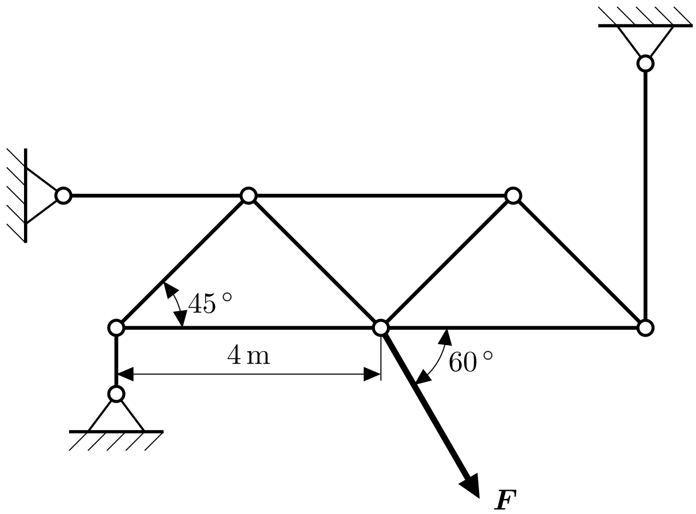
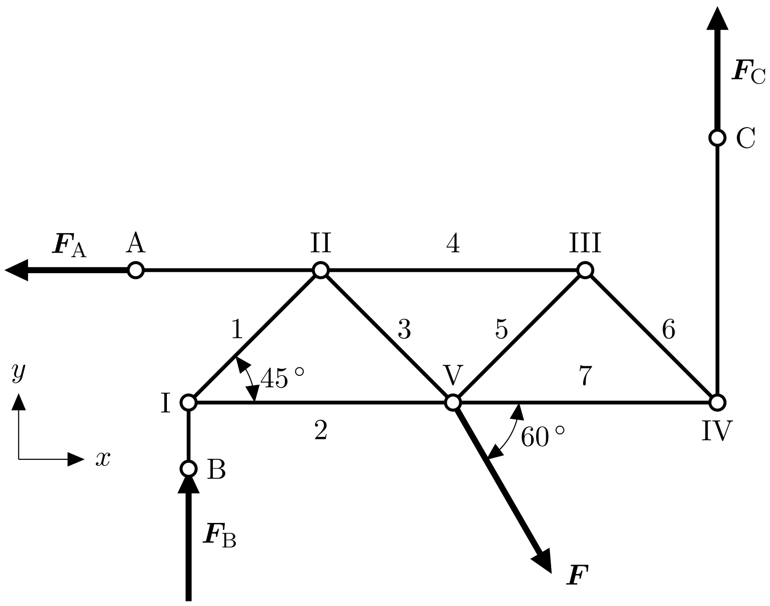
Aufgabe 4.1*

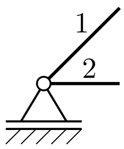
Man bestimme für den skizzierten Stabverband die Auflagekräfte und Stabkräfte. Es gilt $F = 6000\,\text{N}$.



Lösung:
Das Fachwerk besteht nur aus den Stäben 1-7. Die Stäbe A, B und C sind Pendelstützen, die nur Kräfte in Stabrichtung aufnehmen können und gehören zur Lagerung.



Es folgt eine entsprechende Lagerung, wie es beispielhaft für Punkt I skizziert wird.



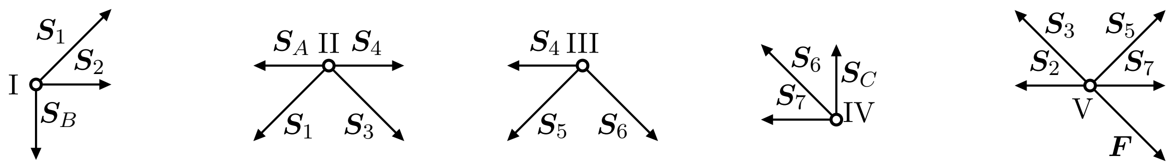
Damit bleiben mit $k = 5$ Knoten insgesamt zehn Gleichungen und mit $s = 7$ Stäben und drei Lagerreaktionen insgesamt zehn Unbekannte.

