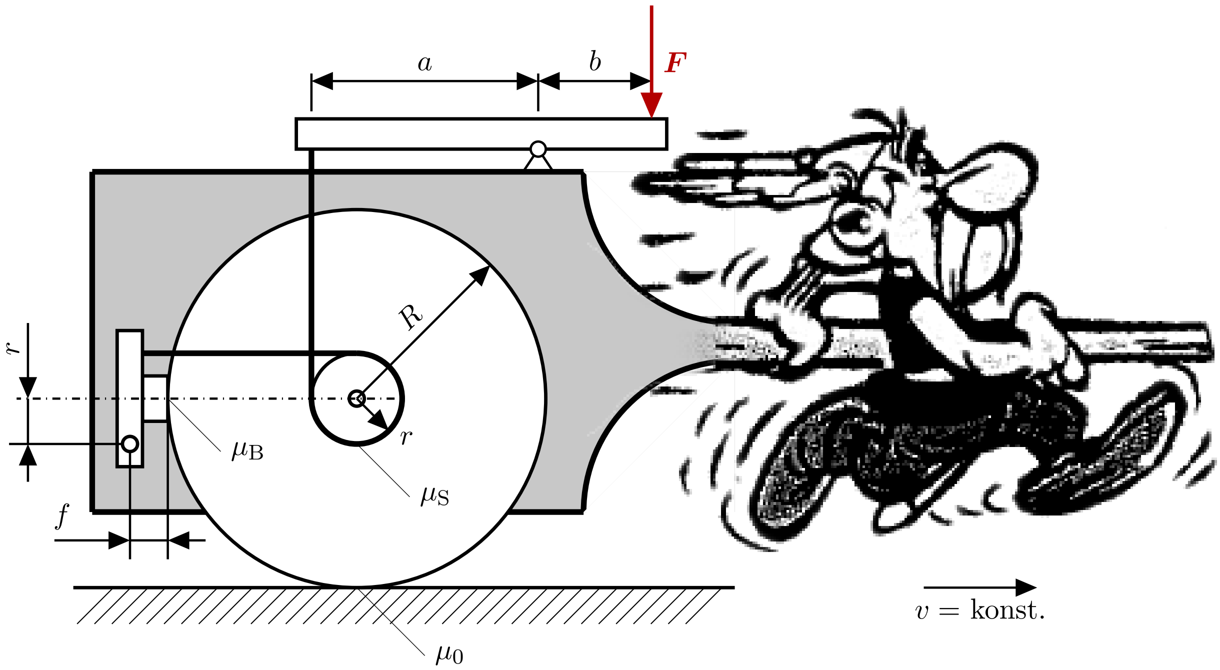
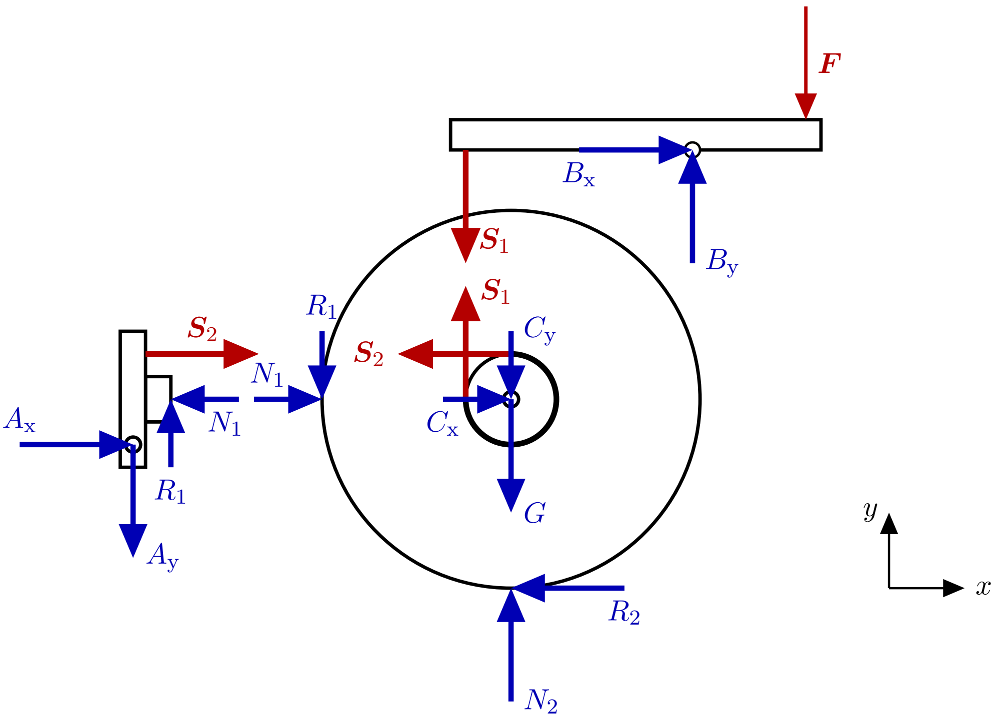
Alte Prüfungsaufgabe WS 1996/97

