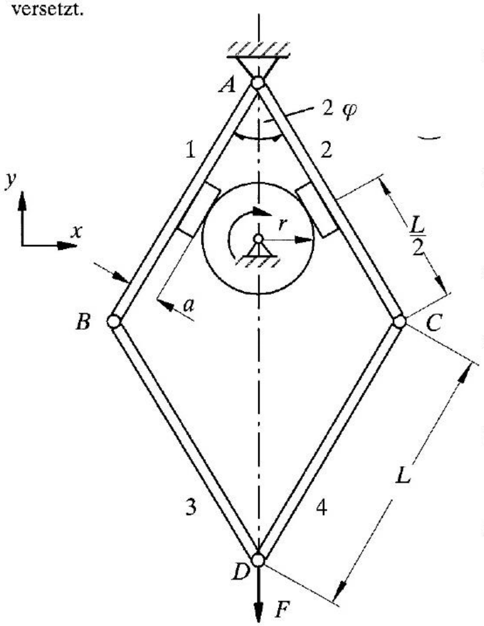
**Aufgabe 5.6:** Der gezeichnete Gelenkrhombus besteht aus 4 Balken der Länge L, die durch reibungsfreie Gelenke A, B, C, D verbunden sind. In der Mitte der Balken 1 und 2 sind Bremsbacken angebracht, die auf einer Trommel vom Radius r reiben (Reibungsbeiwert $\mu$). Die Trommel wird im eingezeichneten Sinn um ein feststehendes Lager angetrieben. Der untere Gelenkpunkt des Rhombus wird durch eine Kraft **F** belastet. Die Eigengewichte der Balken können vernachlässigt werden. An der Stelle der Bremsbacken sind die Tangenten an die Trommel parallel zu den Balkenlängsachsen, jedoch um den Betrag a versetzt.




a ) Man skizziere für alle 4 Balken die angreifenden Kräfte sowie für die Balken 1 und 2 die Momentenkurven (qualitativ).

b ) Wie groß sind die auf die Bremsbacken übertragenen Normal– und Tangentialkräfte?

c ) Wie groß ist das Bremsmoment auf die Trommel?

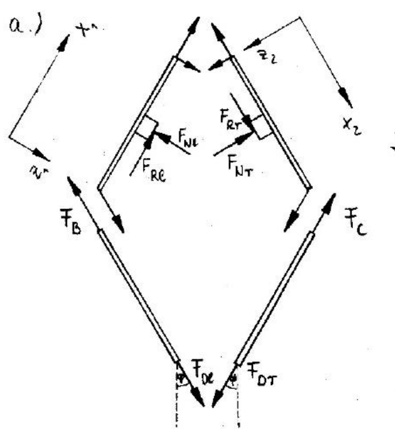
d ) Welche der beiden Bremsbacken trägt mehr zum gesamten Bremsmoment bei und weshalb?

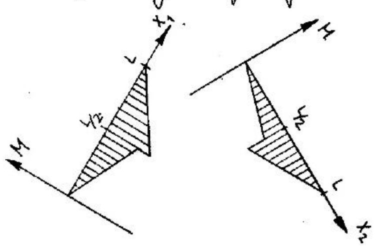
e ) Wie groß sind die auf das Trommellager übertragenen Kraftkomponenten $F_{Lx}$ und $F_{Ly}$?

f ) Wann wird $F_{Lx} = 0$?

Lösung : ( vgl. auch Merkblatt M3 „Lösung von Gleichgewichtsaufgaben")

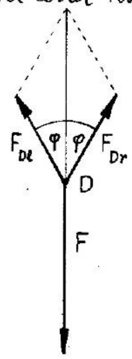
a.)




Anm.: $F_B \parallel$ Balken 3 und $F_{De} \parallel$ Balken 3, da an Balken 3 nur die beiden Kräfte und keine Momente angreifen. Entsprechend $F_{Dr}$, $F_C$ an Balken 4.

