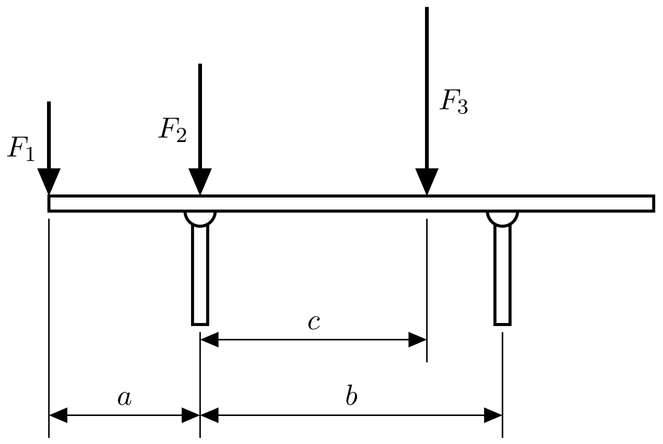
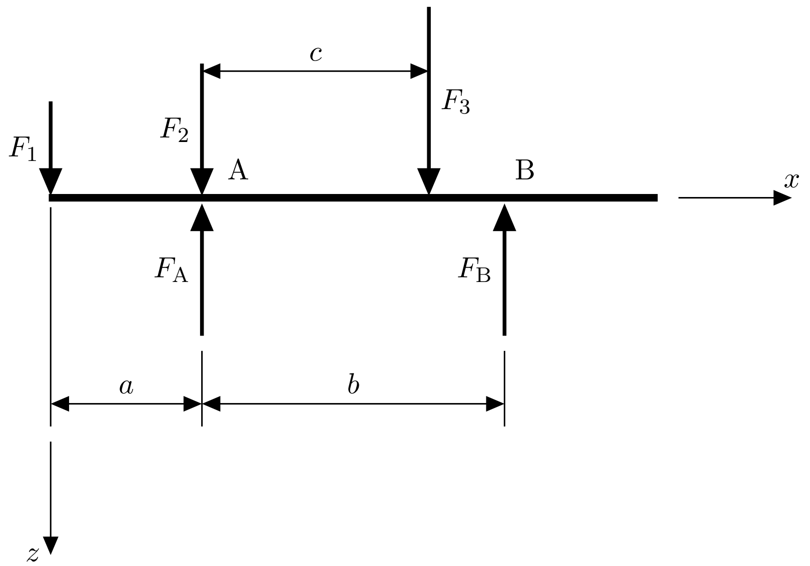
Aufgabe 6.3

Der Holm eines Barrens wird (z.B. durch turnende Kinder) in der skizzierten Weise belastet. Man bestimme die Kräfte auf die Stützen, den Querkraft- und den Momentenverlauf im Holm (mit Skizze). Wegen des Lagerspiels kann die Lagerung als statisch bestimmt betrachtet werden. Es gilt $F_1 = 100\,\text{N}$, $F_2 = 300\,\text{N}$, $F_3 = 400\,\text{N}$ sowie $a = 0{,}6\,\text{m}$, $b = 2{,}2\,\text{m}$ und $c = 1{,}8\,\text{m}$.



Lösung:



Lagerreaktionen:
Das Momentengleichgewicht bezüglich Punkt A ergibt

$$aF_1 - cF_3 + bF_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 300\,\text{N}.$$

Aus dem Kräftegleichgewicht in z-Richtung ergibt sich

$$F_1 + F_2 + F_3 - F_A - F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = 500\,\text{N}$$

Die Kräfte auf die Stützen sind entsprechend $-F_\text{A}$ und $-F_\text{B}$.

