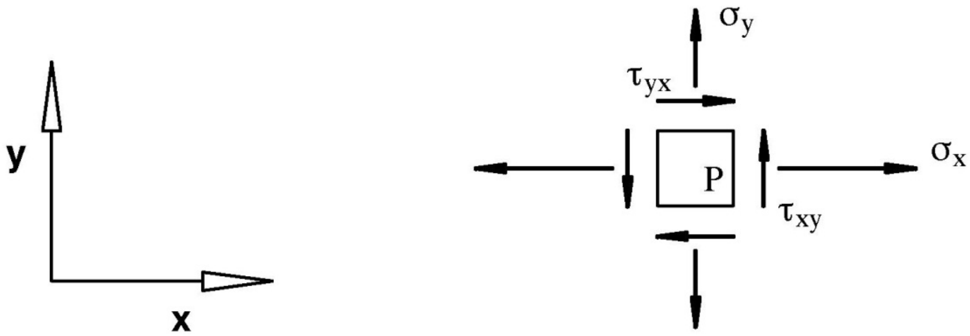
Aufgabe 1: Arbeitsblatt zum Mohr‘schen Spannungskreis

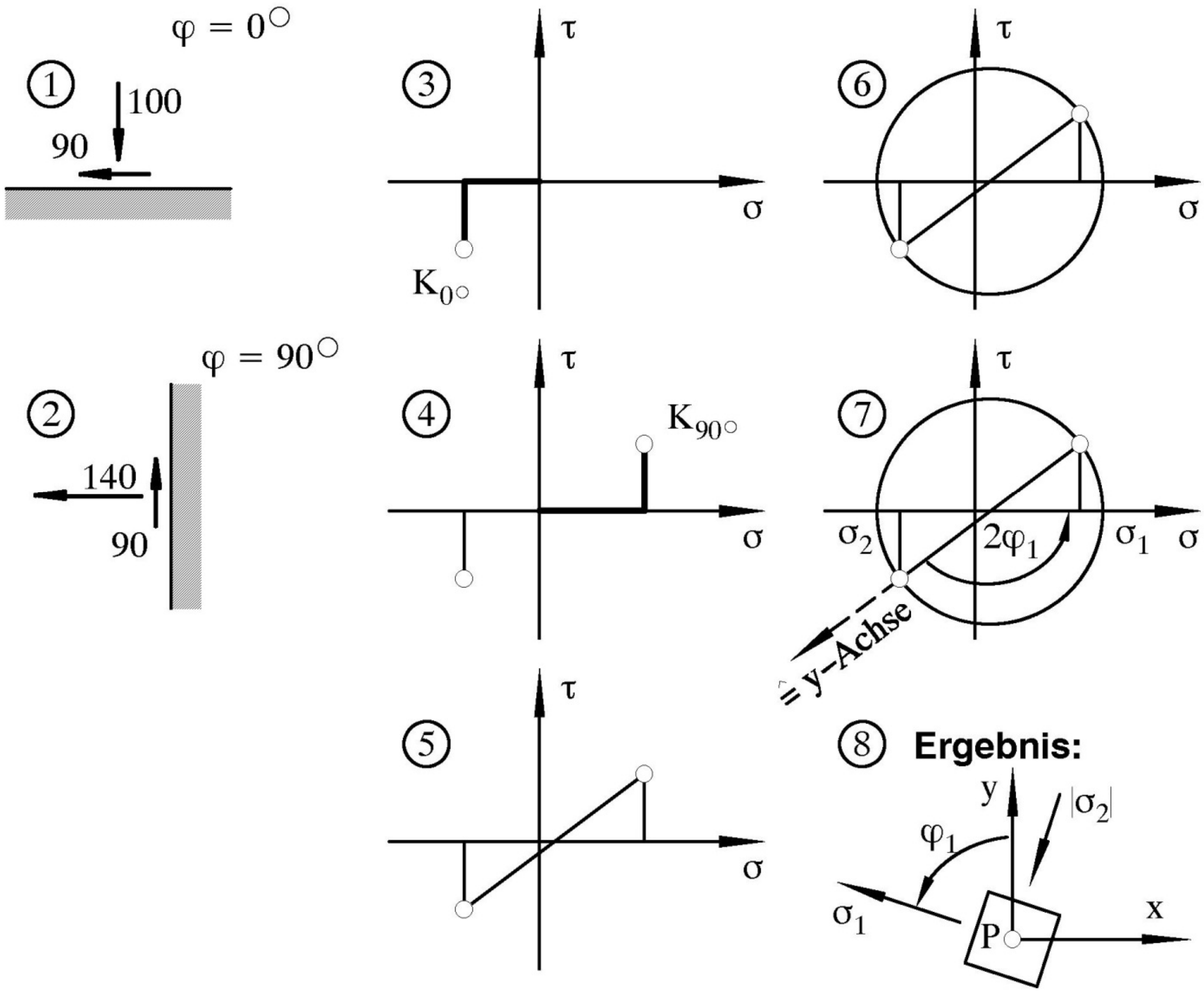
Der ebene Spannungszustand im Punkt P eines Kontinuums führt bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems auf die in der Skizze angegebenen Spannungen.

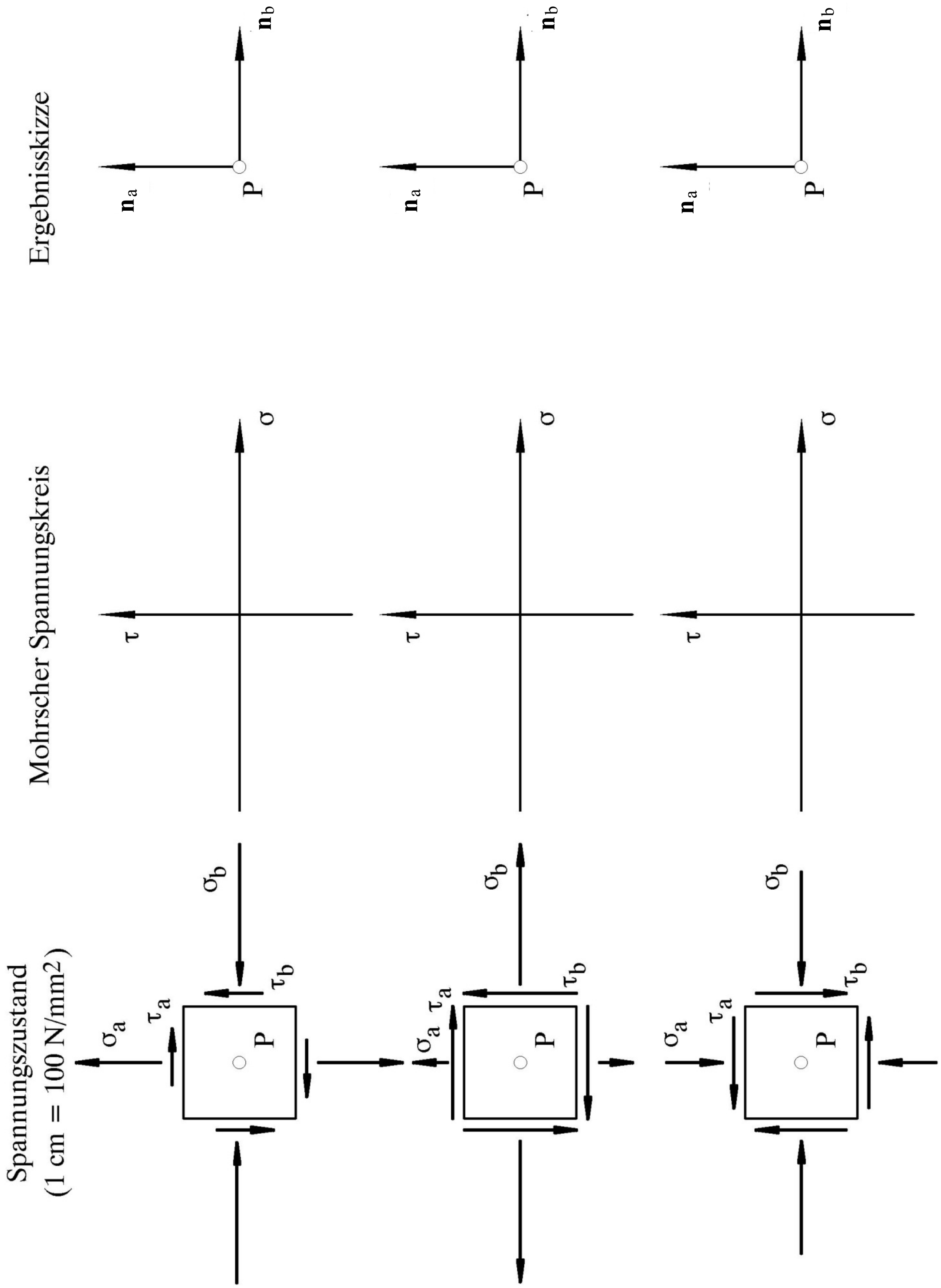


Gesucht sind die Hauptspannungen nach Größe und Richtung.

Der Lösungsweg wird am folgenden Zahlenbeispiel erläutert.