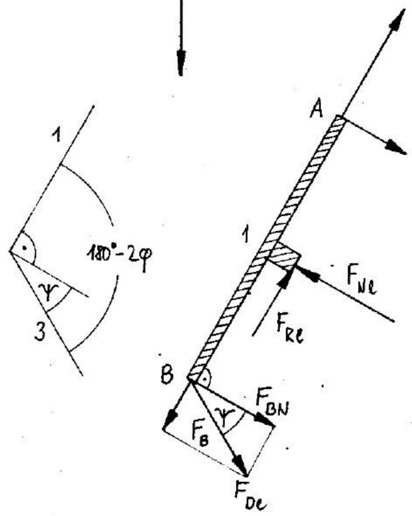
b.) Vorbereitend wird $F_B$ ermittelt :




$F_B = F_{De}$ .

Gleichgewicht am Knoten D :

$$F_{De} = F_{Dr} = \frac{F}{2\cos\varphi} = F_B$$




Für die Komponente $F_{BN}$ der Kraft $F_B$ senkrecht zur Achse des Balkens 1 gilt

$$F_{BN} = F_B\cos\gamma = F_B\cos(90°-2\varphi)$$

$$= F_B\sin 2\varphi = F_B\, 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$F_{BN} = \frac{F}{2\cos\varphi}\, 2\sin\varphi\cos\varphi = F\sin\varphi$$

Momentengleichgewicht für den Balken 1 bez. A :

$$F_{BN}\, L - F_{Ne}\,\frac{L}{2} + F_{Re}\, a = 0 ,$$

Gleitreibungskraft $\quad F_{Re} = \mu F_{Ne}$

Eingesetzt und nach $F_{Ne}$ aufgelöst

$$F_{Ne} = \frac{2\sin\varphi}{1 - 2\mu\frac{a}{L}}\, F$$

$$F_{Re} = \mu F_{Ne} = \frac{2\mu\sin\varphi}{1 - 2\mu\frac{a}{L}}\, F$$

Analog erhält man mit $F_{CN} = F \sin\varphi$ und mit dem Momentengleichgewicht für den Balken 2 bez. A,

$$F \sin\varphi \cdot L - F_{Nr} \cdot \frac{L}{2} - F_{Rr}\, a = 0 ,$$

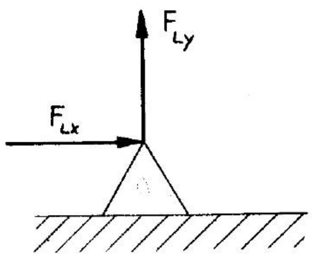
$$\underline{\underline{F_{Nr} = \frac{2 \sin\varphi}{1 + 2\mu \frac{a}{L}} F , \quad F_{Rr} = \mu F_{Nr} = \frac{2\mu \sin\varphi}{1 + 2\mu\frac{a}{L}} F .}}$$

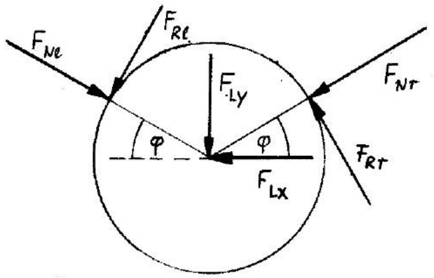
c.) Bremsmoment

$$\underline{\underline{M}} = (F_{Rl} + F_{Rr}) \cdot r = \underline{\underline{\frac{4\mu \sin\varphi}{1 - \left(2\mu \frac{a}{L}\right)^2} F r}}$$

d.) Die linke Bremsbacke trägt mehr zum Bremsmoment bei, da $F_{Nl} > F_{Nr}$, also auch $F_{Rl} > F_{Rr}$.

e.) Die Lagerkräfte erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Trommel.




$$\sum F_{xi} = 0 : \quad F_{Lx} - F_{Nl} \cos\varphi + F_{Rl} \sin\varphi + F_{Nr} \cos\varphi + F_{Rr} \sin\varphi = 0$$

$$F_{Lx} - F_{Nl} (\cos\varphi - \mu \sin\varphi) + F_{Nr} (\cos\varphi + \mu \sin\varphi) = 0$$

$$F_{Lx} = 2 F \sin\varphi \left[ \frac{\cos\varphi - \mu \sin\varphi}{1 - 2\mu \frac{a}{L}} - \frac{\cos\varphi + \mu \sin\varphi}{1 + 2\mu \frac{a}{L}} \right]$$

$$\underline{\underline{= - \frac{4\mu \sin\varphi \left(\sin\varphi - 2 \frac{a}{L} \cos\varphi\right)}{1 - \left(2\mu \frac{a}{L}\right)^2} F}}$$