Querkraf und Biegemoment:
Bei Verwendung der Klammerfunktionen ergibt sich für den Querkraftverlauf

$$Q(x) = -F_1\langle x-0\rangle^0 + (F_A - F_2)\langle x-a\rangle^0 - F_3\langle x-(a+c)\rangle^0 + F_B\langle x-(a+b)\rangle^0$$

und für den Biegemomentenverlauf

$$M(x) = -F_1\langle x-0\rangle^1 + (F_A - F_2)\langle x-a\rangle^1 - F_3\langle x-(a+c)\rangle^1 + F_B\langle x-(a+b)\rangle^1$$

Ausgeschrieben erhält man in den einzelnen Balkenfeldern:

I $(0 < x < a)$:

$$Q(x) = -F_1 = -100\,\mathrm{N}$$
$$M(x) = -F_1 x \quad\Rightarrow\quad M(a) = -60\,\mathrm{Nm}$$

II $(a < x < a+c)$:

$$Q(x) = -F_1 + (F_A - F_2) = 100\,\mathrm{N}$$
$$M(x) = -F_1 x + (F_A - F_2)(x-a) - F_3(x-a-c) \quad\Rightarrow\quad M(a+c) = 120\,\mathrm{Nm}$$

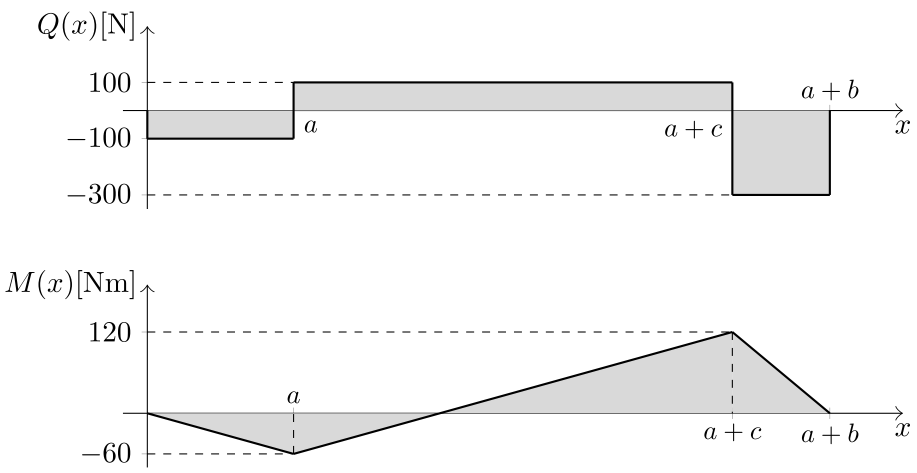
III $(a+c < x < a+b)$:

$$Q(x) = -F_1 + (F_A - F_2) - F_3 = -300\,\mathrm{N}$$
$$M(x) = -F_1 x + (F_A - F_2)(x-a) - F_3(x-a-c) \quad\Rightarrow\quad M(a+b) = 0\,\mathrm{Nm}$$

IV $(a+b < x)$:

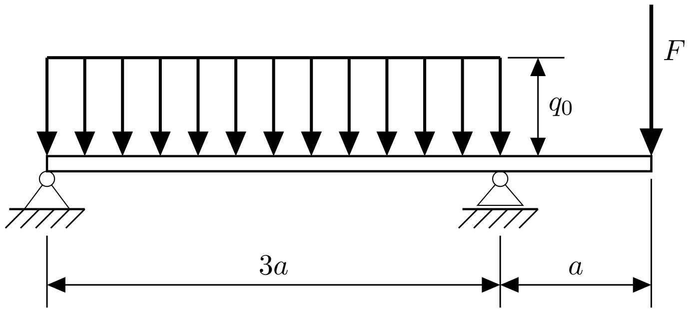
$$\begin{aligned} Q(x) &= -F_1 + (F_A - F_2) - F_3 + F_B = -F_1 - F_2 - F_3 + F_A + F_B = 0 \\ M(x) &= -F_1 x + (F_A - F_2)(x-a) - F_3(x-a-c) + F_B(x-a-b) \\ &= \underbrace{(-F_1 - F_2 - F_3 + F_A + F_B)}_{=\,0,\ \text{Kräftegleichgewicht!}}\,x + \underbrace{(F_2 - F_A)a + F_3(a+c) - F_B(a+b)}_{=\,0,\ \text{Momentengleichgewicht bzgl. x=0!}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>Skizze:</u>