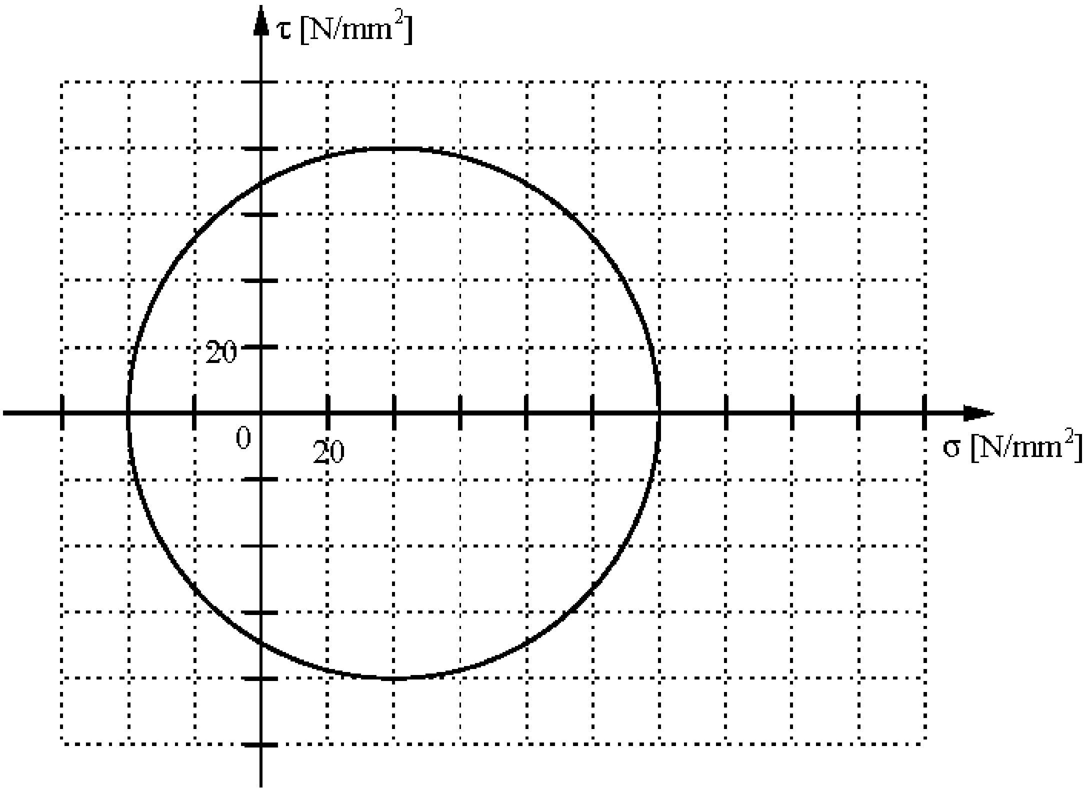
$$\sigma_x = 140\ \mathrm{N/mm^2}\ , \quad \sigma_y = -100\ \mathrm{N/mm^2}\ , \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -90\ \mathrm{N/mm^2}$$




Spannungszustand
(1 cm = 100 N/mm²)
Mohrscher Spannungskreis
Ergebnisskizze
σa
τa
σb
τb
P
σ
τ
na
nb

Aufgabe 2: Teil einer Prüfungsaufgabe (Wintersemester 05/06)

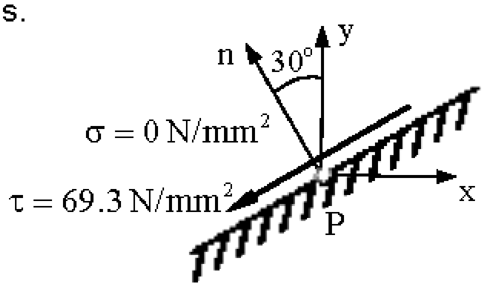
Der ebene Spannungszustand im Punkt P eines Balkens ist im Mohrschen Spannungskreis dargestellt.



a) Wie groß sind die Hauptspannungen?

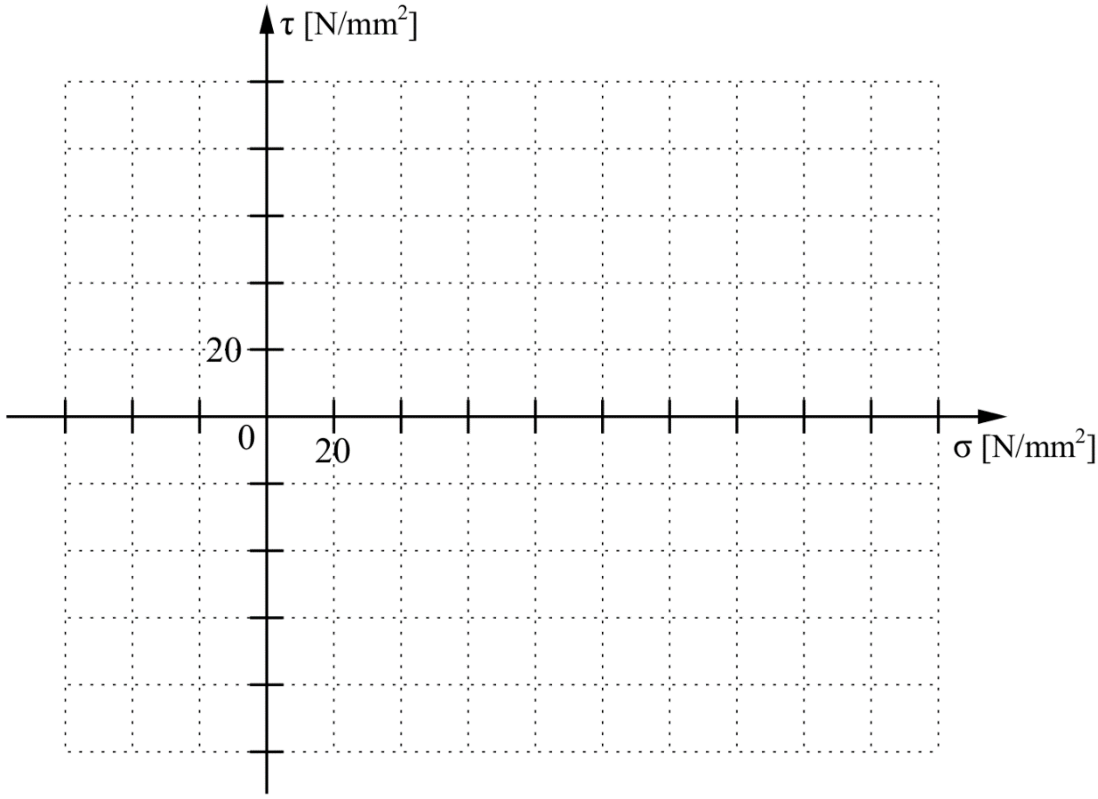
$\sigma_1 =$ ________________ , $\sigma_2 =$ ________________

b) Der Schnitt A-A (Flächennormale **n**) im Punkt P führt auf die dargestellten Spannungen. Kennzeichnen Sie diesen Schnitt mit „A-A" im Mohrschen Spannungskreis.

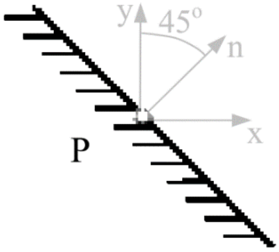


Schnitt A-A

e) Der Balken wird nun zusätzlich mit einer Zugbelastung von $40\ \mathrm{N/mm^2}$ in x-Richtung belastet. Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für den veränderten Spannungszustand im Punkt P. Kennzeichnen Sie den Mittelpunkt mit „M".

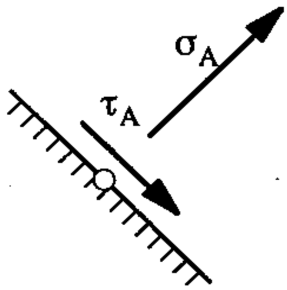


f) Zeichnen Sie für den veränderten Spannungszustand die zum dargestellten Schnitt zugehörigen Normal- und Schubspannungen im Punkt P ein.
(Maßstab: $1\ \mathrm{cm} \,\hat{=}\, 30\ \mathrm{N/mm^2}$)

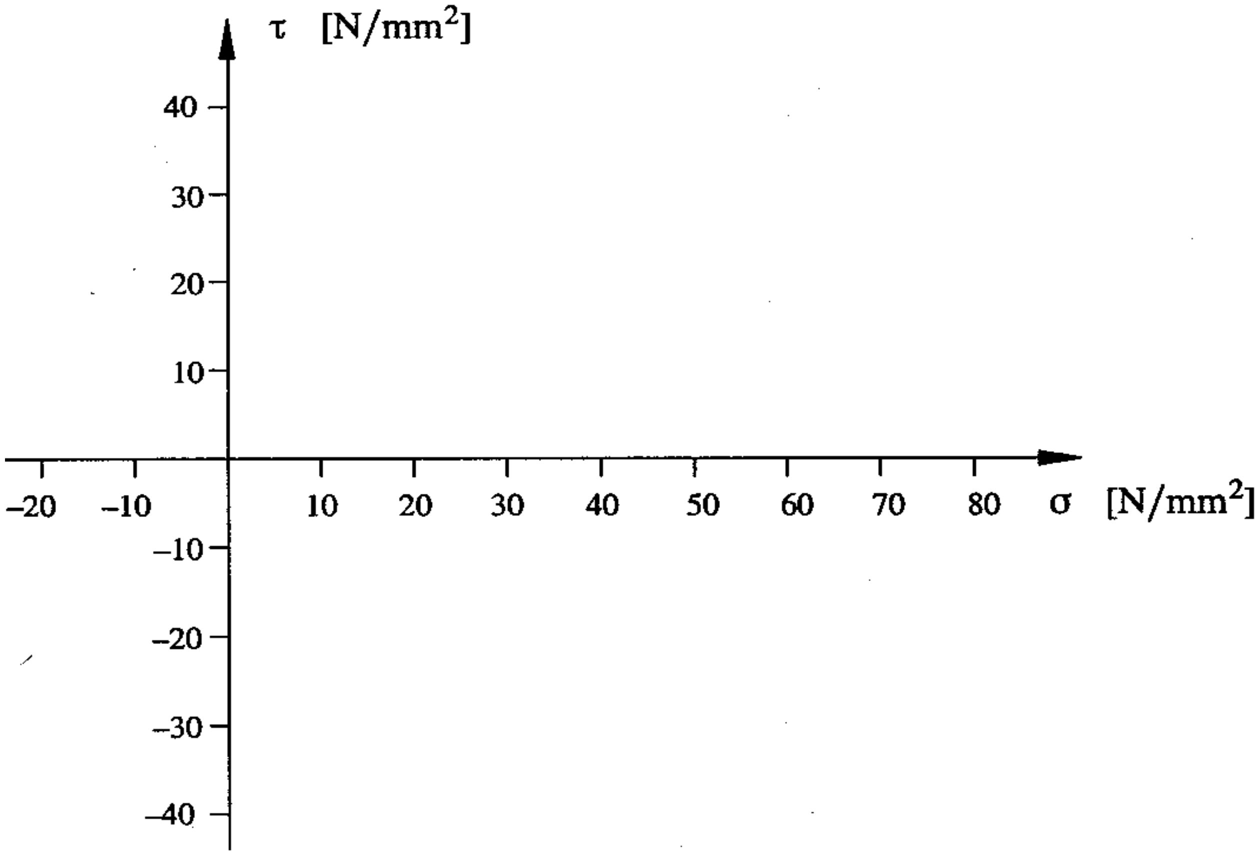


Aufgabe 3: Prüfungsaufgabe (Wintersemester 01/02)