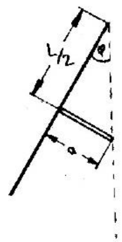
$$\sum F_{yi} = 0 : \quad F_{Ly} + F_{Nl} \sin\varphi + F_{Rl} \cos\varphi + F_{Nr} \sin\varphi - F_{Rr} \cos\varphi = 0$$

$$F_{Ly} = -2 F \sin\varphi \left[ \frac{\sin\varphi + \mu \cos\varphi}{1 - 2\mu \frac{a}{L}} + \frac{\sin\varphi - \mu \cos\varphi}{1 + 2\mu \frac{a}{L}} \right]$$

$$\underline{\underline{F_{Ly} = - \frac{4 \sin\varphi \left(\sin\varphi + 2\mu^2 \frac{a}{L} \cos\varphi\right)}{1 - \left(2\mu \frac{a}{L}\right)^2} F}}$$

f.) $F_{Lx} = 0$ für $\underline{F = 0}$
oder für $\underline{\mu = 0}$ $\Big\}$ trivial
oder für $\sin\varphi - 2 \frac{a}{L} \cos\varphi = 0$

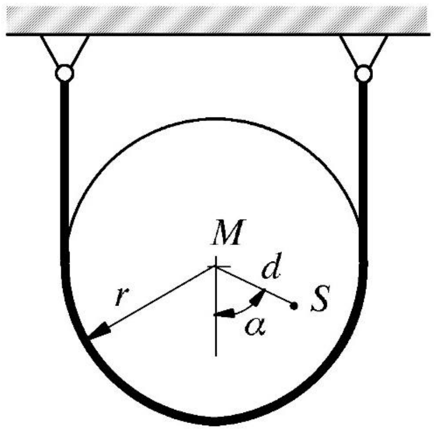
$$\rightsquigarrow \quad \underline{\frac{a}{L/2} = \tan\varphi}$$




Dies ist nur möglich, wenn der Trommelradius $r = 0$ ist. Das heißt, daß die Komponente $F_{Lx}$ bei der untersuchten Bremse nicht verschwinden kann, wenn die Bremse sinnvoll sein soll.

**Aufgabe 7.2:** Ein Rad, dessen Schwerpunkt nicht auf seiner Symmetrieachse liegt, ist in einem Band aufgehängt. Der Reibungskoeffizient zwischen Rad und Band sei $\mu_0$.

a ) Unter welcher Bedingung herrscht Gleichgewicht?




Gleichgewicht für $\alpha > 0$ :

$$\sum F = 0 \quad : \quad F_0 + F_1 = G \qquad (1)$$

$$\sum M_M = 0 \quad : \quad F_0 r - F_1 r + G \cdot d \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

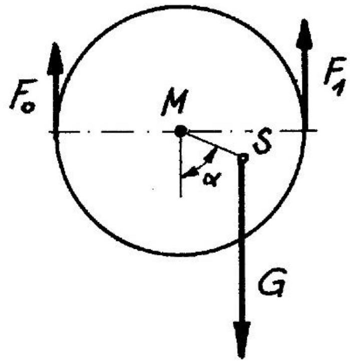
$$(2) \text{ in } (1) \quad : \quad (F_0 - F_1) r + (F_0 + F_1) d \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\text{Umgeformt} \quad : \quad \frac{\frac{F_1}{F_0} - 1}{\frac{F_1}{F_0} + 1} = \frac{d \cdot \sin\alpha}{r}$$

$$\text{oder} \qquad \frac{F_1}{F_0} = \frac{1 + \frac{d \cdot \sin\alpha}{r}}{1 - \frac{d \cdot \sin\alpha}{r}} \quad . \qquad (3)$$

Für Gleichgewicht notwendiges Kräfteverhältnis $\frac{F_1}{F_0}$

Freigeschnitten :




Für das Kräfteverhältnis $\frac{F_1}{F_0}$ gilt andererseits aufgrund der Seilreibung :

$$\frac{F_1}{F_0} \leq e^{\mu_0 \varphi}$$

$\varphi$: Vom Seil umschlungenes Segment.
Hier: $\varphi = \pi$ .