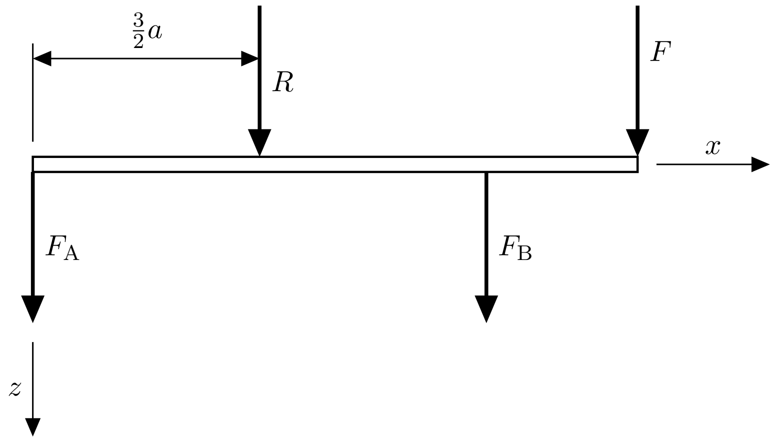
Aufgabe 6.9:

Ein Balken werde entsprechend der nebenstehenden Skizze mit einer stetig verteilten Last $q_0 = \frac{F}{a}$ und einer Einzelkraft F belastet. Man berechne die Auflagerreaktionen, den Querkraft- und den Momentenverlauf.



Lösung:

Lagerreaktionen:
Die Streckenlast durch Einzellast R im Schwerpunkt der Fläche ersetzen, wobei $R = 3aq_0 = 3F$.



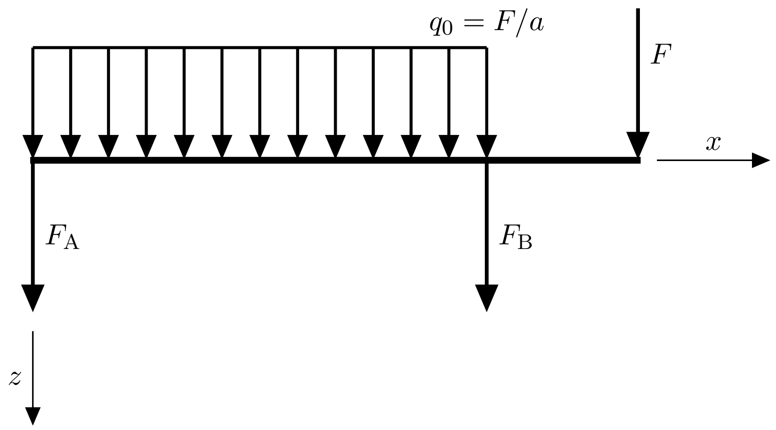
Es folgen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_z \overset{!}{=} 0: \quad F_A + 3F + F_B + F = 0, \tag{1}$$

$$\sum M_A \overset{!}{=} 0: \quad -3F\frac{3a}{2} - F_B 3a - F4a = 0 \tag{2}$$

und somit $F_B = -\frac{17}{6}F$ sowie $F_A = -\frac{7}{6}F$.

Innere Beanspruchung:



Es ergibt sich als Streckenlastverlauf

$$\begin{aligned} q(x) &= q_o\langle x-0\rangle^0 - q_o\langle x-3a\rangle^0 \\ &= \frac{F}{a} - \frac{F}{a}\langle x-3a\rangle^0, \end{aligned}$$

als Querkraftverlauf

$$\begin{aligned} Q(x) &= -\int_0^x q(\xi)d\xi - \sum_i F_{ix}\langle x-x_i\rangle^0 \\ &= -\frac{F}{a}x + \frac{F}{a}\langle x-3a\rangle^1 - F_A - F_B\langle x-3a\rangle^0 \\ &= \frac{7}{6}F - \frac{F}{a}x + \frac{17}{6}F\langle x-3a\rangle^0 + \frac{F}{a}\langle x-3a\rangle^1 \end{aligned}$$

und als Momentenverlauf

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_0^x Q(\xi)d\xi - \sum_i M_{iy}\langle x-x_i\rangle^0 \\ &= \frac{7}{6}Fx - \frac{1}{2a}Fx^2 + \frac{17}{6}F\langle x-3a\rangle^1 + \frac{1}{2a}F\langle x-3a\rangle^2. \end{aligned}$$

