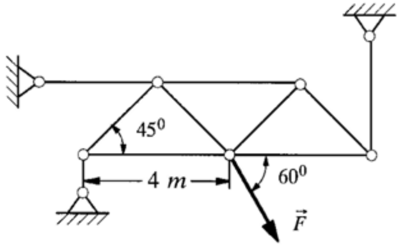
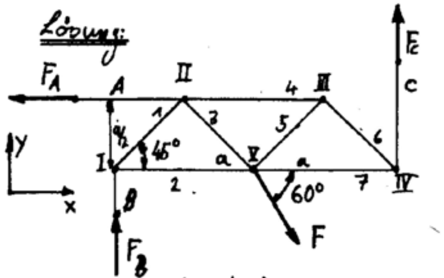
Aufgabe 4.1: Man bestimme für den skizzierten Stabverband die Auflagerkräfte und Stabkräfte.
$F = 6000\ \mathrm{N}$

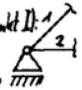


Lösung:



Bemerkung:
Das Fachwerk besteht nur aus den Stäben 1 - 7. Die Stäbe A, B, C sind Pendelstützen, die nur Kräfte in Stabrichtung aufnehmen können und gehören zur Lagerung.

Entsprechende Lagerung (z.B. Punkt II):



Damit bleiben mit k = 5 Knoten insgesamt 10 Gleichungen und mit s = 7 Stäben und 3 Lagerreaktionen insgesamt 10 Unbekannte.

Gleichgewicht für das gesamte Fachwerk:

$\Sigma F_x = 0: \ -F_A + \cos 60° \cdot F = 0 \quad ; \quad \underline{F_A = \frac{1}{2} F = 3000\,N}$

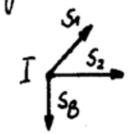
$\Sigma M_I = 0: \ -a\,F \cdot \sin 60° + 2a \cdot F_C + \frac{a}{2} \cdot F_A = 0; \ \underline{F_C = \frac{1}{8}(2\sqrt{3}-1) \cdot F = 1848\,N}$

$\Sigma F_y = 0: \ F_B - F \cdot \sin 60° + F_C = 0 \quad ; \ \underline{F_B = \frac{-1}{8}(2\sqrt{3}+1) \cdot F = 3348\,N}$

Stabkräfte ($S_i > 0$: Zugstab): $\underline{\underline{S_A = 3000\,N, \ S_B = -3348\,N, \ S_C = 1848\,N}}$

Knotenpunktverfahren
2k Gleichungen für s Unbekannte: $2 \cdot 5 - 7 = 3$
3 Gleichungen bringen keine neuen Informationen (Probe!)
Die Gleichungen werden rekursiv gelöst.

Gleichgewicht am Knoten I:

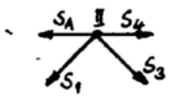


$\Sigma F_x = 0: \ S_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_1 = 0$

$\Sigma F_y = 0: \ -S_B + \frac{1}{\sqrt{2}} S_1 = 0 \ \rightsquigarrow \ \underline{\underline{S_1 = \sqrt{2} \cdot S_B = -4735\,N}}$

$\underline{\underline{S_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} S_1 = 3348\,N}}$

Gleichgewicht am Knoten II:



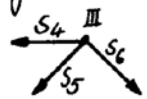
$\Sigma F_x = 0: \ -S_A - \frac{1}{\sqrt{2}} S_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 + S_4 = 0$

$\Sigma F_y = 0: \ \frac{1}{\sqrt{2}} S_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 = 0$

$\rightsquigarrow \ \underline{\underline{S_3 = -S_1 = 4735\,N}}$

$\underline{\underline{S_4 = S_A + \frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 - S_3) = -3696\,N}}$

Gleichgewicht am Knoten III:



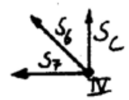
$\Sigma F_x = 0: \ -S_4 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_5 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_6 = 0$

$\Sigma F_y = 0: \ -\frac{1}{\sqrt{2}} S_5 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_6 = 0 \ \rightsquigarrow \ S_6 = -S_5$