Ein Bauteil unterliegt einem ebenen Spannungszustand. An einem Schnitt unbekannter Richtung wurden die in der Skizze dargestellten Spannungen $\sigma_A = 60\,\mathrm{N/mm^2}$ und $\tau_A = 20\,\mathrm{N/mm^2}$ gemessen. Weiterhin ist die Hauptspannung $\sigma_2 = -5\,\mathrm{N/mm^2}$ bekannt.



a) Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis.



b) Welchen Wert hat die erste Hauptspannung σ_1?

σ_1 = ________________

c) Wie groß ist die maximale Schubspannung?

τ_{max} = ________________

d) Wie groß ist der Winkel φ_A zwischen dem angegebenen Schnitt und der ersten Hauptspannungsrichtung?

φ_A = ________________

e) Geben Sie die Normal– und die Schubspannung für einen um 45° entgegen dem Uhrzeigersinn zu Schnitt A verdrehten Schnitt B an.

σ_B = ________________

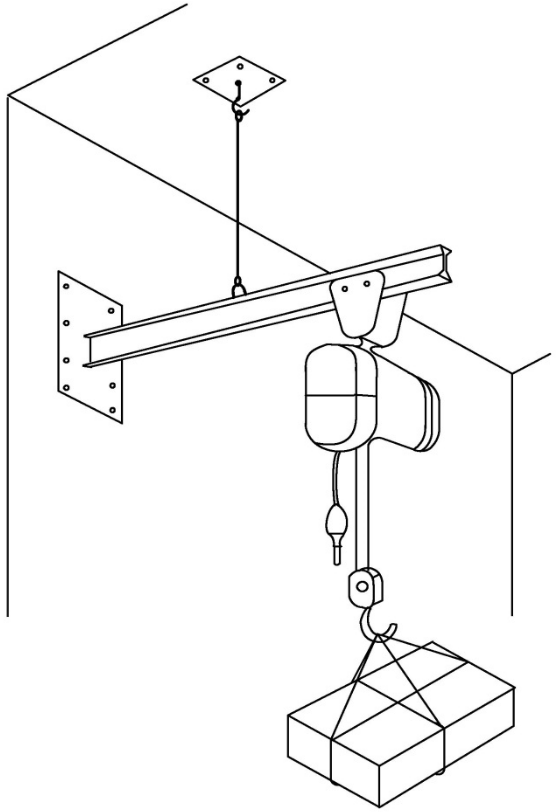
τ_B = ________________

f) Wie groß ist der Winkel β zwischen den normalspannungsfreien Schnitten?

β = ________________

Ein Werkstattkran besteht aus einem waagerechten, einseitig eingespannten I−Träger (Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I, Länge $2a$) und einer Laufkatze.

Der Träger ist in seiner Mitte noch durch ein vertikales Stahlseil (Elastizitätsmodul E_s, Querschnittsfläche A_s) gegen die Decke abgehängt. Im unverformten Zustand der Konstruktion hat das Seil die Länge L.
Die Eigengewichte von Träger und Seil seien vernachlässigbar.
Die Gewichte von Laufkatze und Last können in einer Einzelkraft $\mathbf{F}$ im variablen Abstand r von der Einspannstelle A zusammengefasst werden.



a) Tragen Sie am Balken die eingeprägten Kräfte und die Lagerreaktionen F_A, M_A ein (F_A senkrecht zur x−Achse), und ersetzen Sie das Seil durch die äquivalente Schnittkraft S. Ergänzen Sie die Skizze um die geometrischen Abmessungen.

Skizze:

b) Berechnen Sie die Lagerreaktionen F_A, M_A.
(Lassen Sie S als vorläufig unbekannt stehen)

F_A = ___________ M_A = ___________

c) Bestimmen Sie die Querkraft $Q(x)$, das Biegemoment $M(x)$, die erste Ableitung der Biegelinie $w'(x)$ und die Biegelinie $w(x)$ mit Hilfe von Klammerfunktionen. Setzen Sie die Ergebnisse von b) ein.

$Q(x)$ = ___________________________________

$M(x)$ = ___________________________________

$EIw'(x) =$ ___________________________________

$EIw(x) =$ ___________________________________

d) Wie groß ist der Biegepfeil f in der Balkenmitte?

$EIf =$ ___________________________________

e) Wie groß ist die Dehnung ε des Seils?

$\varepsilon =$ ___________________________________

f) Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Längenänderung ε und der Spannung σ_s im Seil an (Hookesches Gesetz).

$\sigma_s =$ ___________________________________

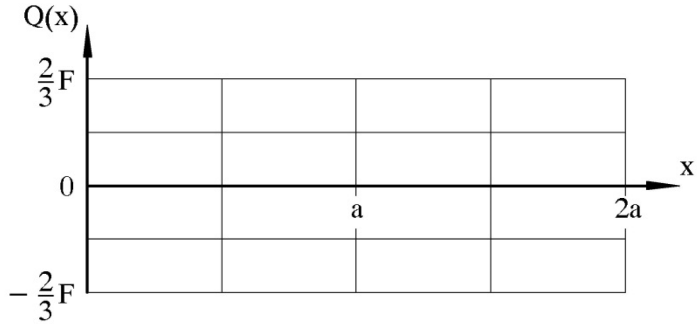
g) Berechnen Sie die Seilkraft S.

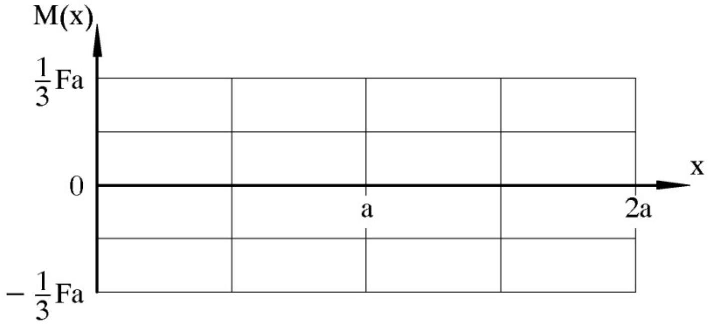
$S =$ ___________________________________

h) Die Seilkraft nimmt mit wachsender Entfernung der Laufkatze von der Einspannstelle beständig zu.
Wie groß ist die maximale Seilkraft?

$S_{max} =$ ___________________________________

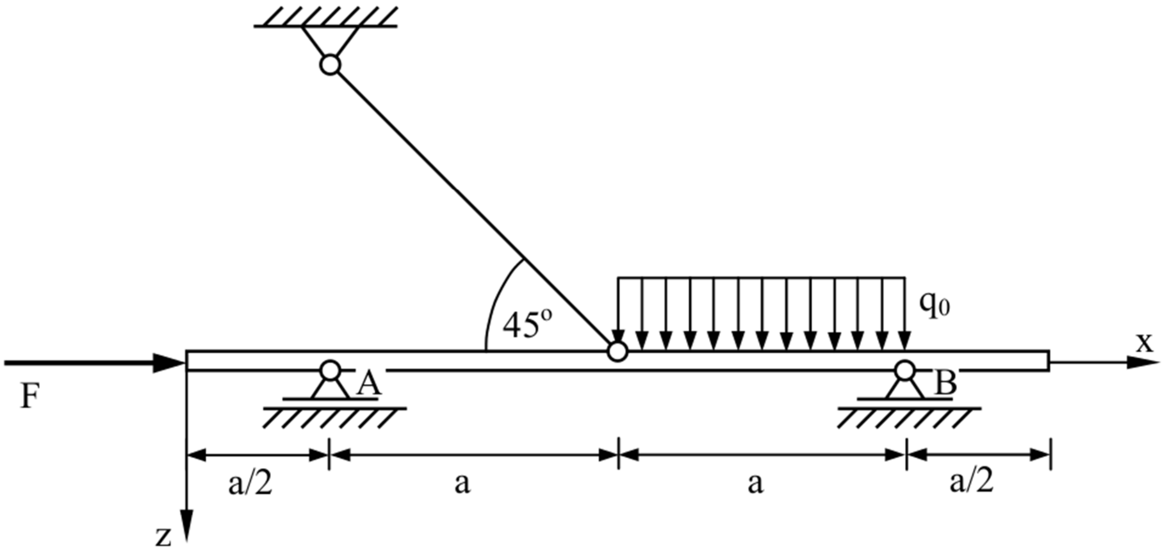
i) Skizzieren Sie den Querkraft- $Q(x)$ und Momentenverlauf $M(x)$ für die Werte $r = \frac{a}{2}$ und $S = \frac{2}{3}F$.