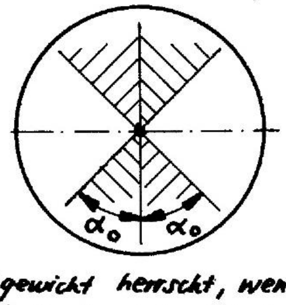
Damit erhält man aus (3) :

$$\frac{1 + \frac{d \cdot \sin\alpha}{r}}{1 - \frac{d \cdot \sin\alpha}{r}} \leq e^{\mu_0 \pi}$$

$$\text{oder} \qquad \underline{\underline{\frac{d \cdot \sin\alpha}{r} \leq \frac{e^{\mu_0 \pi} - 1}{e^{\mu_0 \pi} + 1}}} \quad .$$

Entsprechend erhält man für $\alpha < 0$ :

$$\frac{d \cdot \sin\alpha}{r} \geq - \frac{e^{\mu_0 \pi} - 1}{e^{\mu_0 \pi} + 1} \quad .$$



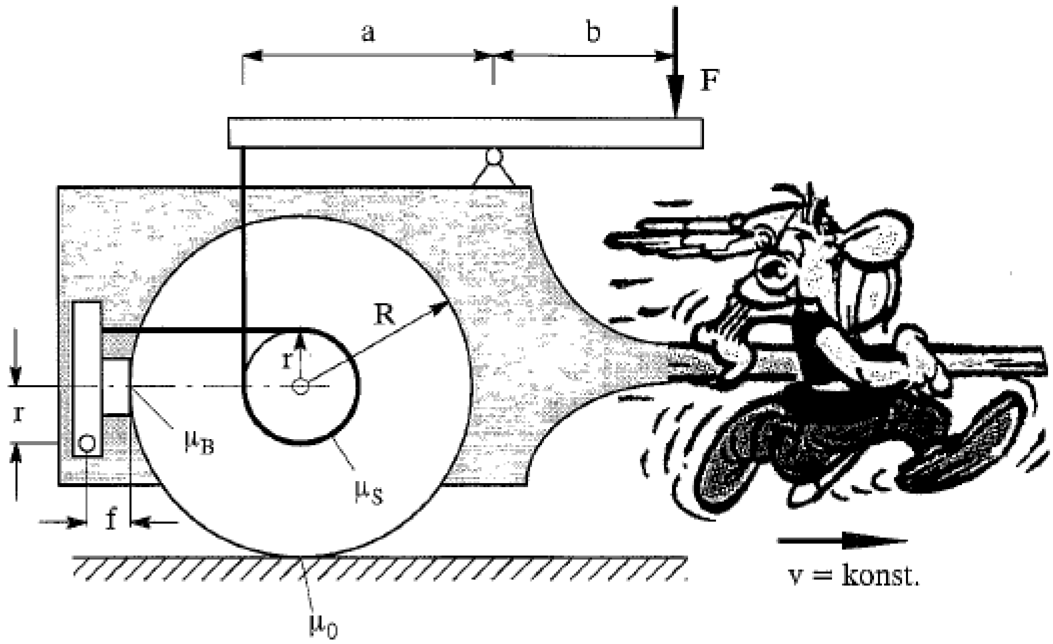

Gleichgewicht herrscht, wenn S innerhalb der schraffierten Bereiche liegt, wobei

$$\alpha_0 = \arcsin\left[\frac{r\,(e^{\mu_0 \pi} - 1)}{d\,(e^{\mu_0 \pi} + 1)}\right]$$

