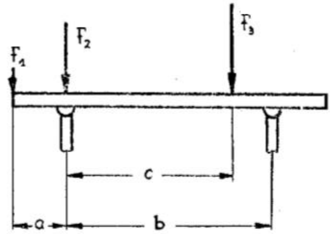
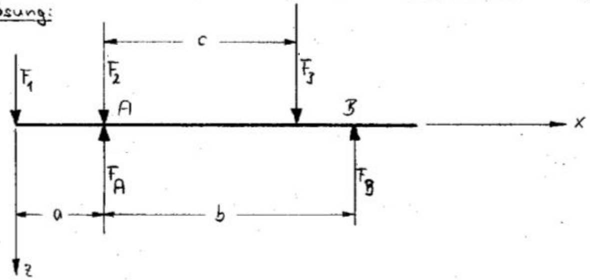
Aufgabe 6.3: Der Holm eines Barrens wird (z.B. durch turnende Kinder) in der skizzierten Weise belastet.



Man bestimme die Kräfte auf die Stützen, den Querkraft- und den Momentenverlauf im Holm (mit Skizze). Wegen des Lagerspiels kann die Lagerung als statisch bestimmt betrachtet werden.

$F_1 = 100$ N, $F_2 = 300$ N, $F_3 = 400$ N,
$a = 0{,}6$ m, $b = 2{,}2$ m, $c = 1{,}8$ m.

Lösung:



Lagerreaktionen:

Momentengleichgewicht bzgl. A $\Rightarrow$ $aF_1 - cF_3 + bF_B = 0 \Rightarrow \underline{\underline{F_B = 300\,N}}$

Kräftegleichgewicht $\Rightarrow$ $F_1 + F_2 + F_3 - F_A - F_B = 0 \Rightarrow \underline{\underline{F_A = 500\,N}}$

Die Kräfte auf die Stützen sind entsprechend $-F_A$ und $-F_B$.

Querkraft

Bei Verwendung der Klammerfunktionen ergibt sich für den Querkraftverlauf:

$$Q(x) = -F_1\{x\}^0 + (F_A - F_2)\{x-a\}^0 - F_3\{x-(a+c)\}^0 + F_B\{x-(a+b)\}^0.$$

Biegemoment:

$$M(x) = -F_1\{x\}^1 + (F_A - F_2)\{x-a\}^1 - F_3\{x-(a+c)\}^1 + F_B\{x-(a+b)\}^1.$$

Ausgeschrieben erhält man in den einzelnen Balkenfeldern

I $(0 < x < a)$:

$$Q(x) = -F_1 = -100\,N$$
$$M(x) = -F_1 x \Rightarrow M(a) = -60\,Nm$$

II $(a < x < a+c)$:

$$Q(x) = -F_1 + (F_A - F_2) = 100\,N$$
$$M(x) = -F_1 x + (F_A - F_2)(x-a) \Rightarrow M(a+c) = 120\,N$$

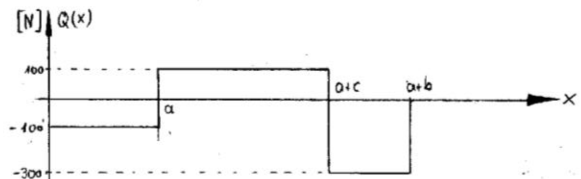
III $(a+c < x < a+b)$:

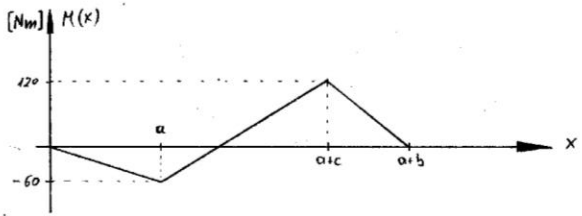
$$Q(x) = -F_1 + (F_A - F_2) - F_3 = -300\,N$$
$$M(x) = -F_1 x + (F_A - F_2)(x-a) - F_3(x-a-c) \Rightarrow M(a+b) = 0$$

IV $(x > a+b)$:

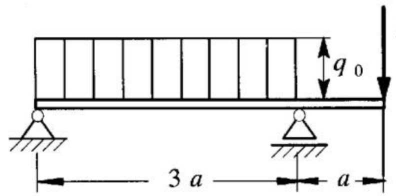
$$Q(x) = -F_1 + (F_A - F_2) - F_3 + F_B = -F_1 - F_2 - F_3 + F_A + F_B = 0.$$
$$M(x) = -F_1 x + (F_A - F_2)(x-a) - F_3(x-a-c) + F_B(x-a-b)$$
$$= \underbrace{(-F_1 - F_2 - F_3 + F_A + F_B)}_{=0\text{, Kräftegleichgewicht!}} x + \underbrace{(F_2 - F_A)a + F_3(a+c) - F_B(a+b)}_{=0\text{ Momentengleichgewicht bzgl } x=0!}$$
$$= 0.$$

Skizze

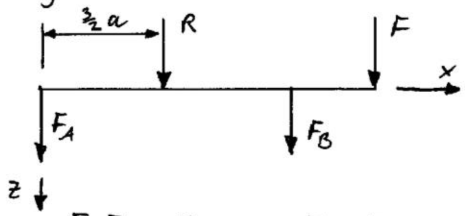




Aufgabe 6.9: Ein Balken werde entsprechend der nebenstehenden Skizze mit einer stetig verteilten Last $q_0 = F/a$ und einer Einzelkraft $\vec{F}$ belastet.
Man berechne die Auflagerreaktionen, die Querkraft– und die Momentenfläche.



*) Lagerreaktionen:



Streckenlast durch Einzellast R im Schwerpunkt der Fläche ersetzen:

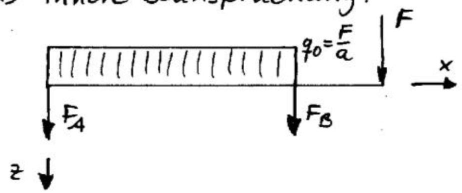
$R = 3aq_0 = 3F$

$\sum F_z = F_A + 3F + F_B + F = 0 \qquad (1)$

$\sum M_A = -3F\frac{3a}{2} - F_B 3a - F4a = 0 \qquad (2) \rightsquigarrow F_B = -\frac{17}{6}F$

aus (1) $\rightsquigarrow \quad F_A = -\frac{7}{6}F$

*) Innere Beanspruchung:



$$q(x) = q_0\{x-0\}^0 - q_0\{x-3a\}^0$$
$$= \frac{F}{a} - \frac{F}{a}\{x-3a\}^0$$

$$Q(x) = -\int_0^x q(\xi)\,d\xi - \sum_i F_i\{x-\xi_i\}^0$$
$$= -\frac{F}{a}x + \frac{F}{a}\{x-3a\}^1 - F_A - F_B\{x-3a\}^0$$
$$= \frac{7}{6}F - \frac{F}{a}x + \frac{17}{6}F\{x-3a\}^0 + \frac{F}{a}\{x-3a\}^1$$

$$M(x) = \int_0^x Q(\xi)\,d\xi - \sum_j M_j\{x-\xi_j\}^0$$
$$= \frac{7}{6}Fx - \frac{1}{2a}Fx^2 + \frac{17}{6}F\{x-3a\}^1 + \frac{1}{2a}F\{x-3a\}^2$$

*) Werte an den Feldgrenzen:

$Q(3a-0) = -\frac{11}{6}F \qquad M(3a) = -Fa$

*) Nulldurchgang von Q innerhalb der Felder:

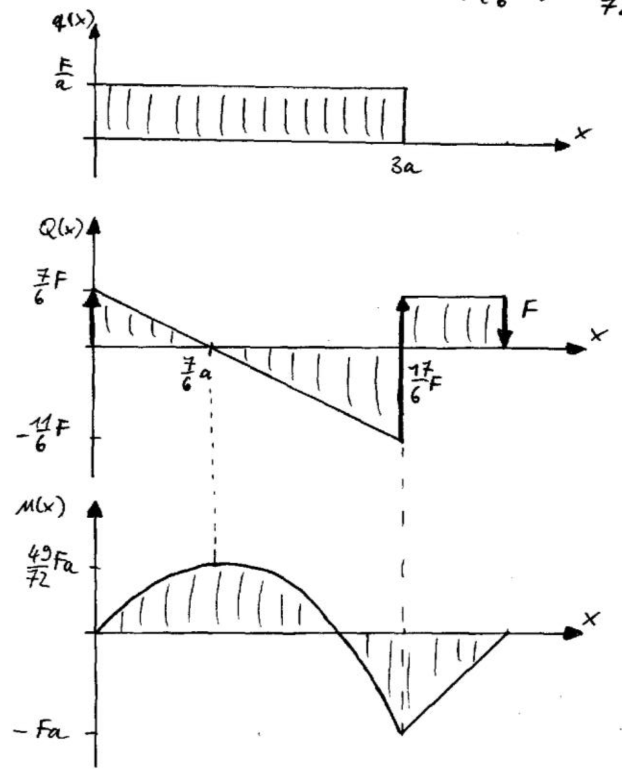
$Q(x) \overset{!}{=} 0$

a) $0 < x \leq 3a$: $\quad \frac{7}{6}F - \frac{F}{a}x \overset{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow x = \frac{7}{6}a$