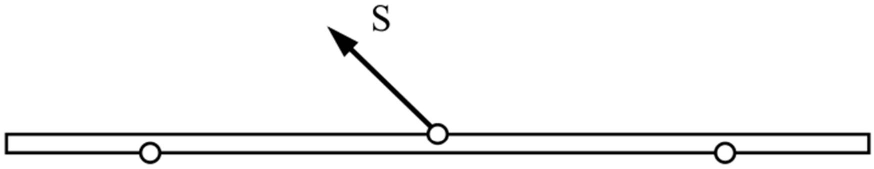


Aufgabe 1: Prüfungsaufgabe Wintersemester 05/06

Ein Balken (Länge $3a$, Biegesteifigkeit EI) ist in den Punkten A und B gelagert und in der Balkenmitte an einem undehnbaren Seil aufgehängt. Der Balken ist wie skizziert durch eine Streckenlast q_0 sowie durch eine Kraft F belastet.



a) Schneiden Sie zur Berechnung der Lagerreaktionen den Balken frei. Zeichnen Sie alle fehlenden Kräfte ein und bezeichnen Sie diese.



b) Berechnen Sie die Seilkraft S sowie die Kräfte auf den Balken in A und B.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie den Normalkraftverlauf $N(x)$, die kontinuierliche Belastung $q(x)$ sowie Querkraft- $Q(x)$ und Biegemomentenverlauf $M(x)$ für den Balken.

$N(x) =$ ____

$q(x) =$ ____

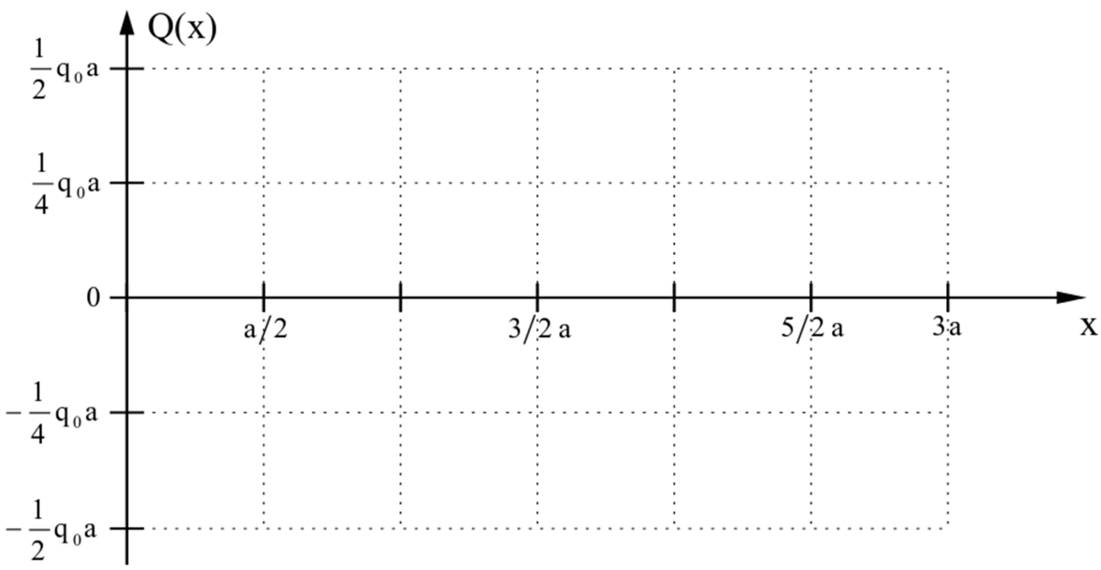
$Q(x) =$ ____

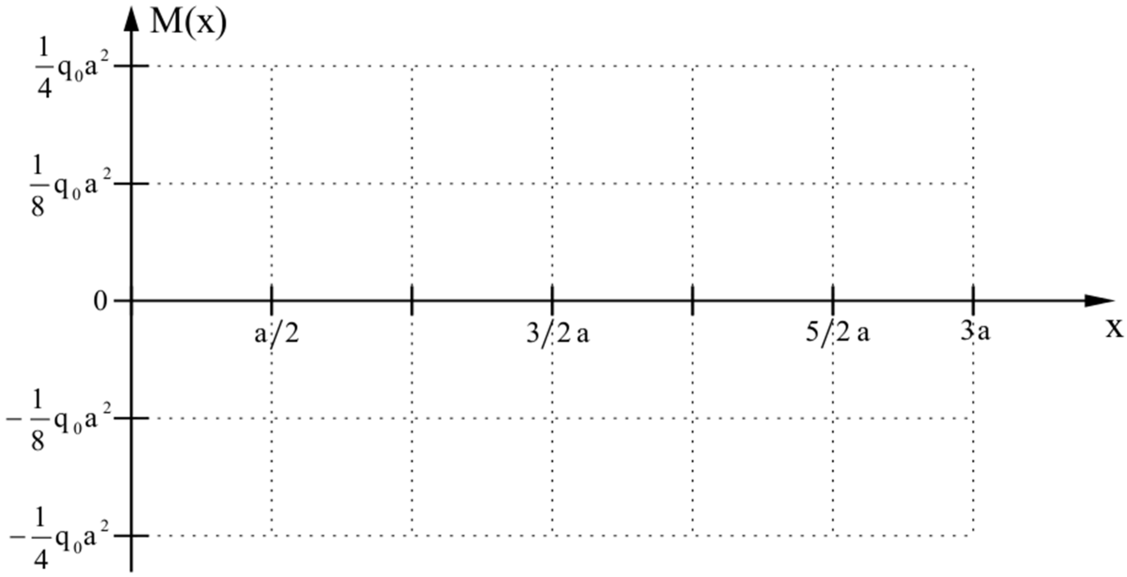
____

$M(x) =$ ____

____

d) Zeichnen Sie den Querkraft- und Biegemomentenverlauf für $F = \frac{1}{2} q_0 a$.



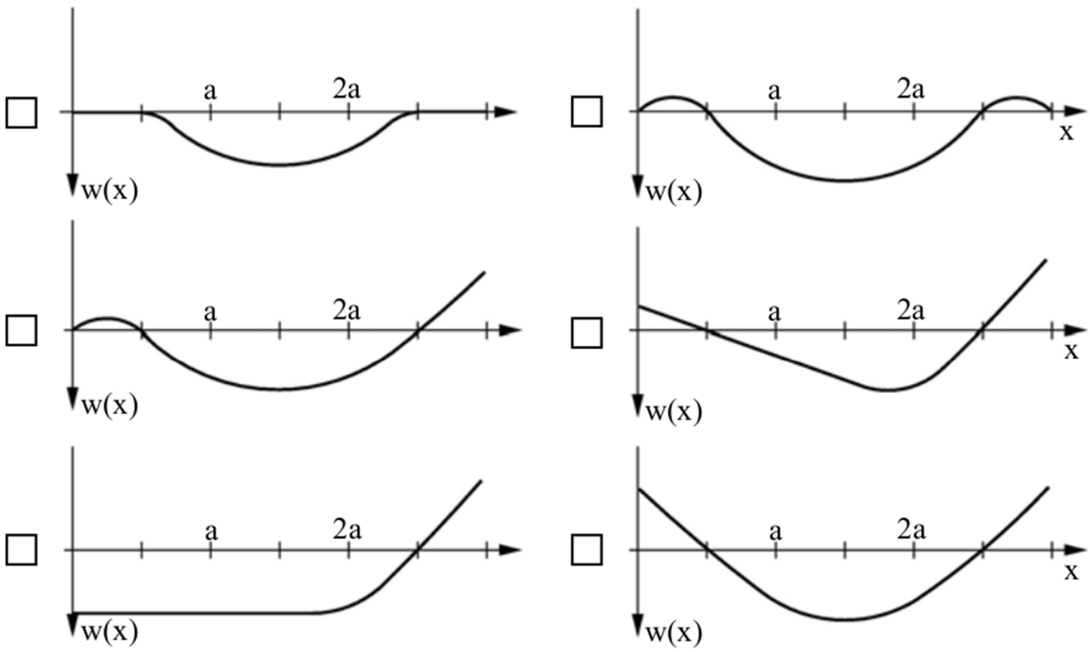


e) Vervollständigen Sie die Differentialgleichung der Biegelinie $w(x)$ und geben Sie die Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten an.

$$w''(x) = \frac{}{\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}} M(x)$$

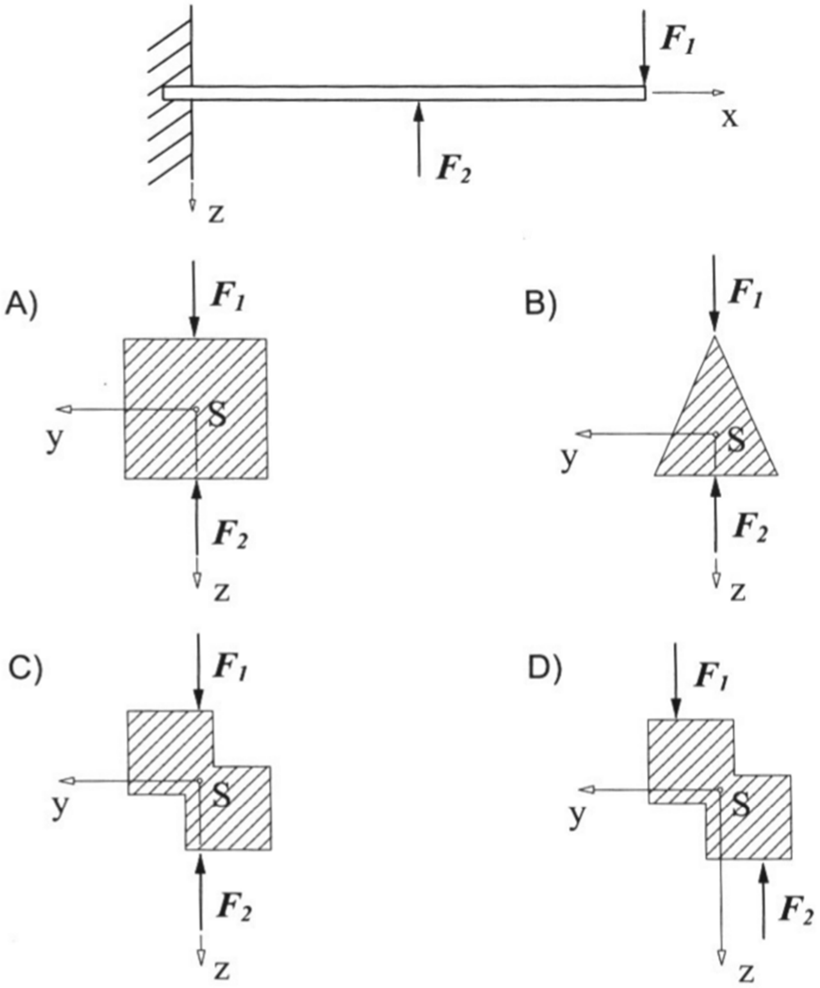
Randbedingungen: ________________, ________________

f) Kreuzen Sie die resultierende Biegelinie für $F = \frac{1}{2} q_0 a$ an.