Werte an den Abschnittsgrenzen:

$Q(3a - \varepsilon) = -\frac{11}{6}F\,, \quad Q(3a + \varepsilon) = F \quad \text{mit } 0 < \varepsilon \ll 1$

$M(3a) = -Fa$

Nulldurchgang von Q innerhalb der Abschnitte:

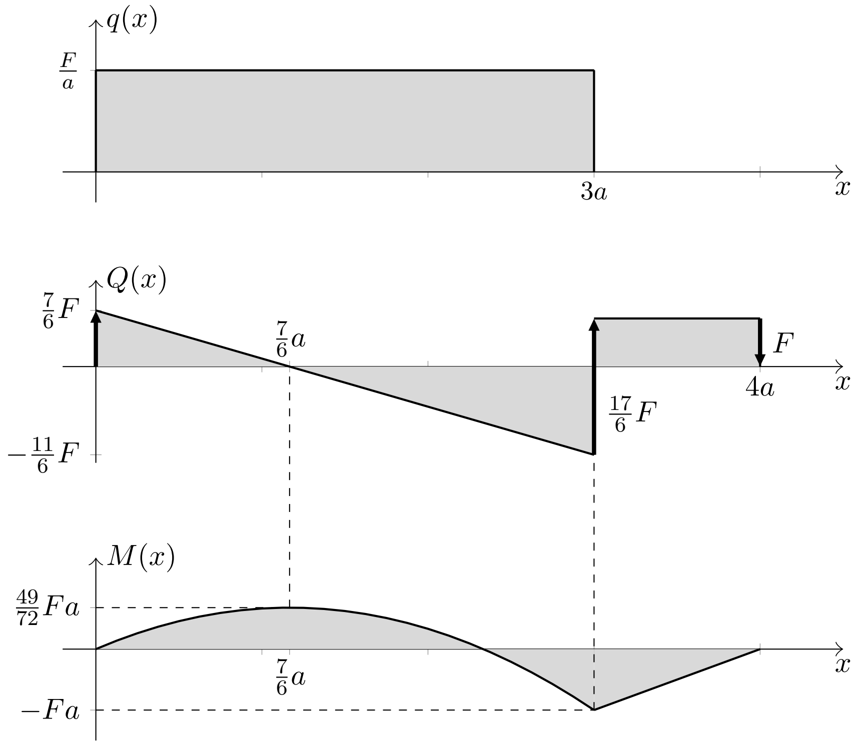
Wir suchen $Q(x) \stackrel{!}{=} 0$. Es folgt für die beiden Abschnitte

a) $0 \leq x < 3a: \quad \frac{7}{6}F - \frac{F}{a}x \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{7}{6}a$

b) $3a \leq x < 4a: \quad \frac{7}{6}F - \frac{F}{a}x + \frac{17}{6}F + \frac{F}{a}(x - 3a) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad (\frac{7}{6} + \frac{17}{6} - \frac{18}{6})F = 0$ ↯