Ein einachsiger Wagen wird mit konstanter Geschwindigkeit gezogen. Die Bremse wurde nicht vollständig gelöst: durch die Kraft F wird über einen Hebel ein Seil gespannt (Gleitreibungskoeffizient μ_s), das den Bremsklotz gegen das Rad zieht (Gleitreibungskoeffizient μ_B). Das Rad (Gewicht G) rollt auf der Straße ohne zu gleiten (Haftreibungskoeffizient μ_0). Die Massen der beiden Hebel können vernachlässigt werden.



a) Ergänzen Sie die fehlenden Kräfte und Momente auf die drei freigeschnittenen Körper.



b) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für die beiden Hebel auf.

Hebel oben:

$$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0 = B_x$$
$$\sum F_y \stackrel{!}{=} 0 = B_y - S_1 - F$$
$$\sum M_\mathrm{B} \stackrel{!}{=} 0 = S_1 a - Fb$$

Hebel links:

$$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0 = A_x - N_1 + S_2$$
$$\sum F_y \stackrel{!}{=} 0 = -A_y + R_1$$
$$\sum M_\mathrm{B} \stackrel{!}{=} 0 = -2rS_2 + rN_1 + fR_1$$

c) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für das Rad an.

$$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0 = C_x - R_2 - S_2 + N_1$$
$$\sum F_y \stackrel{!}{=} 0 = S_1 - G - C_y + N_2 - R_1$$
$$\sum M \stackrel{!}{=} 0 = S_2 r - S_1 r + R_1 R - R_2 R$$

d) Welche Seilkraft S_1 ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen?

$$S_1 = \frac{b}{a} F$$

e) In welchem Verhältnis stehen die Seilkräfte S_1 und S_2 aufgrund der Seilreibung zueinander?

☒ $\frac{S_2}{S_1} = \mathrm{e}^{\mu_\mathrm{s} \frac{3\pi}{2}}$ ☐ $\frac{S_2}{S_1} = \mathrm{e}^{\mu_\mathrm{s} 3\pi}$ ☐ $\frac{S_2}{S_1} = \mathrm{e}^{-\mu_\mathrm{s} \frac{3\pi}{2}}$ ☐ $\frac{S_2}{S_1} = \mathrm{e}^{-\mu_\mathrm{s} \pi}$

f) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Normalkraft und Reibkraft am Bremsklotz?

$$R_1 = \mu_\mathrm{B} N_1$$

g) Berechnen Sie die Normalkraft zwischen Bremsklotz und Rad.

$$N_1 = \frac{2}{1 + \frac{f}{r}\mu_\mathrm{B}} \frac{b}{a} \mathrm{e}^{\mu_\mathrm{S} \frac{3\pi}{2}} F$$

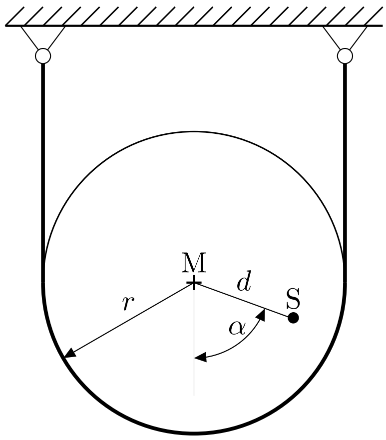
h) Wie groß ist die Haftreibungsreibungskraft zwischen Rad und Straße?