Aufgabe 2: Prüfungsaufgabe Sommersemester 2003

Für einen Balken stehen die Querschnitte A bis D zur Auswahl. Zeichnen Sie in die Skizzen die Hauptträgheitsachsen in der yz-Ebene durch den Schwerpunkt S ein.

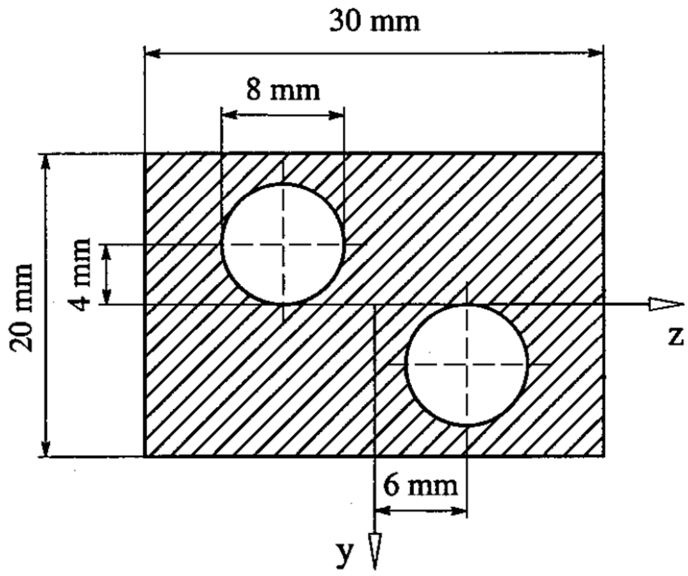


Klassifizieren Sie die Belastungsfälle und den Spannungszustand.

Fall	Biegung reine	Biegung gerade	Biegung schiefe	Torsion
A				
B				
C				
D				

Aufgabe 3: Prüfungsaufgabe Wintersemester 2001/2002

Beim dargestellten Rechteckprofil wurden punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung zwei Bohrungen vorgenommen.



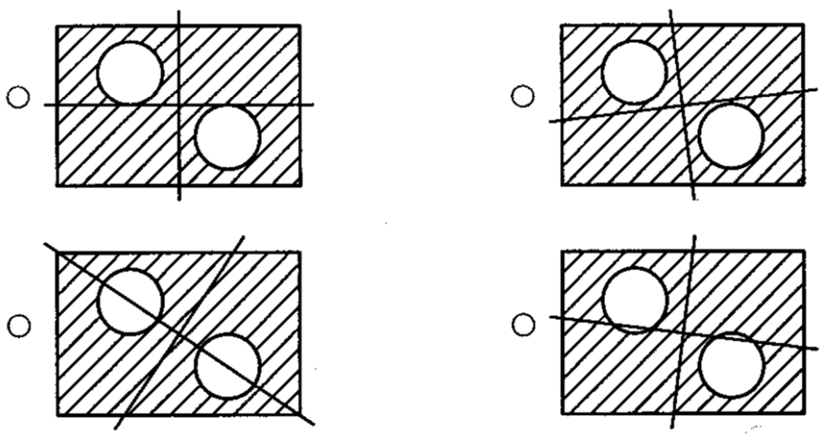
a) Berechnen Sie die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sowie das Flächendeviationsmoment I_{yz}.

I_y = ___________________________________

I_z = ___________________________________

I_{yz} = ___________________________________

b) Entscheiden Sie ohne Rechnung, welche Orientierung der Hauptträgheitsachsen die richtige ist.



Aufgabe 1: Der Massenmittelpunkt eines starren Körpers habe in einem Inertialsystem den Ortsvektor

$$\mathrm{r} = \left[\mathrm{b}\sin(\mathrm{kt}),\ \mathrm{b}\cos(\mathrm{kt}),\ \tfrac{1}{2}\mathrm{ct}^2\right]^T,\quad \mathrm{b, c, k} = \text{konst.}$$

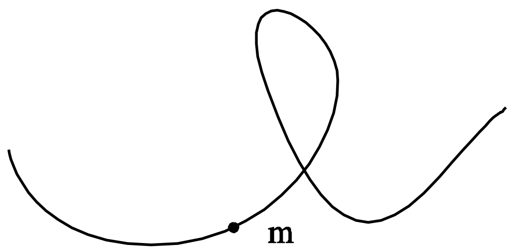
a) Wie lauten der Geschwindigkeits− und der Beschleunigungsvektor?

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

b) Ist der Betrag der Geschwindigkeit bzw. der Beschleunigung konstant?

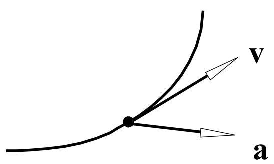
	ja	nein
v = konst.	❍	❍
a = konst.	❍	❍

Aufgabe 2:

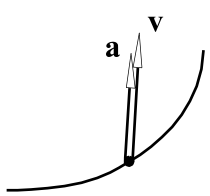


Ein Massenpunkt m bewegt sich auf einer ebenen, gekrümmten Bahn.

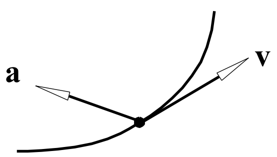
Welche der Skizzen sind kinematisch möglich?



❍

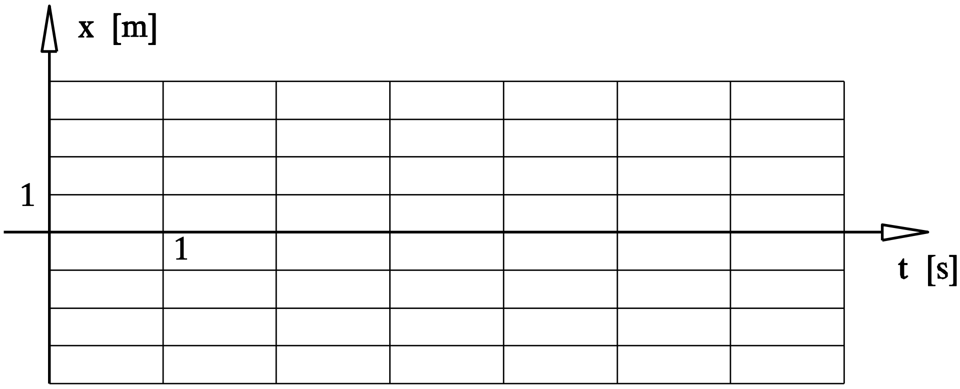


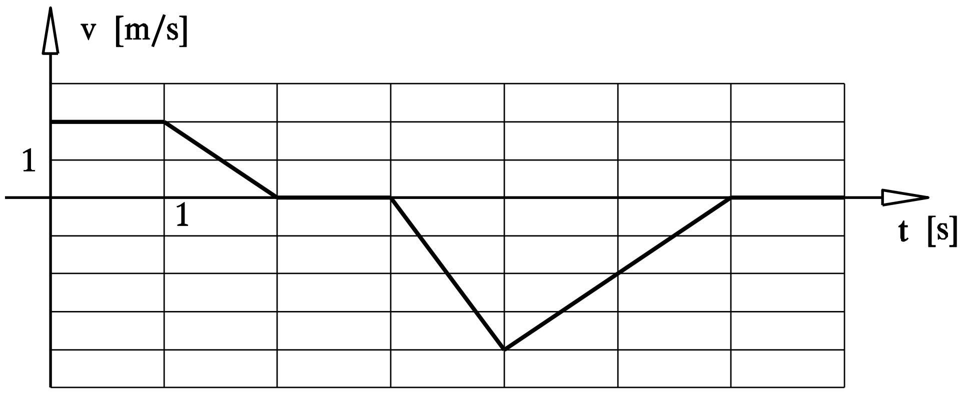
❍

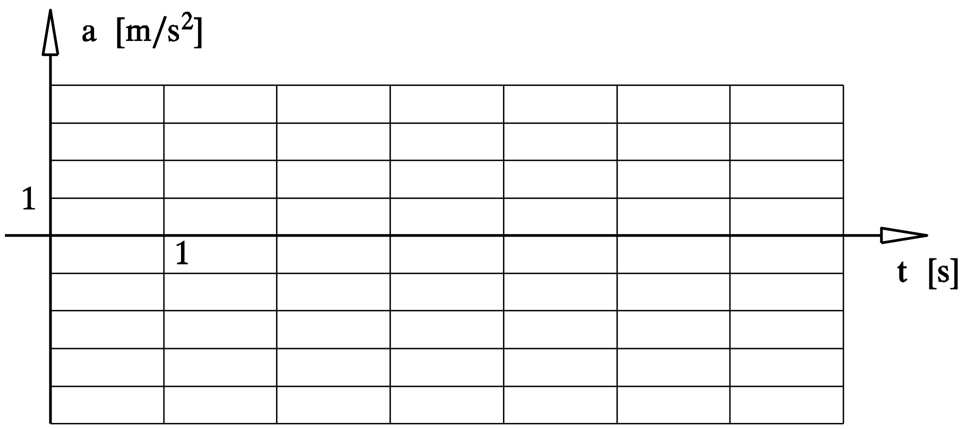


❍

Aufgabe 3: Gegeben ist das Geschwindigkeits−Zeit−Diagramm $v = v(t)$ einer geradlinigen Bewegung in Richtung der x−Achse. Zeichnen sie den Weg $x = x(t)$ mit der Anfangsbedingung des Weges $x(0) = 0$ und die Beschleunigung $a = a(t)$ maßstabsrichtig in die vorbereiteten Achsenkreuze ein.