Gleichgewicht für das gesamte Fachwerk:

$$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0: \; -F_\text{A} + \cos(60°)F = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_\text{A} = \frac{1}{2}F = 3000\,\text{N}$$
$$\sum M_\text{I} \stackrel{!}{=} 0: \; -aF\sin(60°) + 2aF_\text{C} + \frac{a}{2}F_\text{A} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_C = \frac{1}{8}(2\sqrt{3}-1)F = 1848\,\text{N}$$
$$\sum F_y \stackrel{!}{=} 0: \; F_\text{B} - F\sin(60°) + F_\text{C} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_B = \frac{1}{8}(2\sqrt{3}+1)F = 3348\,\text{N}$$

Stabkräfte ($S_i > 0 \Rightarrow$ Zugstab): $S_\text{A} = 3000\,\text{N}$, $S_\text{B} = -3348\,\text{N}$, $S_\text{C} = 1848\,\text{N}$

Knotenpunktverfahren:
$2k$ Gleichungen für $s = 7$ Unbekannte, $2 \cdot 5 - 7 = 3$. Somit bringen drei Gleichungen keine neuen Informationen (Probe!). Die Gleichungen werden rekursiv gelöst.



1.) Gleichgewicht am Knoten I

$$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0: \; S_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_1 = \sqrt{2}S_\text{B} = -4735\,\text{N}$$
$$\sum F_y \stackrel{!}{=} 0: \; -S_\text{B} + \frac{1}{\sqrt{2}}S_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}S_1 = 3348\,\text{N}$$

2.) Gleichgewicht am Knoten II

$$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0: \; -S_\text{A} - \frac{1}{\sqrt{2}}S_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_3 + S_4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_3 = -S_1 = 4735\,\text{N}$$
$$\sum F_y \stackrel{!}{=} 0: \; -\frac{1}{\sqrt{2}}S_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_4 = S_\text{A}\frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 - S_3) = -3696\,\text{N}$$

3.) Gleichgewicht am Knoten III

$$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0: \; -S_4 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_5 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_6 = -S_5$$
$$\sum F_y \stackrel{!}{=} 0: \; -\frac{1}{\sqrt{2}}S_5 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}S_4 = 2614\,\text{N}$$
$$\Rightarrow \qquad S_6 = -S_5 = -2614\,\text{N}$$

4.) Gleichgewicht am Knoten IV

$$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0: \; -\frac{1}{\sqrt{2}}S_6 - S_7 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_7 = -\frac{1}{\sqrt{2}}S_6 = 1848\,\text{N}$$
$$\sum F_y \stackrel{!}{=} 0: \; \frac{1}{\sqrt{2}}S_6 + S_\text{C} = -1848\,\text{N} + 1848\,\text{N} = 0$$