$$R_2 = \left[\left(\frac{2R\mu_\mathrm{B}}{r + f\mu_\mathrm{B}} + 1 \right) \mathrm{e}^{\mu_\mathrm{S} \frac{3\pi}{2}} - 1 \right] \frac{r}{R} \frac{b}{a} F$$

Aufgabe 7.2***

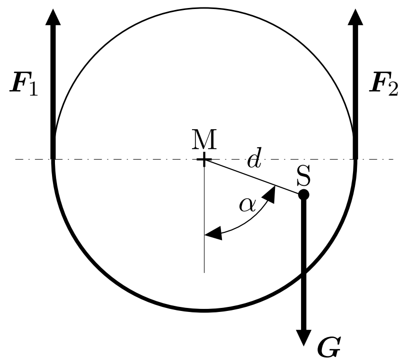
Ein Rad, dessen Schwerpunkt nicht auf einer Symmetrieachse liegt, ist in einem Band aufgehängt. Der Reibungskoeffizient zwischen Rad und Band sei μ_0.

a) Unter welcher Bedingung herrscht Gleichgewicht?



Lösung:

In einem ersten Schritt wird das System wie folgt freigeschnitten.



Es folgen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F \stackrel{!}{=} 0 : \qquad F_1 + F_2 = G \tag{1}$$

$$\sum M_\mathrm{M} \stackrel{!}{=} 0 : \qquad F_1 r - F_2 r + G d \sin(\alpha) = 0 \,. \tag{2}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (1) in (2) ergibt sich $(F_1 - F_2)r + (F_1 + F_2)d\sin(\alpha) = 0$. Dies kann zu

$$\frac{\frac{F_2}{F_1} - 1}{\frac{F_2}{F_1} + 1} = \frac{d\sin(\alpha)}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{F_2}{F_1} = \frac{r + d\sin(\alpha)}{r - d\sin(\alpha)} \tag{3}$$

umgeformt werden. Für den Fall $\sin(\alpha) \geq 0$ gilt $F_2 \geq F_1$. Somit gilt für das Kräfteverhältnis F_2/F_1 aufgrund der Seilreibung

$$\frac{F_2}{F_1} \leq \mathrm{e}^{\mu_0 \varphi}, \tag{4}$$

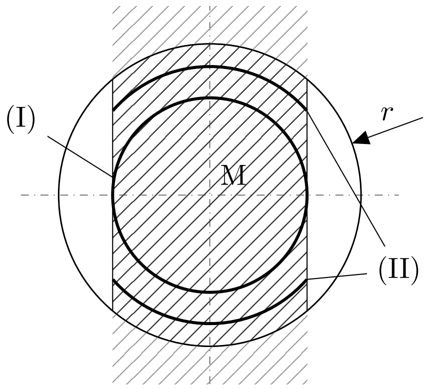
wobei φ das vom Seil umschlungene Segment ist (hier: $\varphi = \pi$). Somit erhält man aus den Gleichungen (3) und (4) die Bedingung

$$\frac{r + d\sin(\alpha)}{r - d\sin(\alpha)} \leq \mathrm{e}^{\mu_0 \pi} \qquad \Leftrightarrow \qquad d\sin(\alpha) \leq r\,\frac{\mathrm{e}^{\mu_0 \pi} - 1}{\mathrm{e}^{\mu_0 \pi} + 1}. \tag{5}$$

Entsprechend erhält man für $\sin(\alpha) < 0$ die Bedingung

$$d\sin(\alpha) \geq -r\,\frac{\mathrm{e}^{\mu_0 \pi} - 1}{\mathrm{e}^{\mu_0 \pi} + 1}. \tag{6}$$

Der Term $d\sin(\alpha)$ repräsentiert den horizontalen Abstand des Schwerpunkts S vom Aufhängepunkt. Folglich herrscht Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt S innerhalb des schraffierten Bereichs in der nachfolgende Skizze liegt.