Aufgabe 4: Ein Punkt P bewegt sich entlang der x−Achse. Die Lage des Punktes ist durch

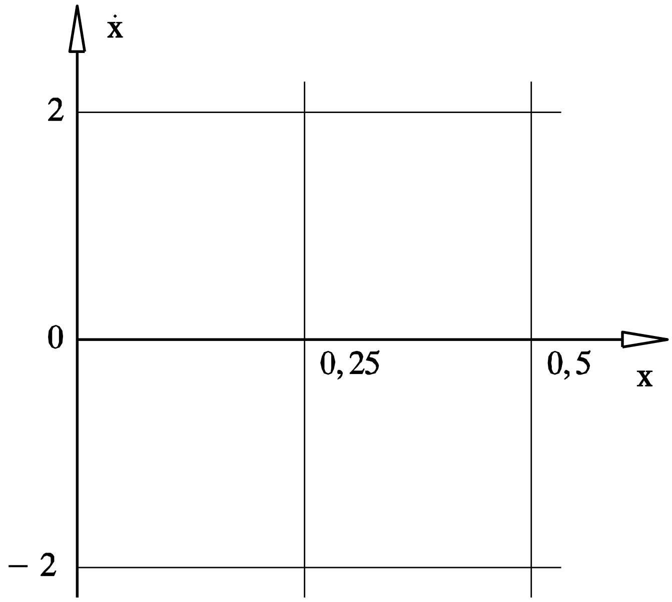
$$x(t) = \frac{1}{2} - 2t + 2t^2, \qquad 0 \le t \le 1,$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Funktion $\dot{x} = \dot{x}(x)$ (Phasenkurve).

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

b) Zeichnen Sie die Phasenkurve in das gegebene Diagramm ein.

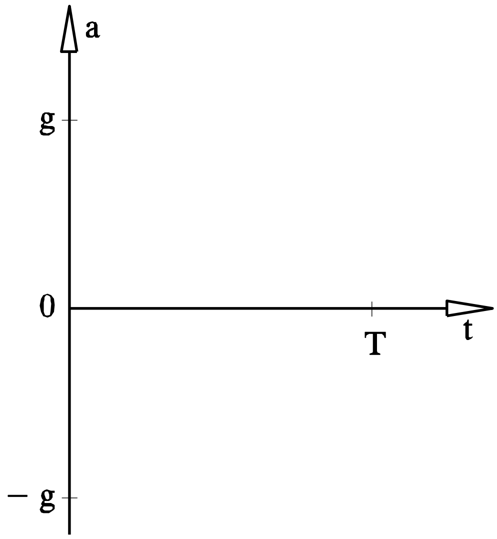


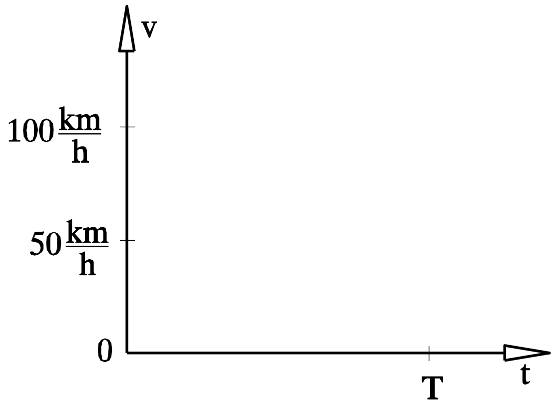
c) Markieren Sie die Punkte $t = 0$, $t = 0.5$ und $t = 1$ auf der Phasenkurve.

Aufgabe 5: Um die zulässige Höchstgeschwindigkeit von $50\ \mathrm{km/h}$ einzuhalten, leitet ein Autofahrer rechtzeitig vor einer geschlossenen Ortschaft den Bremsvorgang ein.

In welcher Entfernung vor dem Ortsschild muss er mit dem Bremsvorgang beginnen, wenn seine Geschwindigkeit $100\ \mathrm{km/h}$ beträgt und die Bremsverzögerung während der Bremsdauer T linear von 0 auf $0.7g$ ($g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$) ansteigt?

a) Skizzieren Sie den Verlauf der Beschleunigung und der Geschwindigkeit des Bremsvorgangs.





b) Bestimmen Sie zunächst die Dauer T der Verzögerung.

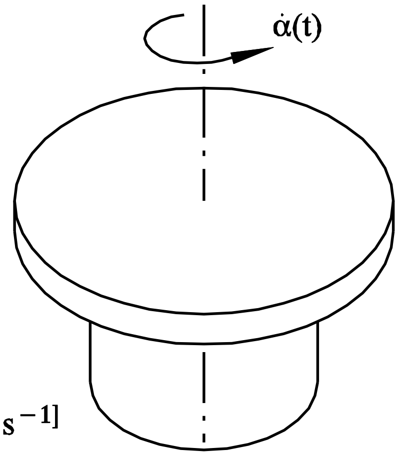
$T =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

c) In welcher Entfernung s vor dem Ortsschild beginnt der Bremsvorgang?

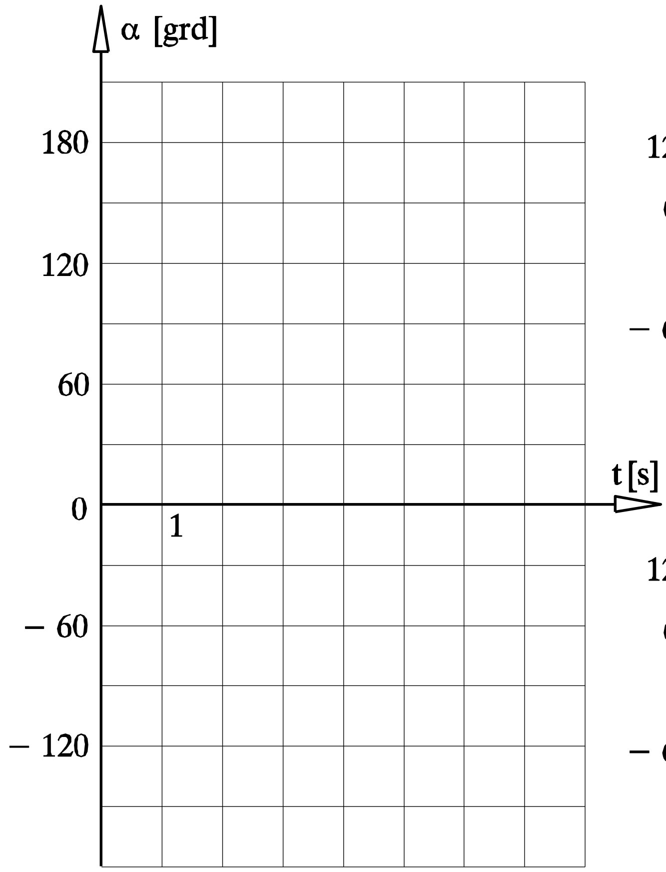
$s =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

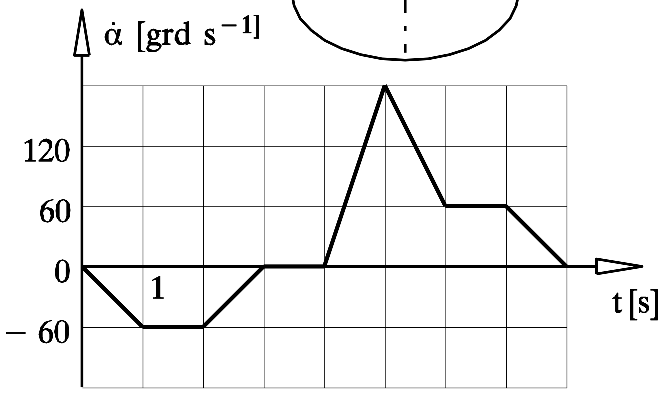
Aufgabe 6: Eine von einem Motor angetriebene Scheibe dreht sich um ihre Achse. Auf einem Messschrieb wurde die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ der Scheibe festgehalten.

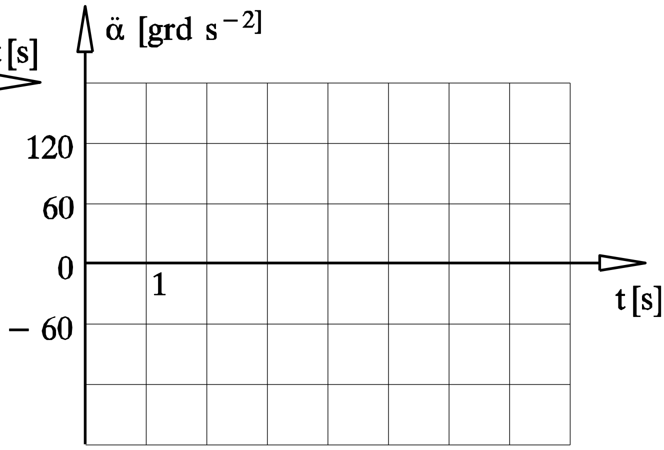
Ermitteln Sie daraus den Verlauf des Drehwinkels α und der Winkelbeschleunigung $\ddot{\alpha}$ und zeichnen Sie diese maßstabsrichtig in die Diagramme ein.



Für die Anfangsbedingungen gilt: $\alpha(t = 0) = 0$.