b) $3a < x \leq 4a$: $\quad \frac{7}{6}F - \frac{F}{a}x + \frac{17}{6}F + \frac{F}{a}(x-3a) \overset{!}{=} 0$

$\rightsquigarrow \quad \left(\frac{7}{6} + \frac{17}{6} - \frac{18}{6}\right)F = 0 \quad ↯$

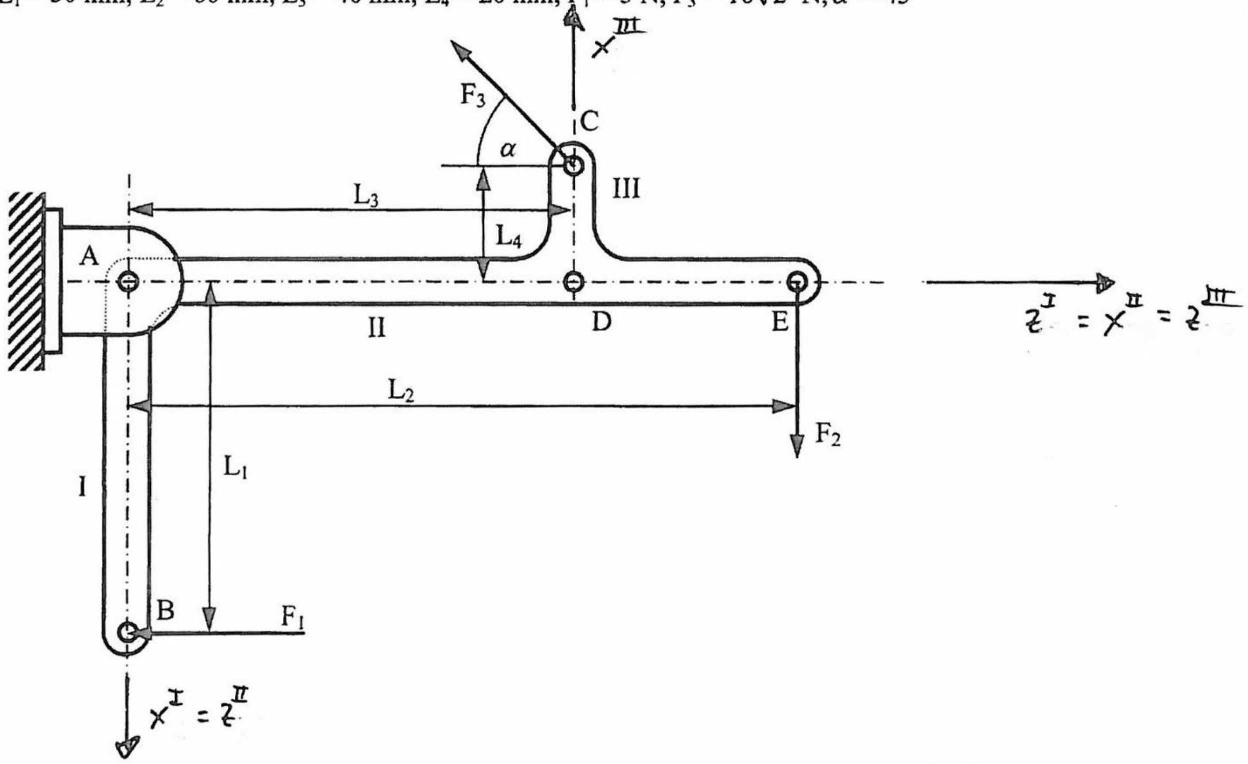
Lokales Extremum von M: $\quad M\left(\frac{7}{6}a\right) = \frac{49}{72}Fa \approx 0{,}68\,Fa$