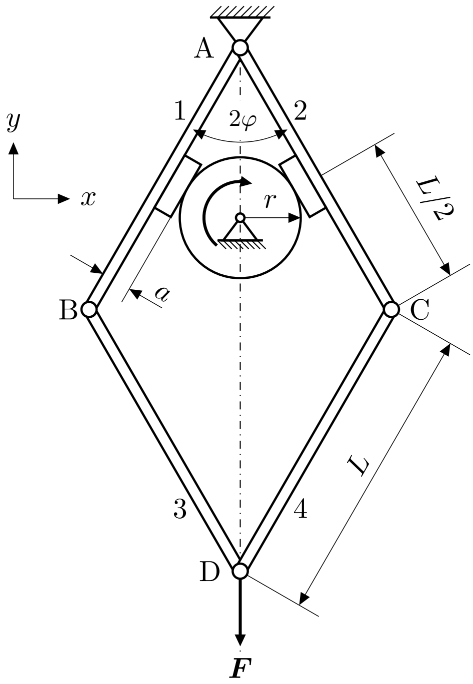
Da $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$:

(I) Für $d \leq r\,\frac{\mathrm{e}^{\mu_0 \pi}-1}{\mathrm{e}^{\mu_0 \pi}+1}$ sind die Bedingungen (5) und (6) für alle α erfüllt. Somit ergeben sich Lösungen auf einem Kreis.

(II) Für $d > r\,\frac{\mathrm{e}^{\mu_0 \pi}-1}{\mathrm{e}^{\mu_0 \pi}+1}$ ergeben sich Lösungen auf zwei Teilkreisbögen.

Aufgabe 5.6***

Der gezeichnete Gelenkrhombus besteht aus vier Balken der Länge L, die durch reibungsfreie Gelenke A, B, C und D verbunden sind. In der Mitte der Balken 1 und 2 sind Bremsbacken angebracht, die auf einer Trommel vom Radius r reiben (Reibungsbeiwert μ). Die Trommel wird im eingezeichneten Sinn um ein feststehendes Lager angetrieben. Der untere Gelenkpunkt des Rhombus wird durch eine Kraft $\boldsymbol{F}$ belastet. Die Eigengewichte der Balken können vernachlässigt werden. An der Stelle der Bremsbacken sind die Tangenten an die Trommel parallel zu den Balkenlängsachsen, jedoch um den Betrag a versetzt.



a) Man skizziere für alle vier Balken die angreifenden Kräfte sowie für die Balken 1 und 2 die Momentenkurven (qualitativ).

b) Wie groß sind die auf die Bremsbacken übertragenen Normal- und Tangentialkräfte?

c) Wie groß ist das Bremsmoment auf die Trommel?

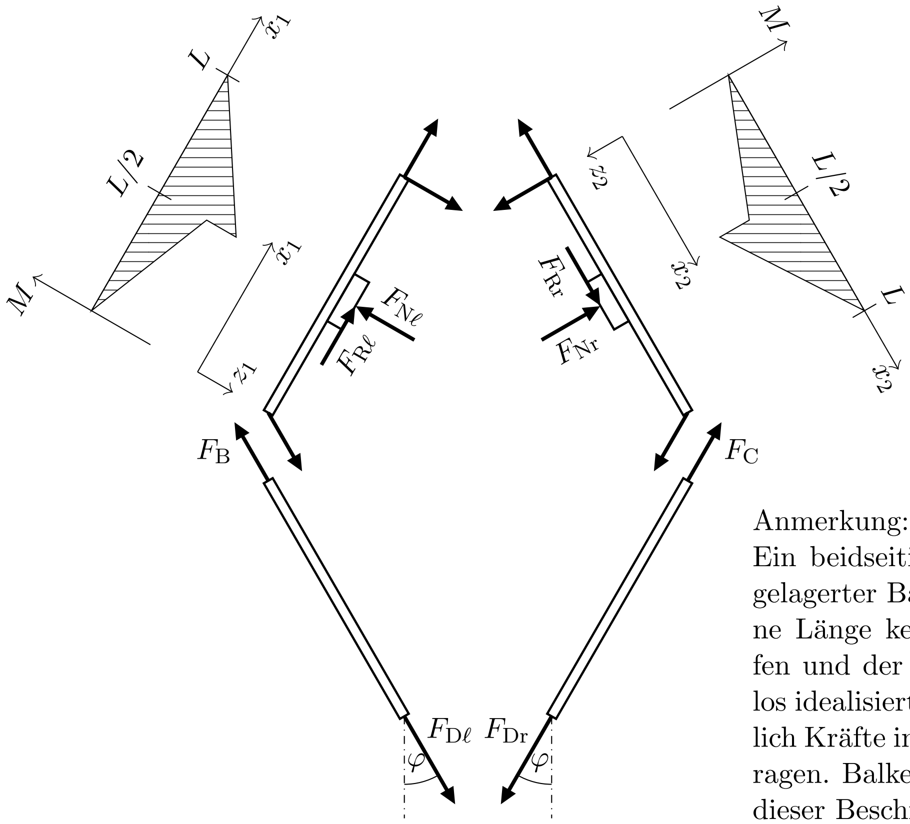
d) Welche der beiden Bremsbacken trägt mehr zum gesamten Bremsmoment bei und weshalb?

e) Wie groß sind die auf das Trommellager übertragenen Kraftkomponenten $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}x}$ und $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}y}$?

f) Wann wird $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}x} = 0$?

