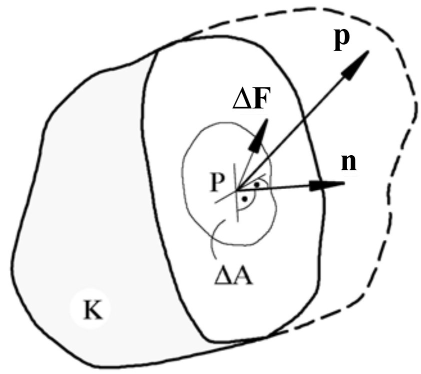
Der ebene Spannungszustand (Mohrscher Spannungskreis)

Zur Untersuchung des Spannungszustands in einem Körper K betrachtet man einen beliebigen Punkt P.

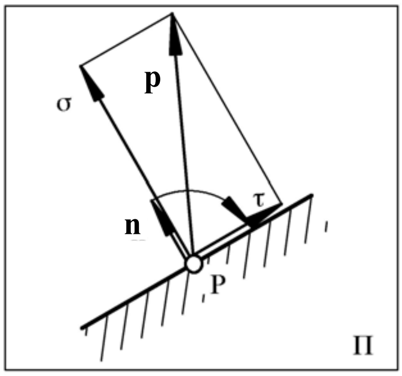


Legt man einen Schnitt durch P, so ergibt sich an der Schnittebene, deren räumliche Ausrichtung durch ihren nach außen weisenden Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ festgelegt wird, ein Spannungsvektor $\mathbf{p}$. Dieser hängt von der Schnittrichtung ab.

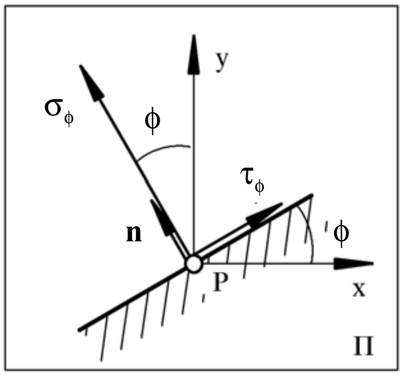
Ist $\Delta\mathrm{A}$ eine den Punkt P enthaltende Fläche in der Schnittebene und $\Delta\mathbf{F}$ die an $\Delta\mathrm{A}$ angreifende resultierende Kraft, so ist der Spannungsvektor als $\mathbf{p} = \lim\limits_{\Delta\mathrm{A}\to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta\mathrm{A}}$ definiert.

Liegen die Spannungsvektoren bei jeder beliebigen (räumlichen) Schnittrichtung in ein und derselben Ebene Π, so spricht man von einem (in dieser Ebene Π) **ebenen Spannungszustand**. Es genügt dann, nur Schnitte senkrecht zu Π zu betrachten.

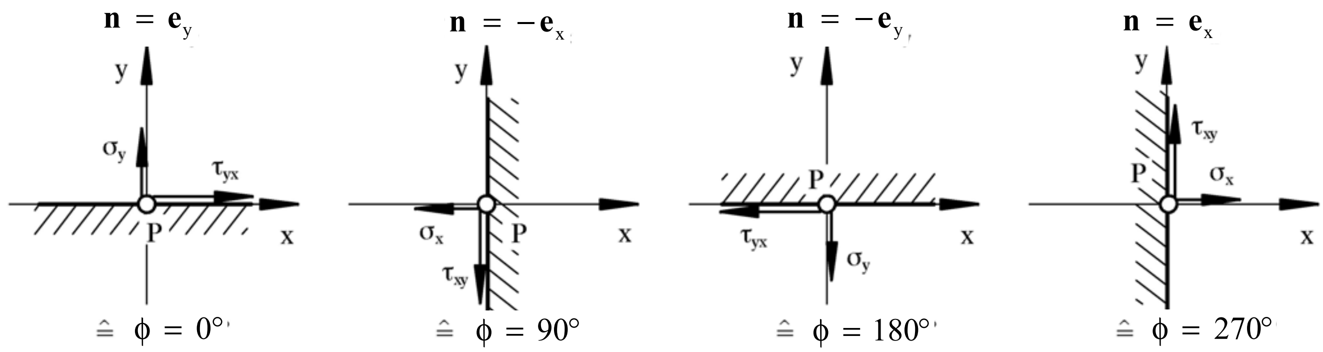
Der Mohrsche Spannungskreis beschreibt in diesem Fall die Abhängigkeit des Spannungsvektors $\mathbf{p}$ von der Schnittrichtung bei festgehaltenem Punkt P. Der Spannungsvektor $\mathbf{p}$ wird dazu in zwei Richtungen normal und tangential zur Schnittrichtung zerlegt. Das ergibt die Normalspannung σ und die Schubspannung τ. Die Normalspannung σ ist **in Richtung von $\mathbf{n}$** (also nach außen) positiv definiert. Die positive Richtung der Schubspannung τ ergibt sich durch **Drehung von $\mathbf{n}$ im Uhrzeigersinn** um $90°$.