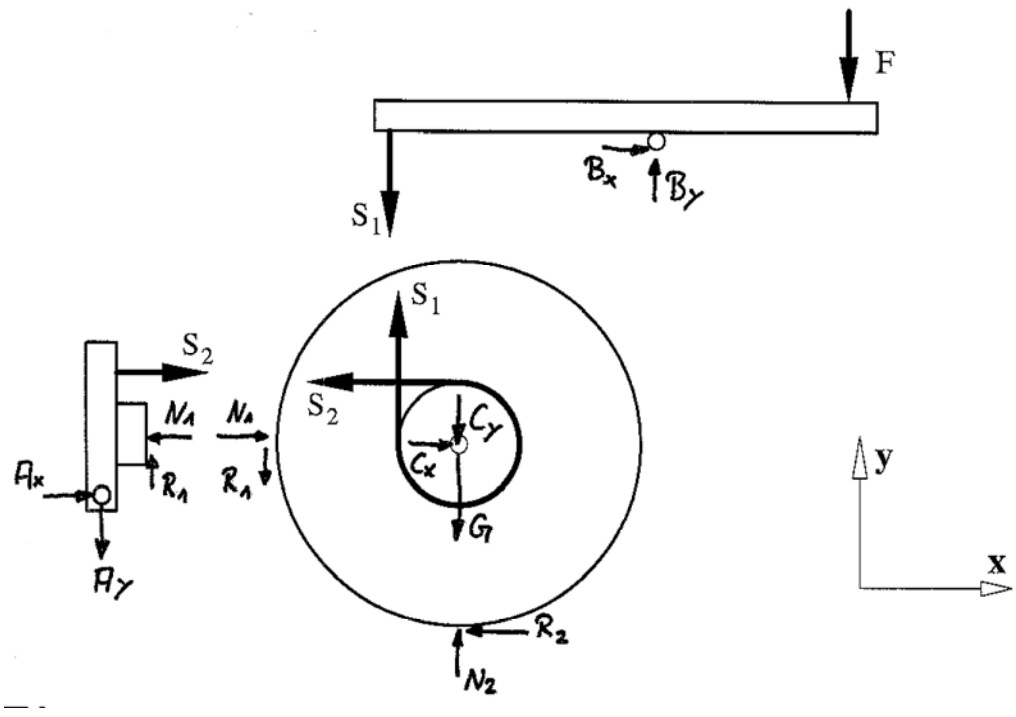
(Grenzfall für: d und r gegeben)

Alte Prüfungsaufgabe WS 1996/97

Ein einachsiger Wagen wird mit konstanter Geschwindigkeit gezogen. Die Bremse wurde nicht vollständig gelöst: durch die Kraft $F$ wird über einen Hebel ein Seil gespannt (Gleitreibungskoeffizient $\mu_S$), das den Bremsklotz gegen das Rad zieht (Gleitreibungskoeffizient $\mu_B$). Das Rad (Gewicht G) rollt auf der Straße ohne zu gleiten (Haftreibungskoeffizient $\mu_0$). Die Massen der beiden Hebel können vernachlässigt werden.




a) Ergänzen Sie die fehlenden Kräfte und Momente auf die drei freigeschnittenen Körper.



b) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für die beiden Hebel auf.

$$\left.\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 = B_x \\
\sum F_y &= 0 = B_y - S_1 - F \\
\sum M_B &= 0 = S_1 a - F b
\end{aligned}\right\} \text{Hebel oben}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 = A_x - N_1 + S_2 \\
\sum F_y &= 0 = -A_y + R_1 \\
\sum M_A &= 0 = -2r S_2 + r N_1 + f R_1
\end{aligned}\right\} \text{Hebel links}$$

c) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für das Rad an.

$$\sum F_x = 0 = C_x - R_2 - S_2 + N_1$$

$$\sum F_y = 0 = S_1 - G - C_y + N_2 - R_1$$

$$\sum M = 0 = S_2 r - S_1 r + R_1 R - R_2 R$$

d) Welche Seilkraft $S_1$ ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen?

$$S_1 = \frac{b}{a} F$$

e) In welchem Verhältnis stehen die Seilkräfte $S_1$ und $S_2$ aufgrund der Seilreibung zueinander?

- [x] $\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu_s \frac{3\pi}{2}}$
- [ ] $\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu_s 3\pi}$
- [ ] $\frac{S_2}{S_1} = e^{-\mu_s \frac{3\pi}{2}}$
- [ ] $\frac{S_2}{S_1} = e^{-\mu_s \pi}$

f) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Normalkraft und Reibkraft am Bremsklotz?

$$R_1 = \mu_B N_1$$

g) Berechnen Sie die Normalkraft zwischen Bremsklotz und Rad.

$$N_1 = \frac{2}{1 + \frac{f}{r}\mu_B} \frac{b}{a} e^{\mu_s \frac{3\pi}{2}} F$$

h) Wie groß ist die Haftreibungskraft zwischen Rad und Straße?

$$R_2 = \left[\left(\frac{2R\mu_B}{r + f\mu_B} + 1\right) e^{\mu_s \frac{3\pi}{2}} - 1\right] \frac{r}{R} \frac{b}{a} F$$