Es ergibt sich somit ein lokales Extremum des Momentenverlaufs $M(x)$ bei

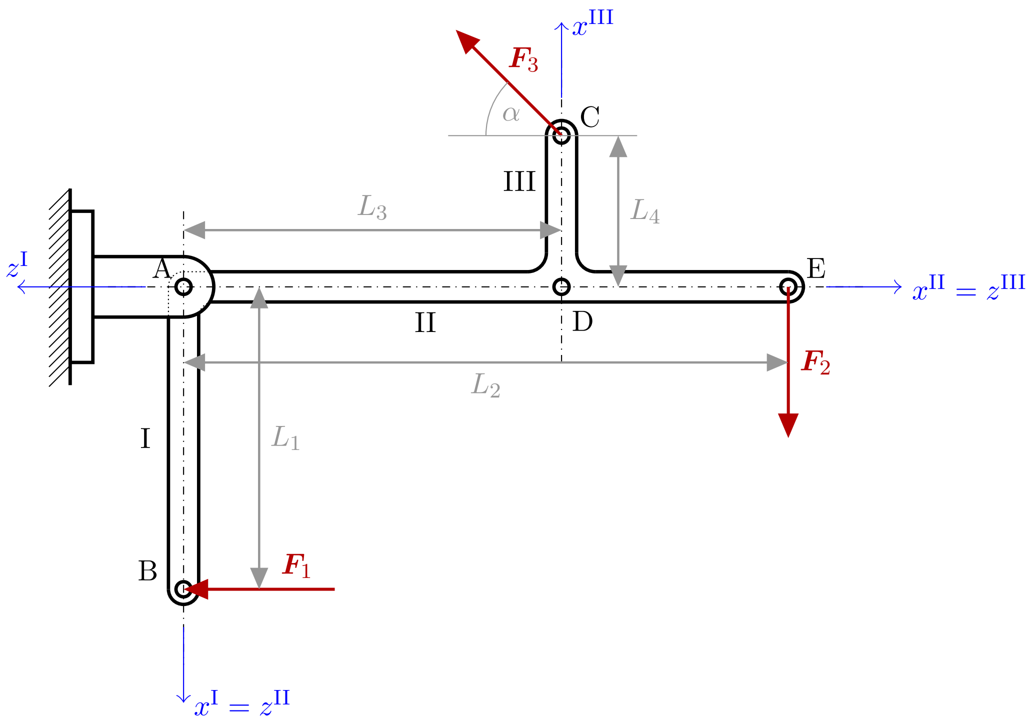
$$M\left(\frac{7}{6}a\right) = \frac{49}{72}Fa \approx 0{,}68Fa\,.$$



Querkraft- und Momentenverlauf

Ein Hebel, an dem drei eingeprägte Kräfte angreifen, soll untersucht werden und wird zu diesem Zweck als Balken modelliert. Der Hebel ist in die drei Abschnitte I, II und III unterteilt und hat folgende Maße:

$L_1 = 30\,\mathrm{mm}$, $L_2 = 60\,\mathrm{mm}$, $L_3 = 40\,\mathrm{mm}$, $L_4 = 20\,\mathrm{mm}$, $F_1 = 5\,\mathrm{N}$, $F_3 = 10\sqrt{2}\,\mathrm{N}$, $\alpha = 45\,°$



a) Zeichnen Sie für jeden der Abschnitte I - III ein geeignetes Koordinatensystem $\mathcal{K}^{\mathrm{I}}$ - $\mathcal{K}^{\mathrm{III}}$. Die x-Achse zeige stets in Balkenrichtung. Verwenden Sie für die Abschnitte I und II den Punkt A als Koordinatenursprung, für den Abschnitt III den Punkt D.

Die Koordinatensysteme sind entsprechend der Konvention für Balken aus der Vorlesung eingezeichnet.

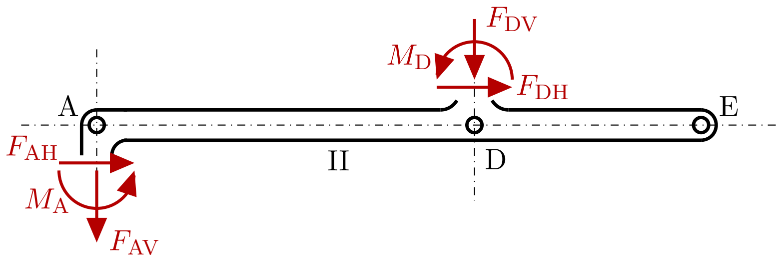
b) Berechnen Sie den Betrag der Kraft F_2, so dass der Hebel im Gleichgewicht ist.

$$F_2 = \frac{1}{L_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}F_3(L_3 + L_4) - F_1 L_1\right) = \frac{15}{2}\,\mathrm{N}$$

c) Schneiden Sie den Hebel frei und berechnen Sie alle Lagerreaktionen im Punkt A, dargestellt im Koordinatensystem $\mathcal{K}^{\mathrm{II}}$.