Die Schnittrichtung wird mit Hilfe eines Winkels ϕ und eines kartesischen (x,y)−Koordinatensystems in Π mit Ursprung in P angegeben. Dabei ist ϕ derjenige Winkel, um den der Normalenvektor $\mathbf{n}$ gegenüber der positiven y−Achse im **mathematisch positiven** Sinn (= gegen den Uhrzeiger) gedreht ist. Die Spannungen an der Schnittfläche mit dem Winkel ϕ heißen σ_ϕ und τ_ϕ.



Für Schnittrichtungen parallel zu den Koordinatenachsen verwendet man auch die Bezeichnungen σ_x, τ_{xy}, σ_y, τ_{yx}. Der erste Index gibt dabei jeweils die Richtung von $\mathbf{n}$, der zweite die Richtung der Spannung selber an. Dabei gelten folgende Vorzeichenregelungen und Zusammenhänge mit den bisherigen Bezeichnungen σ_ϕ , τ_ϕ. (Gezeichnet sind jeweils die positiven Richtungen der Spannungen σ_x, τ_{xy}, σ_y und τ_{yx})

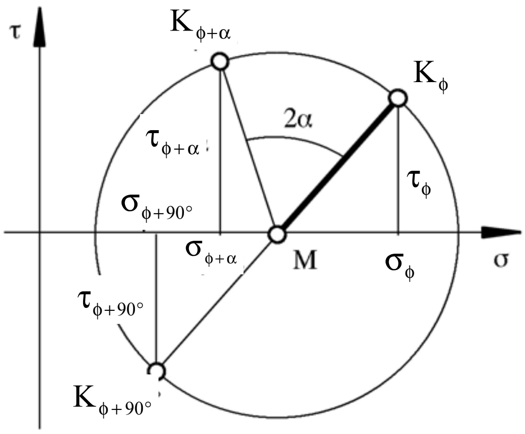


$\sigma_{0^\circ} = \sigma_y\,,\ \tau_{0^\circ} = \tau_{yx}$ $\qquad\sigma_{90^\circ} = \sigma_x\,,\ \tau_{90^\circ} = -\tau_{xy}$ $\qquad\sigma_{180^\circ} = \sigma_y\,,\ \tau_{180^\circ} = \tau_{yx}$ $\qquad\sigma_{270^\circ} = \sigma_x\,,\ \tau_{270^\circ} = -\tau_{xy}$

Es gilt stets $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ (Satz von der Gleichheit einander zugeordneter Schubspannungen).

Sind bei einem ebenen Spannungszustand die zu zwei verschiedenen Schnittrichtungen gehörenden Spannungen bekannt, so ist der ganze Spannungszustand in P eindeutig bestimmt.

Trägt man in einem (σ,τ)−Koordinatensystem die zu beliebigen Winkeln ϕ gehörenden Punkte $K_\phi(\sigma_\phi,\tau_\phi)$ ein, so liegen diese Punkte alle auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M auf der σ−Achse, dem sogenannten **Mohrschen Spannungskreis**.



Kennt man diesen Kreis und die Spannungen σ_ϕ, τ_ϕ zu einem Schnittwinkel ϕ, so erhält man die zum Schnittwinkel $\phi+\alpha$ gehörenden Spannungen $\sigma_{\phi+\alpha}$, $\tau_{\phi+\alpha}$, indem man K_ϕ um M **um den Winkel 2α** gegen den Uhrzeiger dreht, also **gleichsinnig** mit der Drehung der Schnittnormalen. Daher liegen je zwei zu aufeinander senkrechten Schnittrichtungen gehörende Punkte K_ϕ, $K_{\phi+90^\circ}$ auf einem Kreisdurchmesser. Umgekehrt läßt sich der Kreismittelpunkt zum Beispiel als arithmetisches Mittel zweier zu aufeinander senkrechten Schnittrichtungen gehörenden Normalspannungen σ_ϕ, $\sigma_{\phi+90^\circ}$ konstruieren.