$\underline{\underline{S_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} S_4 = 2614\,N}}$

$\underline{\underline{S_6 = -S_5 = -2614\,N}}$

Gleichgewicht am Knoten IV:

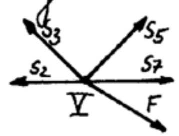


$\Sigma F_x = 0: \ -\frac{1}{\sqrt{2}} S_6 - S_7 = 0 \ \rightsquigarrow \ \underline{\underline{S_7 = -\frac{1}{\sqrt{2}} S_6 = 1848\,N}}$

Probe

$\Sigma F_y = 0: \ \frac{1}{\sqrt{2}} S_6 + S_C = 0 = -1848\,N + 1848\,N \ \checkmark$

Gleichgewicht am Knoten V:



$\Sigma F_x = 0: \ -S_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_5 + S_7 + \frac{1}{2} F = 0$

$-3348\,N - 3348\,N + 1848\,N + 1848\,N + 3000\,N = 0 \ \checkmark$

$\Sigma F_y = 0: \ \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_5 - \frac{\sqrt{3}}{2} F = 0$

$3348\,N + 1848\,N - 5196\,N = 0 \ \checkmark$

Aufgabe 4.4:

1) Klassifizierung

$$p = 45\,,\quad q = (6+4+6+4)\cdot 2 - 1 + 6 = 45$$

$$f = 0 \Rightarrow r = p - f = 45$$

Anschauung

$$\Rightarrow n = q - r = 0$$

2) Lagerreaktionen

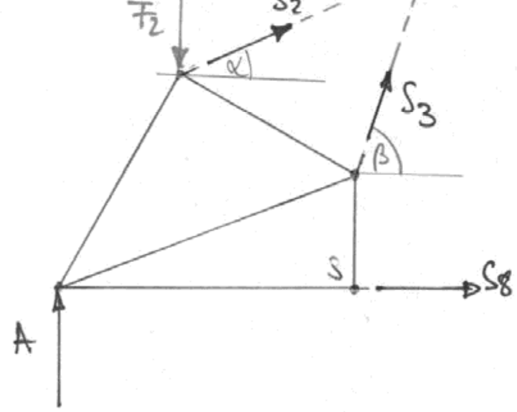
Symmetrie: $A = B = \dfrac{F_1 + F_2 + F_3}{2} = 9000\,N$

3) Stabkräfte

Symmetrie:

Stabkräfte der rechten Fachwerkhälfte
= entsprechende Stabkräfte der linken Hälfte

1. Ritterschnitt



Geometrie:

$\tan\alpha = \frac{2}{4} \Rightarrow \alpha \approx 26{,}6°$

$\tan\beta = \frac{3{,}5}{2} \Rightarrow \beta \approx 60{,}3°$

$$\sum M_P = S_8 \cdot 6m - A \cdot 6m + F_2 \cdot 4m = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_8 = A - \tfrac{2}{3} F_2 = 5667\,N \quad \text{(Zug)}$$

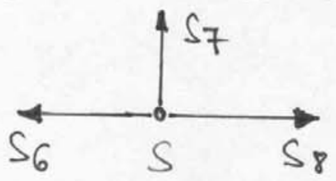
$$\sum M_Q = S_8 \cdot 4m - A \cdot 2m + S_3 \cos\beta \cdot 1{,}5\,m + S_3 \sin\beta \cdot 2m = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_3 = \frac{2A - 4S_8}{1{,}5\cos\beta + 2\sin\beta} = -1882\,N \quad \text{(Druck)}$$

$$\sum M_R = S_8 \cdot 2{,}5m + F_2 \cdot 2m - A \cdot 4m - S_2 \cos\alpha \cdot 1{,}5m - S_2 \sin\alpha \cdot 2m = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_2 = \frac{2{,}5\,S_8 + 2F_2 - 4A}{1{,}5\cos\alpha + 2\sin\alpha} = -5290\,N \quad \text{(Druck)}$$