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{II}}_{\mathrm{r,A}} = \begin{bmatrix} F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_3 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15\,\mathrm{N} \\ 0\,\mathrm{N} \\ \frac{5}{2}\,\mathrm{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

d) Berechnen Sie alle in der folgenden Skizze eingezeichneten Schnittgrößen an den Punkten A und D.



$$F_{AH} = -F_1 = -5\,\mathrm{N} \qquad F_{DH} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F_3 = -10\,\mathrm{N}$$

$$F_{AV} = 0\,\mathrm{N} \qquad F_{DV} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F_3 = -10\,\mathrm{N}$$

$$M_A = -F_1 L_1 = -150\,\mathrm{Nmm} \qquad M_D = \frac{\sqrt{2}}{2}F_3 L_4 = 200\,\mathrm{Nmm}$$

e) Stellen Sie mit Hilfe der Klammerfunktion den Normalkraft-, Querkraft- und Momentenverlauf in den Abschnitten I und II auf.

Abschnitt I:

$$N^{\mathrm{I}}(x^{\mathrm{I}}) = 0\,\mathrm{N}$$

$$Q^{\mathrm{I}}(x^{\mathrm{I}}) = -F_{AH} - F_1\langle x^{\mathrm{I}} - L_1\rangle^0 = 5\,\mathrm{N} - 5\,\mathrm{N}\langle x^{\mathrm{I}} - 30\,\mathrm{mm}\rangle^0$$

$$M^{\mathrm{I}}(x^{\mathrm{I}}) = M_A - F_{AH}\,x^{\mathrm{I}} \quad \left(-F_1\langle x^{\mathrm{I}} - L_1\rangle^1\right)$$

$$= -150\,\mathrm{Nmm} + 5\,\mathrm{N}\,x^{\mathrm{I}}$$

Abschnitt II:

$$N^{\mathrm{II}}(x^{\mathrm{II}}) = -A_x - F_{AH} - F_{DH}\,\langle x^{\mathrm{II}} - L_3\rangle^0 = -10\,\mathrm{N} + 10\,\mathrm{N}\,\langle x^{\mathrm{II}} - 40\,\mathrm{mm}\rangle^0$$

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{II}}(x^{\mathrm{II}}) &= -A_z - F_{AV} - F_{DV}\,\langle x^{\mathrm{II}} - L_3\rangle^0 - F_2\,\langle x^{\mathrm{II}} - L_2\rangle^0 \\ &= -\frac{5}{2}\,\mathrm{N} + 10\,\mathrm{N}\,\langle x^{\mathrm{II}} - 40\,\mathrm{mm}\rangle^0 - \frac{15}{2}\,\mathrm{N}\,\langle x^{\mathrm{II}} - 60\,\mathrm{mm}\rangle^0 \end{aligned}$$

$$M^{\mathrm{II}}(x^{\mathrm{II}}) = -M_A - M_D\,\langle x^{\mathrm{II}} - L_3\rangle^0 - (A_z + F_{AV})x - F_{DV}\,\langle x^{\mathrm{II}} - L_3\rangle^1 + \left(-F_2\,\langle x^{\mathrm{II}} - L_2\rangle^1\right)$$

$$= 150\,\mathrm{Nmm} - 200\,\mathrm{Nmm}\,\langle x^{\mathrm{II}} - 40\,\mathrm{mm}\rangle^0 - \frac{5}{2}\,\mathrm{N}\,x^{\mathrm{II}} + 10\,\mathrm{N}\,\langle x^{\mathrm{II}} - 40\,\mathrm{mm}\rangle^1$$