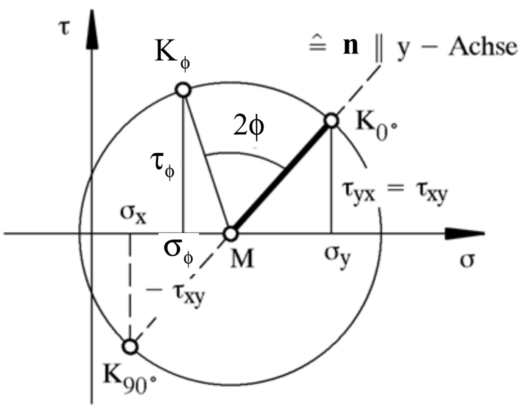
Oft sind in einem Punkt P die Spannungen σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ bekannt. Man konstruiert dann den Mohrschen Spannungskreis folgendermaßen:

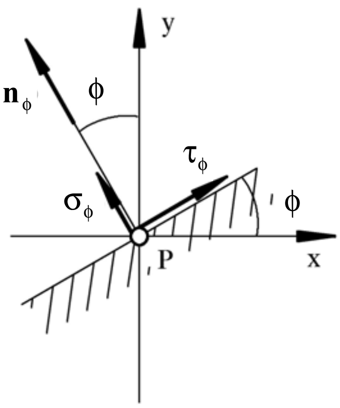
1) $M:\quad \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$

2) $K_{0^\circ}(\sigma_{0^\circ},\tau_{0^\circ})$

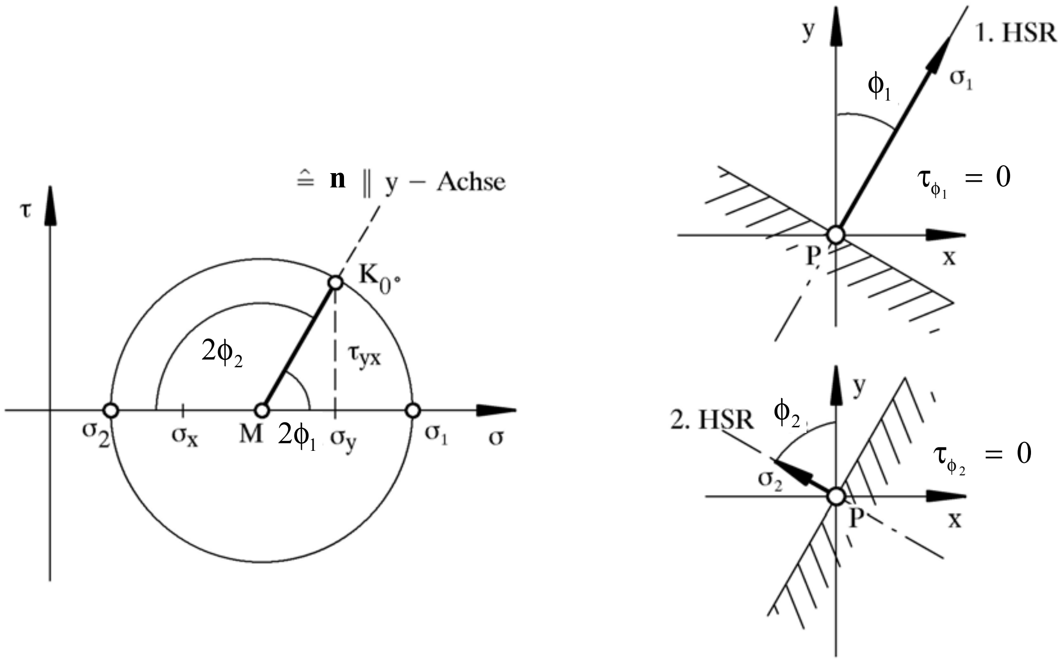
$\sigma_{0^\circ} = \sigma_y$

$\tau_{0^\circ} = \tau_{yx} = \tau_{xy}$





Eine ausgezeichnete Rolle spielen die Schnittpunkte des Kreises mit der σ−Achse. Dort verschwinden die Schubspannungen. Die Normalspannungen an den zugehörigen Schnittebenen heißen **Hauptspannungen** σ_1 und σ_2. Dabei ist σ_1 als die größere von beiden definiert. Die zugehörigen Schnittrichtungen heißen **Hauptspannungsrichtungen** (HSR). Sie stehen aufeinander senkrecht und werden durch die Winkel ϕ_1 , ϕ_2 festgelegt.



Für die analytische Beschreibung der hier beschriebenen Zusammenhänge siehe Magnus/Müller, 3.1.1.1 .