Querkraft- und Momentenverlauf

Ein Hebel, an dem drei eingeprägte Kräfte angreifen, soll untersucht werden und wird zu diesem Zweck als Balken modelliert. Der Hebel ist in die drei Abschnitte I, II und III unterteilt und hat folgende Maße:

$L_1 = 30$ mm, $L_2 = 60$ mm, $L_3 = 40$ mm, $L_4 = 20$ mm, $F_1 = 5$ N, $F_3 = 10\sqrt{2}$ N, $\alpha = 45°$



a) Zeichnen Sie für jeden der Abschnitte I-III ein geeignetes Koordinatensystem K^{I}-K^{III} ein. Die x-Achse zeige stets in Balkenrichtung. Verwenden Sie für die Abschnitte I und II den Punkt A als Koordinatenursprung, für den Abschnitt III den Punkt D.

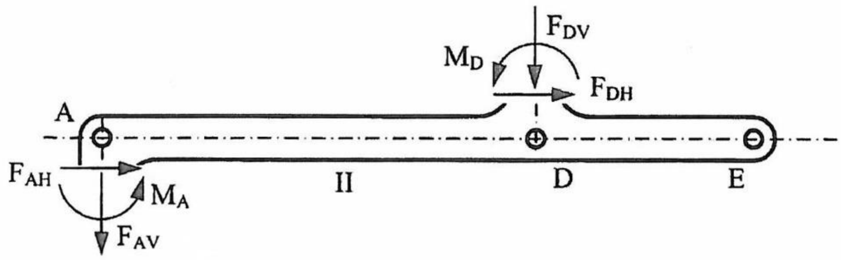
b) Berechnen Sie den Betrag der Kraft F_2, so dass der Hebel im Gleichgewicht ist.

$$F_2 = \frac{1}{L_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_3 \, (L_3 + L_4) - F_1 L_1\right) = \frac{15}{2} \text{ N}$$

c) Schneiden Sie den Hebel frei und berechnen Sie alle Lagerreaktionen im Punkt A, dargestellt im Koordinatensystem K^{II}.

$$\mathbf{F}_{RA}^{II} = \begin{bmatrix} +F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} F_3 = 15 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} F_3 - F_2 = \frac{5}{2} \text{ N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

d) Berechnen Sie alle in der folgenden Skizze eingezeichneten Schnittgrößen.



$F_{AH} = -F_1 = -5\,N$

$F_{DH} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_3 = -10\,N$

$F_{AV} = 0\,N$

$F_{DV} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_3 = -10\,N$

$M_A = -F_1 L_1 = -150\,Nmm$

$M_D = \frac{\sqrt{2}}{2} F_3 L_4 = 200\,Nmm$

e) Stellen Sie mit Hilfe der Klammerfunktion den Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverlauf in den Abschnitten I und II auf. Ergebnis für z_I, x_I. Bei gedrehten KOS z_I, x_I wechselt das Vorzeichen!

Abschnitt I:

$N^I(x^I) = 0\,N$

$Q^I(x^I) = F_{AH} + F_1 \langle x^I - L_1 \rangle^0 = -5N + 5N \langle x^I - 30mm \rangle^0$

$M^I(x^I) = -M_A + F_{AH}\, x^I + (+F_1 \langle x^I - L_1 \rangle^1)$

$= 150\,Nmm - 5N\, x^I$

Abschnitt II:

$N^{II}(x^{II}) = -A_x - F_{AH} - F_{DH} \langle x^{II} - L_3 \rangle^0 = -10N + 10N \langle x^{II} - 40mm \rangle^0$

$Q^{II}(x^{II}) = -A_z - F_{AV} - F_{DV} \langle x^{II} - L_3 \rangle^0 - F_2 \langle x^{II} - L_2 \rangle^0 = -\frac{5}{2}N + 10N \langle x^{II} - 40mm \rangle^0$

$-\frac{15}{2}N \langle x^{II} - 60mm \rangle^0$

$M^{II}(x^{II}) = -M_A - M_D \langle x^{II} - L_3 \rangle^0 - (A_z + F_{AV})\, x$

$- F_{DV} \langle x^{II} - L_3 \rangle^1 + (-F_2 \langle x^{II} - L_2 \rangle^1)$

$= 150\,Nmm - 200\,Nmm \langle x^{II} - 40mm \rangle^0 - \frac{5}{2} N\, x^{II}$

$+ 10N \langle x^{II} - 40mm \rangle^1$