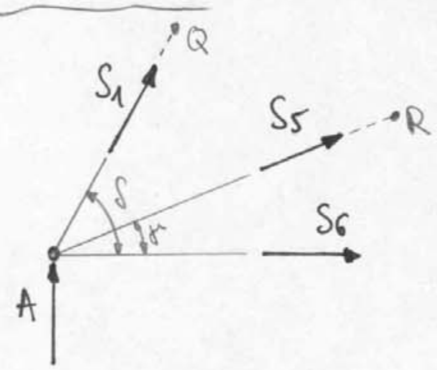
2. Knotenpunkt – Verfahren: Knoten S



$$S_7 = 0 \quad \text{(Nullstab)}$$

$$S_6 = S_8 = 5667\,N \quad \text{(Zug)}$$

3. Ritterschnitt:



Geometrie:

$$\tan\gamma = \frac{2{,}5}{4} \Rightarrow \gamma \approx 32^\circ$$

$$\tan\delta = \frac{4}{2} \Rightarrow \delta \approx 63{,}4^\circ$$

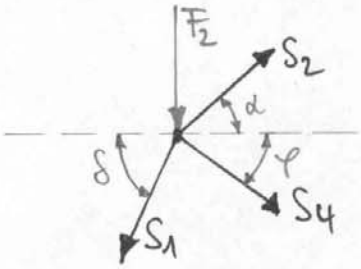
$$\sum M_Q = S_6 \cdot 4m - A \cdot 2m + S_5 \cos\gamma \cdot 1{,}5m + S_5 \sin\gamma \cdot 2m = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_5 = \frac{2A - 4S_6}{1{,}5\cos\gamma + 2\sin\gamma} = -2002\,N \text{ (Druck)}$$

$$\sum M_R = S_6 \cdot 2{,}5m - A \cdot 4m - S_1 \cos\delta \cdot 1{,}5m - S_1 \sin\delta \, 2m = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_1 = \frac{2{,}5 S_6 - 4A}{1{,}5\cos\delta + 2\sin\delta} = -8875\,N \text{ (Druck)}$$