Aufgabe 1: Relativbewegung

Viele Punktbewegungen, die z.B. durch den Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ eines Punktes P in einem raumfesten Koordinatensystem $K\{O, x, y, z\}$ gegeben sind, lassen sich einfacher beschreiben, wenn man die Bewegung in einem geeignet gewählten bewegten Koordinatensystem $K'\{O', x', y', z'\}$ darstellt. Die Bewegung setzt sich dann zusammen aus der Relativbewegung in K' und der Bewegung von K'.

Nun sei die Bewegung in K' durch

$$\mathbf{r}_{O'PK'} = [\,u(t),\ v(t),\ 0\,]^T$$

und der Ortsvektor des Ursprungs O' von K' (beschrieben in K) durch

$$\mathbf{r}_{OO'K} = [1, 1, 1]^T$$

gegeben. Die Drehung von K' gegen K werde durch folgende Transformationsmatrix dargestellt:

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8\cos\varphi & -0.8\sin\varphi \\ -0.8 & 0.6\cos\varphi & -0.6\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},\ \varphi = \varphi(t).$$

Gesucht ist jetzt die Absolutgeschwindigkeit des Punktes P (gegenüber K), dargestellt in K'

$$\mathbf{v}_{OPK'} = \mathbf{v}_{OO'K'} + \boldsymbol{\omega}_{KK'K'} \times \mathbf{r}_{O'PK'} + \mathbf{v}_{O'PK'}\ .$$

Der Drehvektor $\boldsymbol{\omega}_{KK'K}$ (im K−System) kann aus dem Matrizenprodukt $\dot{\mathbf{C}}_{KK'} \cdot \mathbf{C}_{K'K}$ gewonnen werden:

$$\dot{\mathbf{C}}_{KK'} \cdot \mathbf{C}_{K'K} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe des Rösselsprungs kann man $\boldsymbol{\omega}_{KK'K}$ ablesen

$$\boldsymbol{\omega}_{KK'K} = \begin{bmatrix} \quad\quad & , \quad\quad & , \quad\quad \end{bmatrix}^T$$

Welche Koordinaten hat $\boldsymbol{\omega}_{KK'K'}$?

$$\boldsymbol{\omega}_{KK'K'} = \_\_\_\_\ \boldsymbol{\omega}_{KK'K} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Welche Relativgeschwindigkeit hat der Punkt P (dargestellt in K')?

$$\mathbf{v}_{O'PK'} = \frac{d'}{dt}\mathbf{r}_{O'PK'} = \begin{bmatrix} \quad\quad & , \quad\quad & , \quad\quad \end{bmatrix}^T$$

Welche Absolutgeschwindigkeit hat der Punkt P (dargestellt in K')?

$$\mathbf{v}_{OPK'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_{OO'K'}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad\quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}_{KK'K'} \times \mathbf{r}_{O'PK'}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_{O'PK'}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Zum Vergleich soll jetzt die Absolutgeschwindigkeit im raumfesten Koordinatensystem K ermittelt werden.

Welche Koordinaten hat dort der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ des Punktes P?

$$\mathbf{r}_{OPK} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{KK'}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_{O'PK'}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_{OO'K}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Die Absolutgeschwindigkeit in K erhält man durch Differenzieren der Koordinaten von $\mathbf{r}_{\mathrm{OPK}}(\mathrm{t})$ nach der Zeit

$$\mathbf{v}_{\mathrm{OPK}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{r}_{\mathrm{OPK}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Zur Überprüfung der Rechnung wird $\mathbf{v}_{\mathrm{OPK'}}$ in das raumfeste System K transformiert.

$$\mathbf{v}_{\mathrm{OPK}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\mathrm{KK'}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_{\mathrm{OPK'}}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

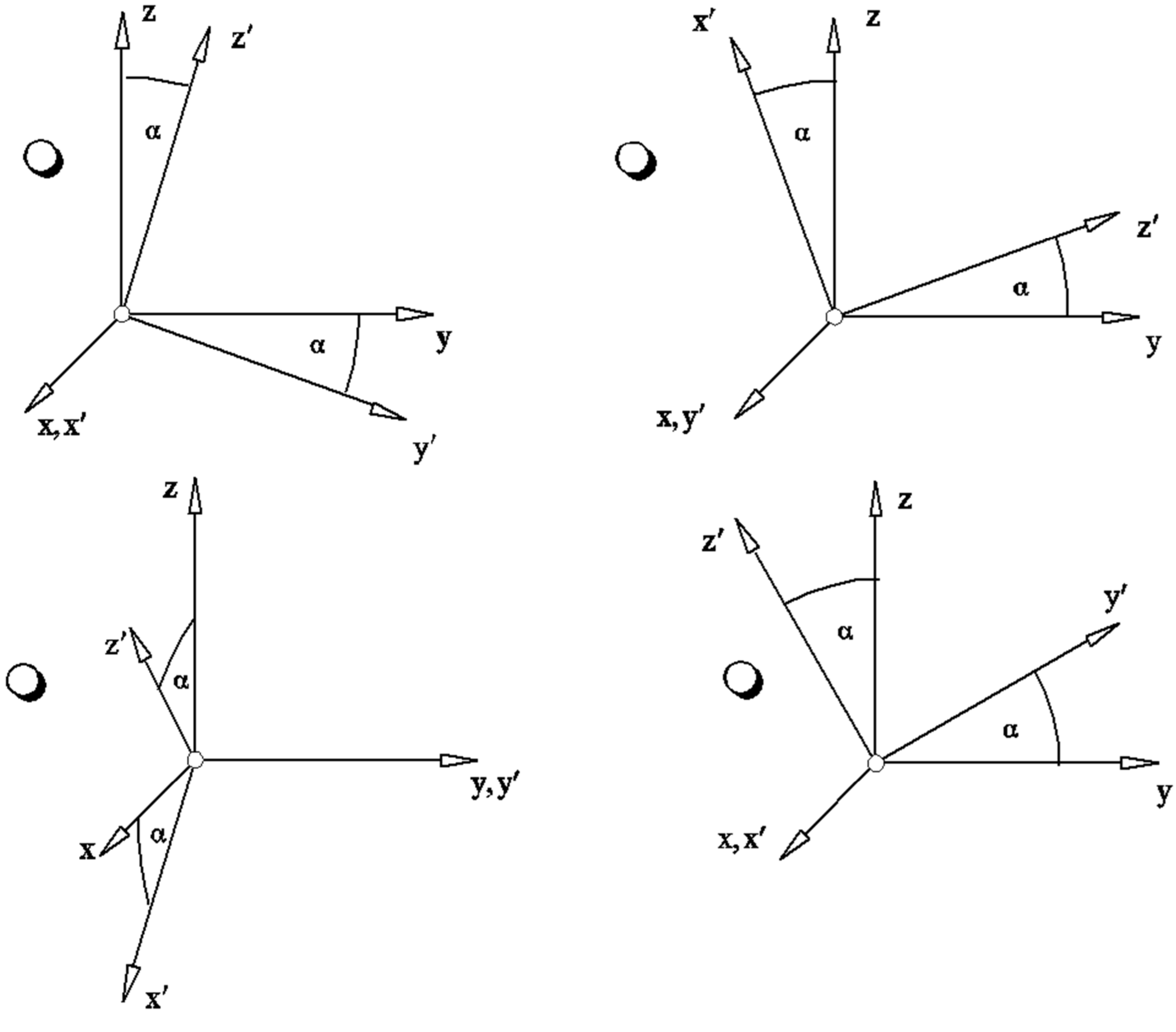
Vergleichen Sie die beiden letzten Ergebnisse.

Aufgabe 2:

Die Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen K und K' lautet

$$\mathbf{C}_{\mathrm{KK}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

a) Welche Lage haben die Systeme zueinander?



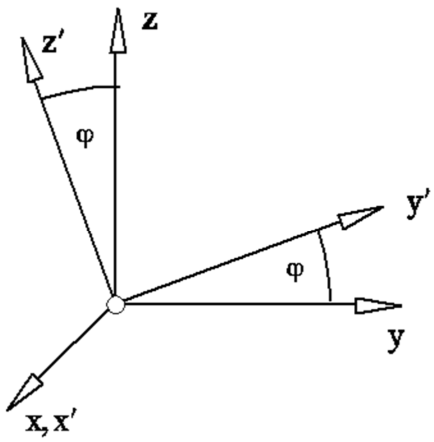
b) Wie lautet der Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK'K}}$, mit dem sich K' gegen K dreht, dargestellt im System K?

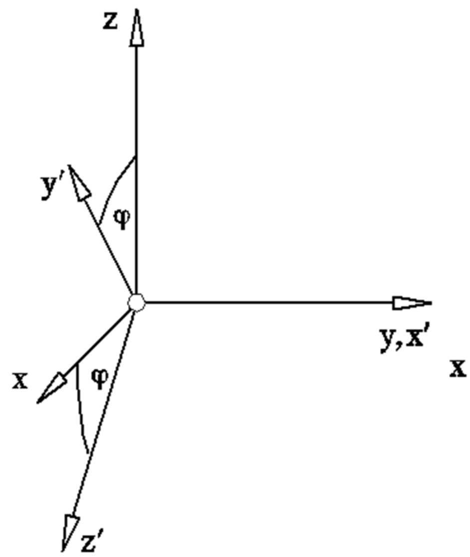
$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK'K}} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad , & \qquad\qquad , & \qquad\qquad \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

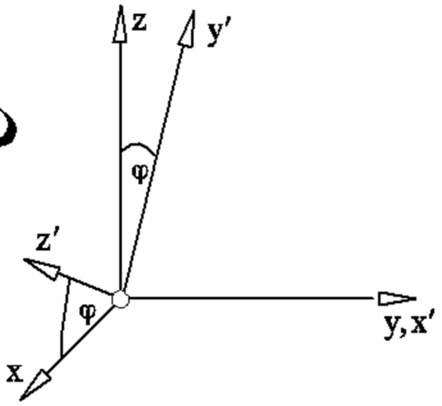
Aufgabe 3: Gegeben ist die Matrix der Richtungskosinusse für die beiden kartesischen Koordinatensysteme K und K'

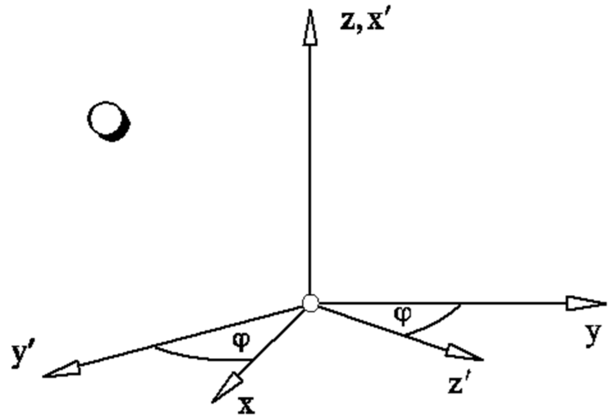
$$\mathbf{C}_{\mathrm{KK}'} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi = \omega t, \quad \omega > 0\,.$$

a) Welche Lage haben die Systeme zueinander?