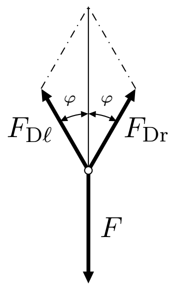
Lösung: (vgl. auch Merkblatt M3 „Lösung von Gleichgewichtsaufgaben“)

a)



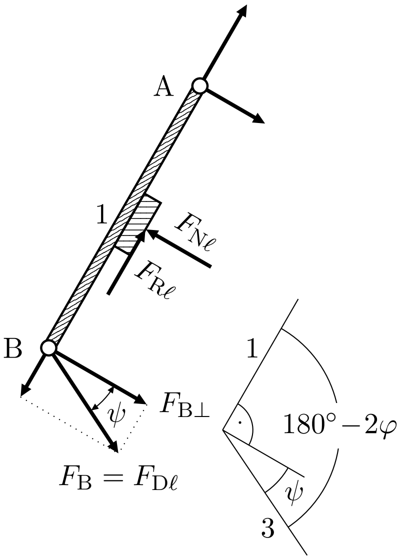
Anmerkung:
Ein beidseitig reibungsfrei drehbar gelagerter Balken, an dem üder seine Länge keine Querkräfte angreifen und der damit auch als masselos idealisiert wird, kann ausschließlich Kräfte in Balkenrichtung übertragen. Balken 3 und 4 entsprechen dieser Beschreibung, sodass nur die Kräfte $\boldsymbol{F}_B$ und $\boldsymbol{F}_{D\ell}$ beziehungsweise $\boldsymbol{F}_C$ und $\boldsymbol{F}_{Dr}$ wirken.

b)



In einem ersten Schritt wird die Kraft $\boldsymbol{F}_B$ ermittelt. Aus dem Gleichgewicht von Balken 3 folgt $F_B = F_{D\ell}$. Somit ergibt das Gleichgewicht an Knoten D

$$F_{D\ell} = F_{Dr} = \frac{F}{2\cos(\varphi)} = F_B. \tag{7}$$



Für die Komponente $F_{\mathrm{B}\perp}$ der Kraft F_B in Normalenrichtung zur Balkenachse 1 gilt

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{B}\perp} &= F_B \cos(\psi) = F_B \cos(90° - 2\varphi) \\ &= F_B \sin(2\varphi) = F_B 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\overset{(7)}{\Rightarrow} \quad F_{\mathrm{B}\perp} = F\frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{2\cos(\varphi)} = F\sin(\varphi).$$

Das Momentengleichgewicht für Balken 1 bezüglich Knoten A folgt

$$F_{\mathrm{B}\perp} L - F_{\mathrm{N}\ell}\frac{L}{2} + F_{\mathrm{R}\ell} a = 0.$$

Durch Substitution der Gleitreibungskraft $F_{\mathrm{R}\ell} = \mu F_{\mathrm{N}\ell}$ erhält man umgeformt

$$F_{\mathrm{N}\ell} = \frac{2\sin(\varphi)}{1 - 2\mu\frac{a}{L}} F \quad \text{und} \quad F_{\mathrm{R}\ell} = \mu F_{\mathrm{N}\ell} = \frac{2\mu\sin(\varphi)}{1 - 2\mu\frac{a}{L}} F.$$