4. Knotenpunkt-Verfahren: Knoten Q

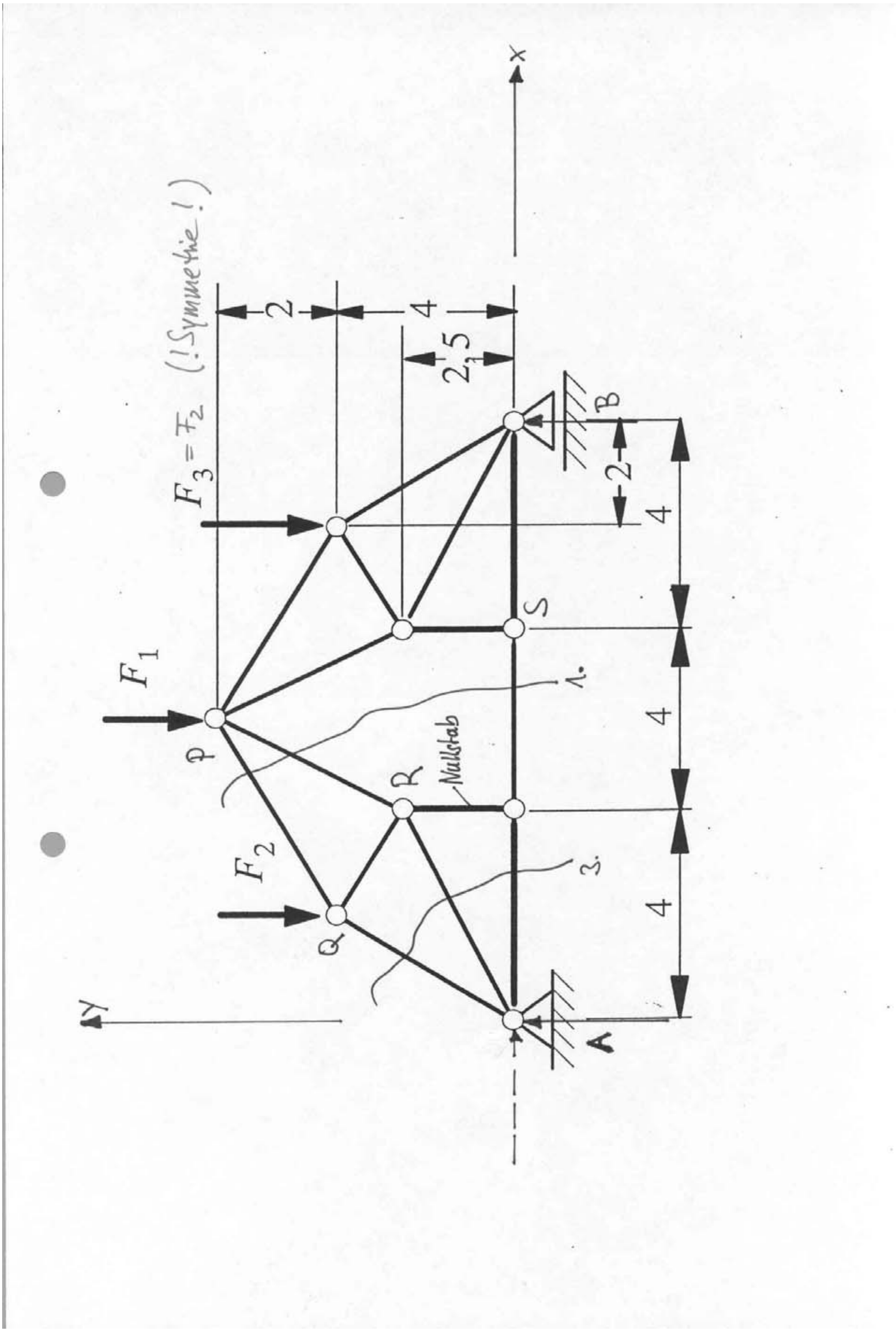


Geometrie:

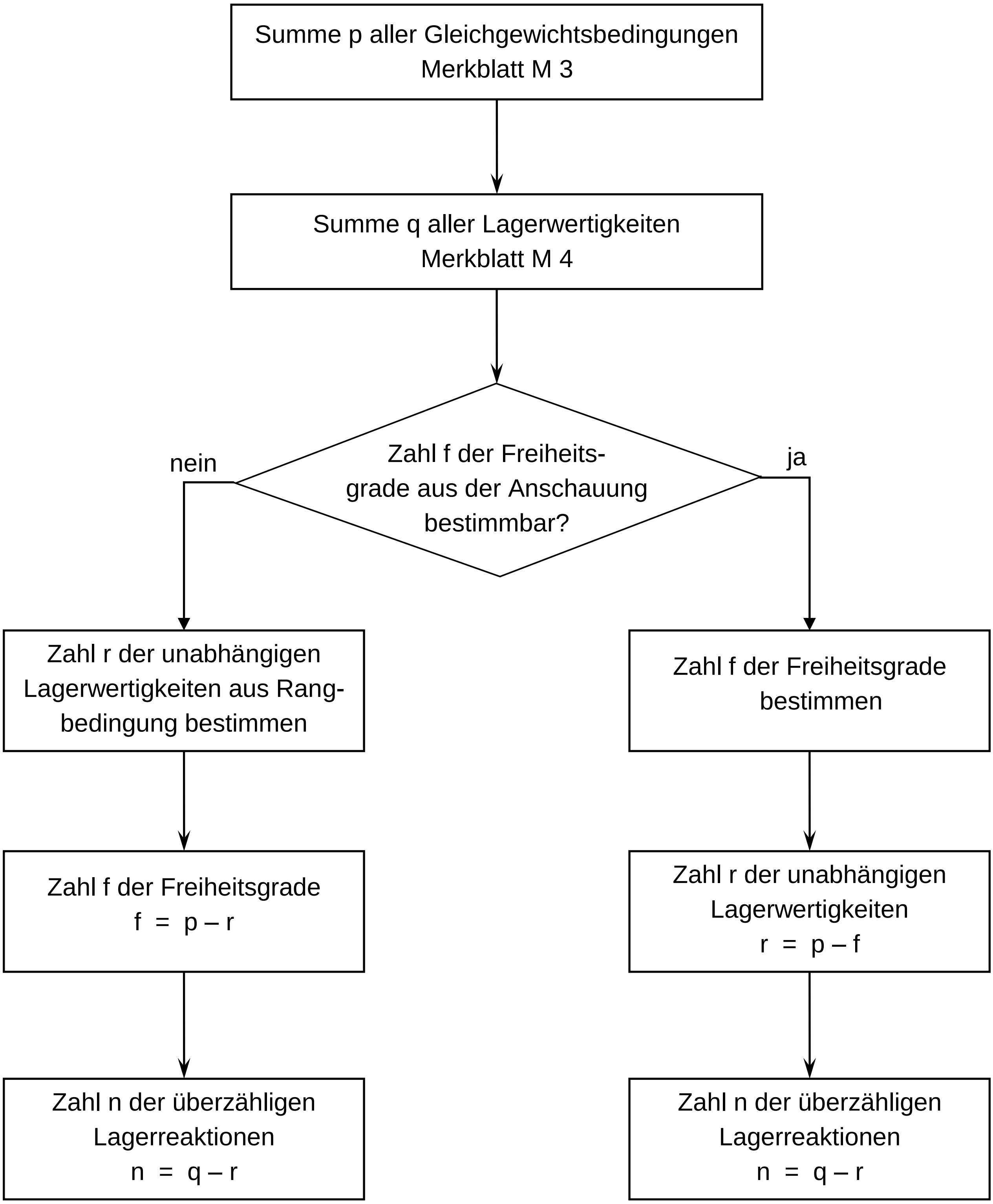
$$\tan\varphi = \frac{1{,}5}{2} \Rightarrow \varphi \approx 36{,}9°$$

$$\sum F_x = -S_1 \cos\delta + S_2 \cos\alpha + S_4 \cos\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_4 = \frac{S_1\cos\delta - S_2\cos\alpha}{\cos\varphi} = 946\,N \text{ (Zug)}$$


x
y
F_1
F_2
$F_3 = F_2$ (! Symmetrie !)
P
Q
R
S
A
B
Nullstab
1.
3.
2
4
2,5
4
4
4
4
2

Lagerung von Mehrkörpersystemen



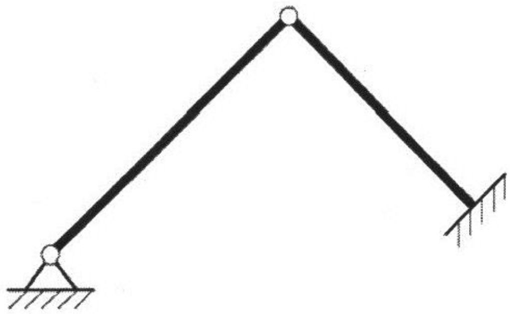
Beispiel 1:

p = 6 r = 6

q = 6 f = 0

n = 0

Beispiel 2:

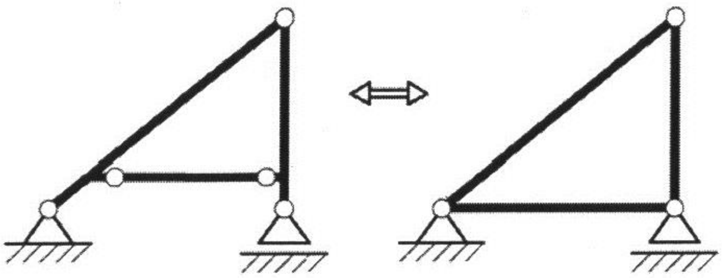


p = 6 r = 6

q = 7 f = 0

n = 1

Beispiel 3:



p = 9 r = 9

q = 9 f = 0

n = 0

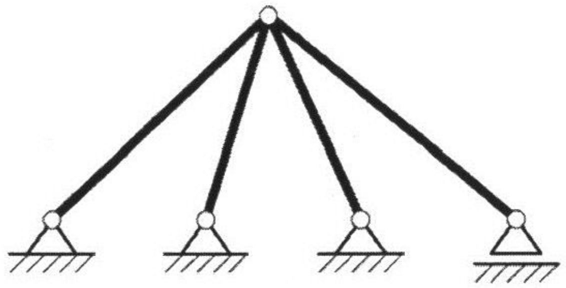
Beispiel 4:

p = 6 r = 5

q = 5 f = 1

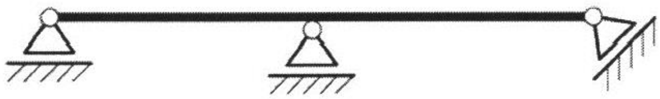
n = 0

Beispiel 5:



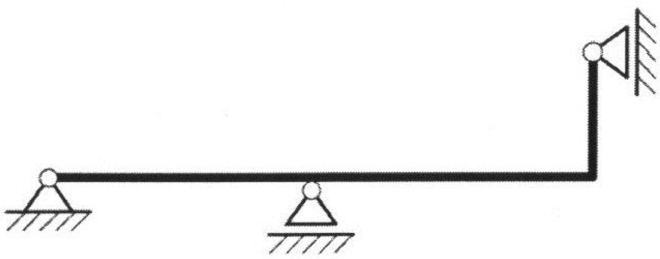
p = 12　　r = 12
q = 13　　f = 0
n = 1

Beispiel 6:



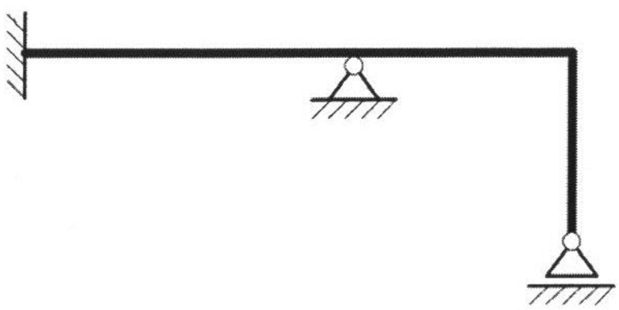
p = 3　　r = 3
q = 3　　f = 0
n = 0

Beispiel 7:



p = 3　　r = 3
q = 4　　f = 0
n = 1

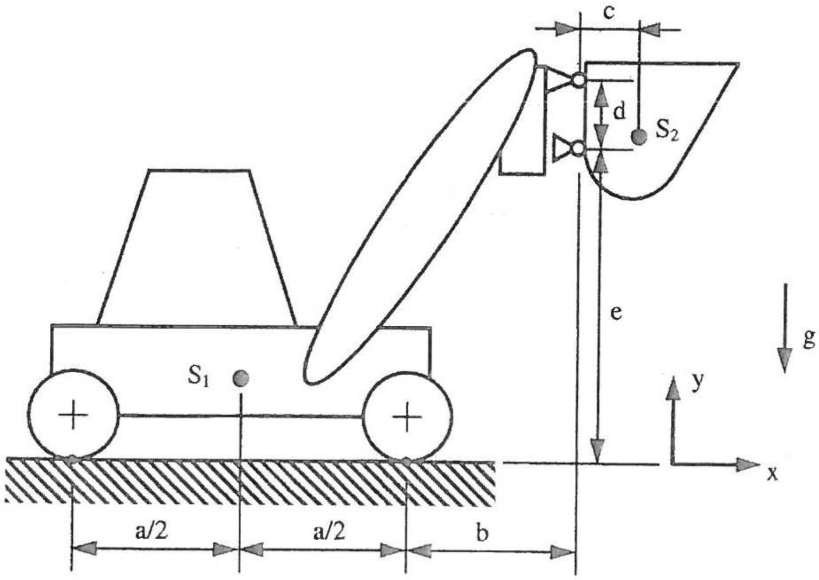
Beispiel 8:



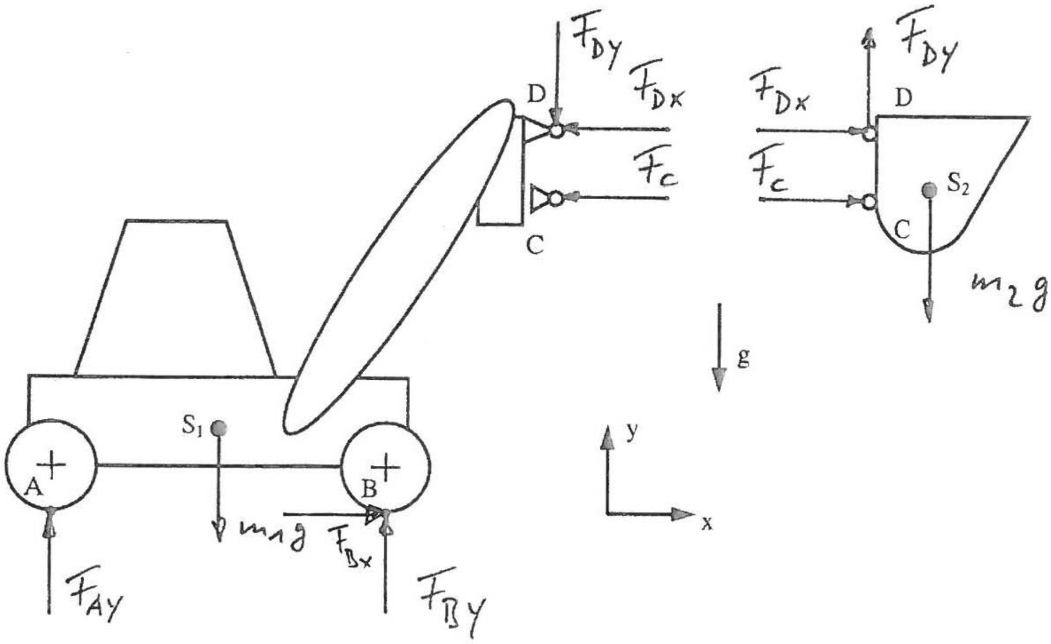
p = 3　　r = 3
q = 6　　f = 0
n = 3

Freischneiden und Gleichgewicht

Ein Bagger (Masse m_1, Schwerpunkt S_1) mit gefüllter Schaufel (Masse m_2, Schwerpunkt S_2) sei gegeben. Er ist in Ruhe und am Hinterrad tritt keine Horizontalkraft auf.



a) Schneiden Sie die Körper frei, zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte ein und bezeichnen Sie diese.



b) Stellen Sie alle nichttrivialen Kräfte- und Momentengleichgewichte getrennt für Schaufel und Bagger auf.

Schaufel:

$$\sum F_x = 0 = F_C + F_{DX}$$

$$\sum F_y = 0 = F_{DY} - m_2 g$$

$$\sum M_{Dz} = 0 = d F_C - c\, m_2 g$$

Bagger:

$$\sum F_x = 0 = F_C + F_{DX} - F_{BX}$$

$$\sum F_y = 0 = F_{AY} + F_{BY} - F_{DY} - m_1 g$$

$$\sum M_{Bz} = 0 = \frac{a}{2} m_1 g - a F_{AY} + e F_C + (e+d) F_{DX} - b F_{DY}$$

c) Berechnen Sie die Reifenaufstandskräfte.

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} m_1 g - \frac{b+c}{a} m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} m_1 g + \frac{a+b+c}{a} m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Welche Bedingung muss gelten, damit der Bagger nicht umfällt?

$$F_{AY} \geq 0$$

e) Wie groß darf die Masse m_2 der gefüllten Schaufel maximal sein, ohne dass der Bagger umfällt?

$$\frac{a}{2(b+c)} m_1 \geq m_2$$