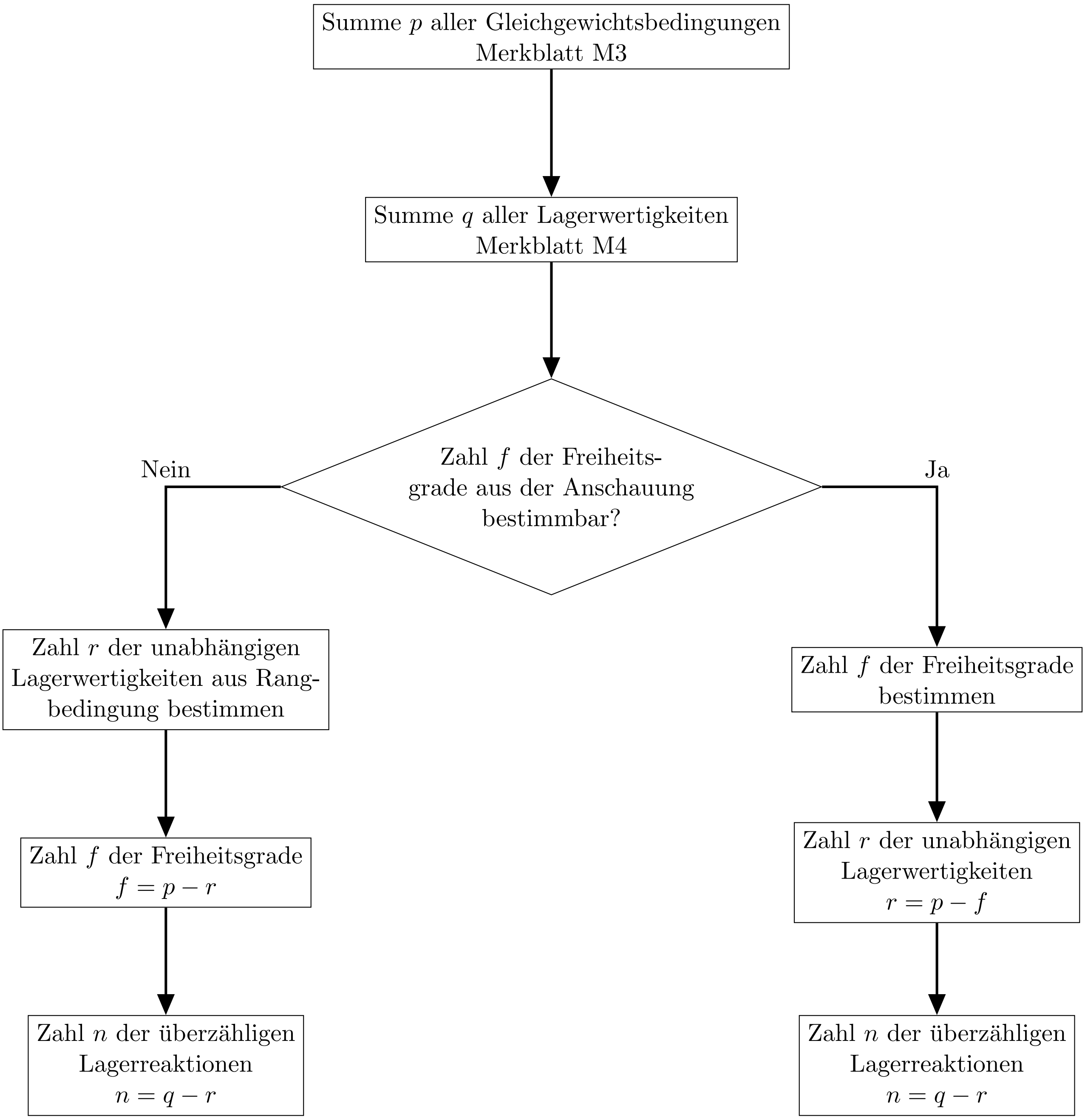
<u>Probe:</u>
Aus dem Kräftegleichgewicht an Knoten IV in y-Richtung folgt

$$\sum F_y \stackrel{!}{=} 0: \ \frac{1}{\sqrt{2}} S_6 + S_\mathrm{C} = -1848\,\mathrm{N} + 1848\,\mathrm{N} = 0.$$

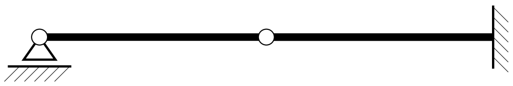
Zudem folgen an Knoten V die Kräftegleichgewichte

$$\begin{aligned}
\sum F_x \stackrel{!}{=} 0: \qquad & -S_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_5 + S_7 + \frac{1}{2} F \\
&= -3348\,\mathrm{N} - 3348\,\mathrm{N} + 1848\,\mathrm{N} + 1848\,\mathrm{N} + 3000\,\mathrm{N} = 0 \\
\sum F_y \stackrel{!}{=} 0: \qquad & \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_5 - \frac{\sqrt{3}}{2} F \\
&= 3348\,\mathrm{N} + 1848\,\mathrm{N} - 5196\,\mathrm{N} = 0
\end{aligned}$$