○ 

○ 

○ 

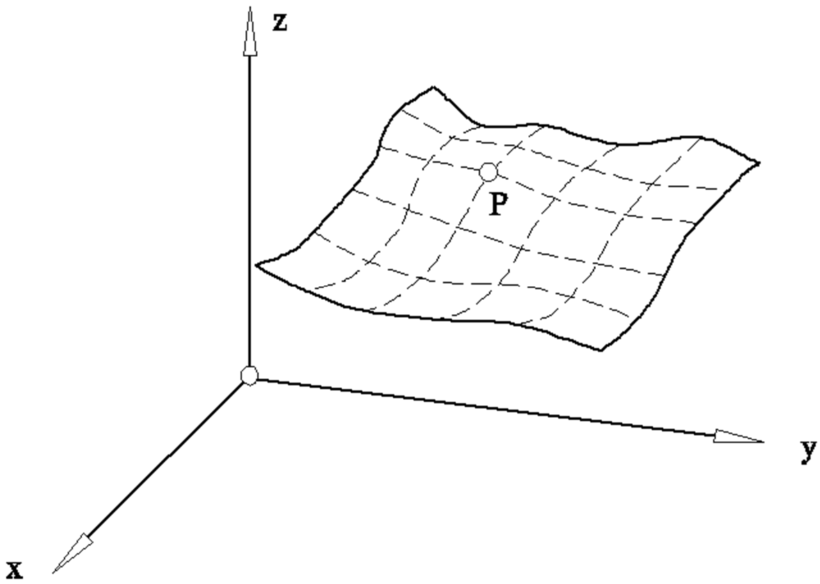
○ 

b) Der Drehvektor $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{KK}'}$, mit dem sich K' gegen K dreht, liegt in

- ○ positiver
- ○ negativer

- ○ x − Richtung
- ○ y − Richtung
- ○ z − Richtung.

Aufgabe 1:



Wie viele Freiheitsgrade besitzt ein Punkt P, der sich auf der skizzierten gekrümmten Fläche bewegt?

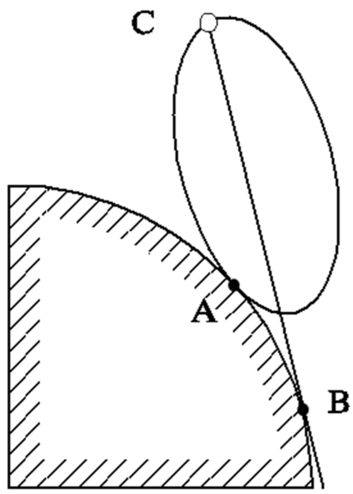
- ❍ f = 1
- ❍ f = 2
- ❍ f = 3

Aufgabe 2: Wie viele Freiheitsgrade hat ein starrer Körper, der aus zehn durch Stäbe miteinander verbundenen Punkten aufgebaut ist?

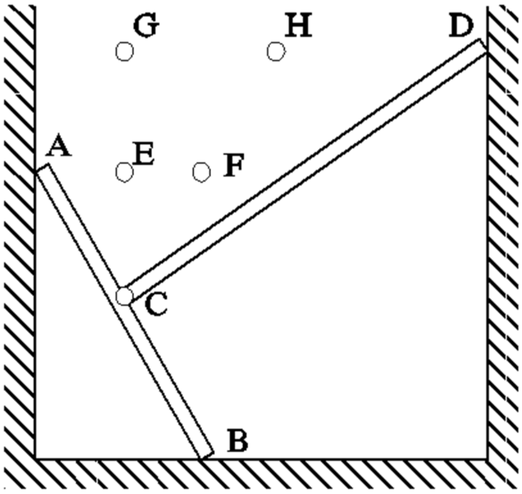
❍ f = 3 ❍ f = 6 ❍ f = 30 ❍ f = 60

Aufgabe 3: Ein elliptischer Körper rollt auf einer kreisförmigen Führung ab (Berührungspunkt A). Im Punkt C ist ein Stab gelenkig mit dem Körper verbunden. Der Stab gleitet im Punkt B auf der Führung.

Konstruieren Sie den Momentanpol P des Stabes.



Aufgabe 4:



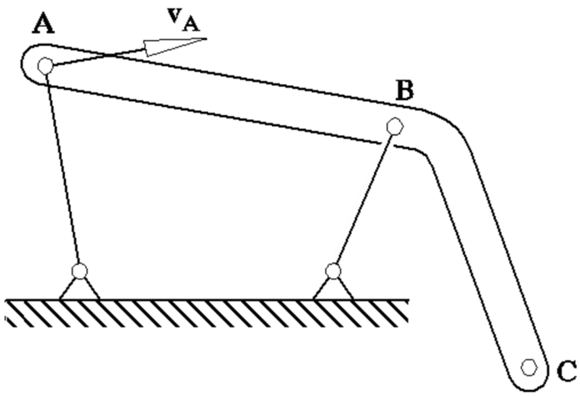
Die Stäbe AB und CD sind bei C durch ein Gelenk verbunden und gleiten in einer rechteckigen Vertiefung mit glatten Seitenwänden.

Wo liegen die Momentanpole P_{AB} und P_{CD} der Stäbe AB und CD in der skizzierten Lage?

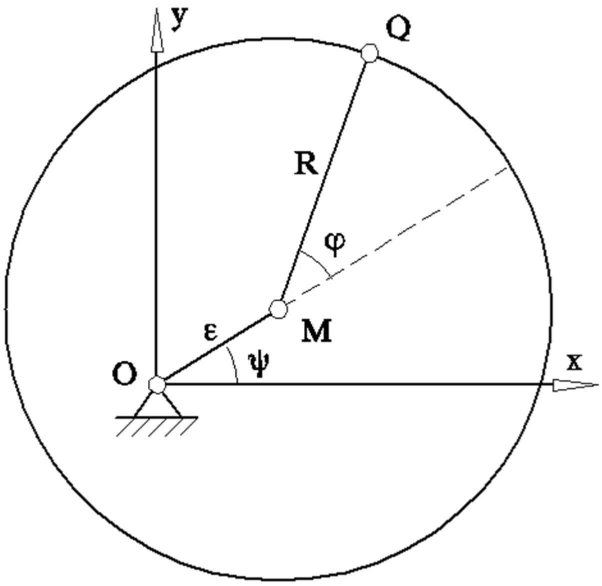
Pol / Punkt	A	B	C	D	E	F	G	H
P_{AB}								
P_{CD}								

Aufgabe 5:

Konstruieren Sie die Geschwindigkeit des Punktes C nach Größe und Richtung.



Aufgabe 6:



Eine exzentrisch gelagerte Kreisscheibe drehe sich in der x,y−Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\psi}$ um die z−Achse. Die Lage des Punktes Q der Scheibe sei durch den Winkel φ zwischen OM und MQ festgelegt.

a) Welche Koordinaten hat der Ortsvektor $\mathbf{r}$ von Q im Koordinatensystem $\{x, y, z\}$?

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{6cm}} \\ \underline{\hspace{6cm}} \\ \underline{\hspace{6cm}} \end{bmatrix}$$

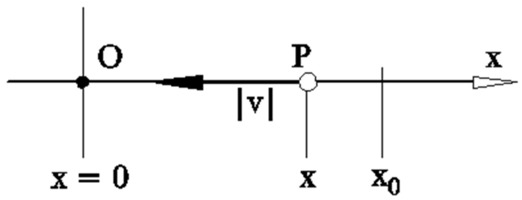
b) Welche Koordinaten hat die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ von Q?

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{9cm}} \\ \underline{\hspace{9cm}} \\ \underline{\hspace{9cm}} \end{bmatrix}$$

c) Welcher Punkt ist der Momentanpol P der Scheibe?

❍ $P = M$ ❍ $P = O$ ❍ $P = Q$

Aufgabe 7:



Ein Punkt P bewege sich geradlinig auf der x−Achse. Zur Zeit $t_0 = 0$ sei er an der Stelle $x = x_0 > 0$.

Seine Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$ sei stets zum Ursprung O gerichtet, ihr Betrag sei proportional zum Abstand x vom Ursprung O (Proportionalitätsfaktor $k > 0$).

a) Wie lauten die Funktionen $v = v(x)$, $a = a(x)$ und $x = x(t)$?

Dabei sei $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ die Beschleunigung von P.

$v(x) =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ , $a(x) =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ,

$x(t) =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

b) Erreicht P den Ursprung in endlicher Zeit?

○ Ja ○ Nein

Aufgabe 8: Der Bewegungswinder eines starren Körpers im Punkt B sei ($\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{v}_B$).

Wie lautet der äquivalente Winder im Punkt A?

$\Big($ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $\Big)$