Analog erhält man mit $F_{\mathrm{C}\perp} = F\sin(\varphi)$ und mit dem Momentengleichgewicht für Balken 2 bezüglich A

$$F\sin(\varphi)L - F_{\mathrm{Nr}}\frac{L}{2} - F_{\mathrm{Rr}} a = 0$$

die Kräfte

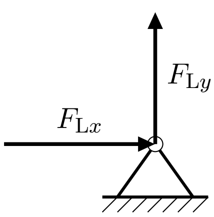
$$F_{\mathrm{Nr}} = \frac{2\sin(\varphi)}{1 + 2\mu\frac{a}{L}} F \quad \text{und} \quad F_{\mathrm{Rr}} = \mu F_{\mathrm{Nr}} = \frac{2\mu\sin(\varphi)}{1 + 2\mu\frac{a}{L}} F.$$

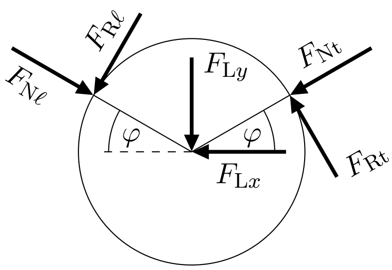
c) Bremsmoment

$$M = (F_{\mathrm{R}\ell} + F_{\mathrm{Rr}})\, r = \frac{4\mu\sin(\varphi)}{1 - \left(2\mu\frac{a}{L}\right)^2} F r.$$

d) Die linke Bremsbacke trägt mehr zum Bremsmoment bei, da $F_{\mathrm{N}\ell} > F_{\mathrm{Nr}}$ und somit auch $F_{\mathrm{R}\ell} > F_{\mathrm{Rr}}$ gilt.

e) Die Lagerkräfte erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Trommel.





Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}
\sum F_x \overset{!}{=} 0: \quad & F_{\mathrm{L}x} - F_{\mathrm{N}\ell}\cos(\varphi) + F_{\mathrm{R}\ell}\sin(\varphi) + F_{\mathrm{Nr}}\cos(\varphi) + F_{\mathrm{Rr}}\sin(\varphi) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & F_{\mathrm{L}x} - F_{\mathrm{N}\ell}(\cos(\varphi) - \mu\sin(\varphi)) + F_{\mathrm{Nr}}(\cos(\varphi) + \mu\sin(\varphi)) = 0 \\
\sum F_y \overset{!}{=} 0: \quad & F_{\mathrm{L}y} + F_{\mathrm{N}\ell}\sin(\varphi) + F_{\mathrm{R}\ell}\cos(\varphi) + F_{\mathrm{Nr}}\sin(\varphi) - F_{\mathrm{Rr}}\cos(\varphi) = 0
\end{aligned}$$

folgen die Kräfte

$$\begin{aligned}
F_{\mathrm{L}x} &= 2F\sin(\varphi)\left[\frac{\cos(\varphi) - \mu\sin(\varphi)}{1 - 2\mu\frac{a}{L}} - \frac{\cos(\varphi) + \mu\sin(\varphi)}{1 + 2\mu\frac{a}{L}}\right] \\
&= -\frac{4\mu\sin(\varphi)\left(\sin(\varphi) - 2\frac{a}{L}\cos(\varphi)\right)}{1 - \left(2\mu\frac{a}{L}\right)^2}F \quad \text{und} \\
F_{\mathrm{L}y} &= -2F\sin(\varphi)\left[\frac{\sin(\varphi) + \mu\cos(\varphi)}{1 - 2\mu\frac{a}{L}} + \frac{\sin(\varphi) - \mu\cos(\varphi)}{1 + 2\mu\frac{a}{L}}\right] \\
&= -\frac{4\sin(\varphi)\left(\sin(\varphi) + 2\mu^2\frac{a}{L}\cos(\varphi)\right)}{1 - \left(2\mu\frac{a}{L}\right)^2}F.
\end{aligned} \tag{8}$$

f) Die trivialen Lösungen für die Bedingung $F_{\mathrm{L}x} = 0$ sind $F = 0$ oder $\mu = 0$. Aus Gleichung (8) folgt zudem, dass $F_{\mathrm{L}x} = 0$ für den Fall

$$\sin(\varphi) - 2\frac{a}{L}\cos(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{L/2} = \frac{2a}{L} = \tan(\varphi)$$

gilt. Dies ist nur möglich, wenn der Trommelradius $r = 0$ ist, da aufgrund von der Konstruktion $\tan(\varphi) = \frac{a+r}{L/2}$. Das heißt, dass die Komponente $F_{\mathrm{L}x}$ bei der untersuchten Bremse nicht verschwinden kann, wenn die Bremse sinnvoll sein soll.