Lagerung von Mehrkörpersystemen

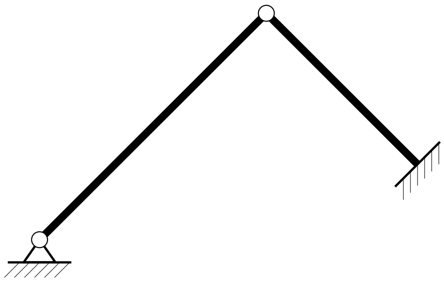


Beispiel 1:



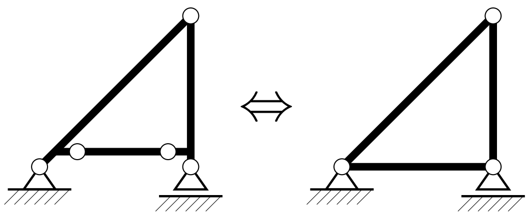
$p = 6$ $r = 6$
$q = 6$ $f = 0$
$n = 0$

Beispiel 2:



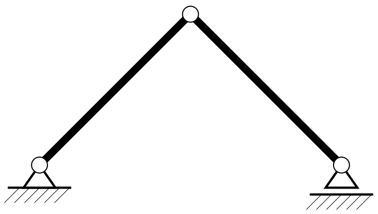
$p = 6$ $r = 6$
$q = 7$ $f = 0$
$n = 1$

Beispiel 3:



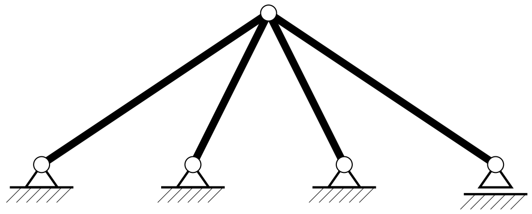
$p = 9$ $r = 9$
$q = 9$ $f = 0$
$n = 0$

Beispiel 4:



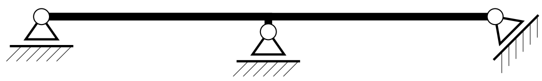
$p = 6$ $r = 5$
$q = 5$ $f = 1$
$n = 0$

Beispiel 5:



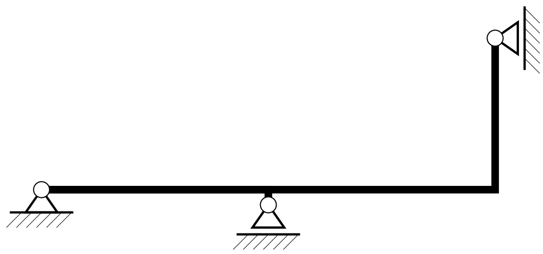
$p = 12$ $\quad r = 12$
$q = 13$ $\quad f = 0$
$n = 1$

Beispiel 6:



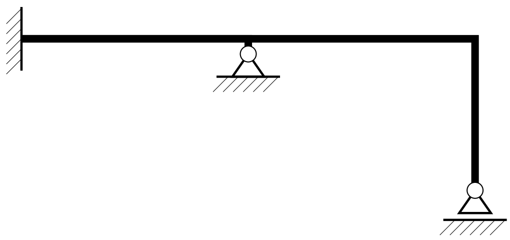
$p = 3$ $\quad r = 3$
$q = 3$ $\quad f = 0$
$n = 0$

Beispiel 7:



$p = 3$ $\quad r = 3$
$q = 4$ $\quad f = 0$
$n = 1$

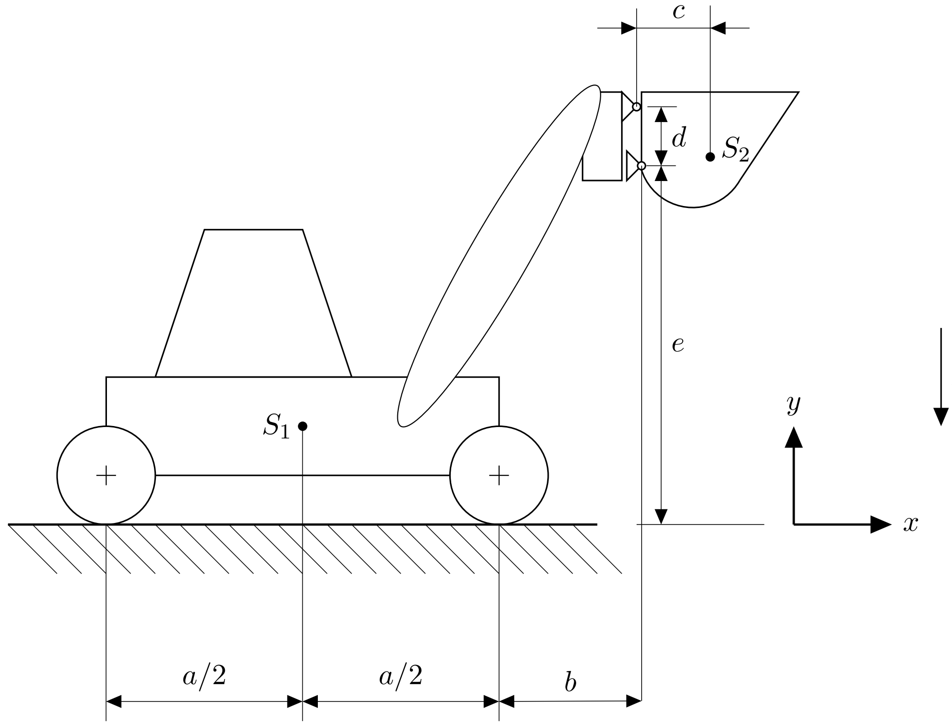
Beispiel 8:



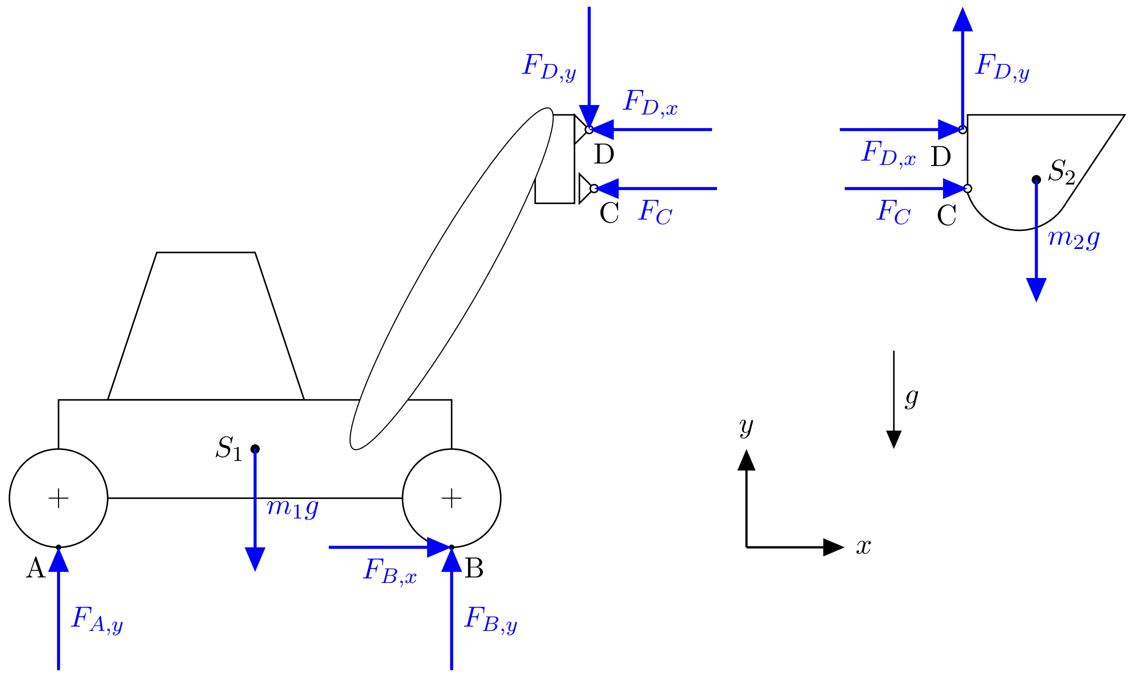
$p = 3$ $\quad r = 3$
$q = 6$ $\quad f = 0$
$n = 3$

Freischneiden und Gleichgewicht

Ein Bagger (Masse m_1, Schwerpunkt S_1) mit gefüllter Schaufel (Masse m_2, Schwerpunkt S_2) sei gegeben. Er ist in Ruhe und am Hinterrad tritt keine Horizontalkraft auf.



a) Schneiden Sie die Körper frei, zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte ein und bezeichnen Sie diese.



b) Stellen Sie alle nichttrivialen Kräfte- und Momentengleichgewichte getrennt für Schaufel und Bagger auf.

Schaufel:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\overset{!}{=} 0: \quad F_C + F_{D,x} = 0 \\ \sum F_y &\overset{!}{=} 0: \quad F_{D,y} - m_2 g = 0 \\ \sum M_D^{(z)} &\overset{!}{=} 0: \quad dF_C - c\, m_2 g = 0 \end{aligned}$$

Bagger:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\overset{!}{=} 0: \quad -F_C - F_{D,x} + F_{B,x} = 0 \\ \sum F_y &\overset{!}{=} 0: \quad F_{A,y} + F_{B,y} - F_{D,y} - m_1 g = 0 \\ \sum M_B^{(z)} &\overset{!}{=} 0: \quad \frac{a}{2} m_1 g - aF_{A,y} + eF_C + (e+d)F_{D,x} - bF_{D,y} = 0 \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie die Reifenaufstandskräfte.

$$\boldsymbol{F}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} m_1 g - \frac{b+c}{a} m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} m_1 g + \frac{a+b+c}{a} m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

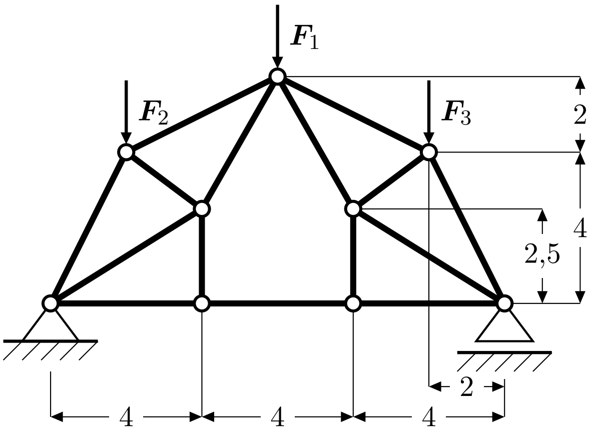
d) Welche Bedingung muss gelten, damit der Bagger nicht umfällt?

$$F_{A,y} \geq 0$$

e) Wie groß darf die Masse m_2 der gefüllten Schaufel maximal sein, ohne dass der Bagger umfällt?

$$\frac{a}{2(b+c)} m_1 \geq m_2$$

Aufgabe 4.4**



Man ermittle für das nebenstehende, nichteinfache Fachwerk die Stabkräfte.
$F_1 = 8000\,\mathrm{N}$, $F_2 = F_3 = 5000\,\mathrm{N}$,
Maßangaben in m.

Lösung:

a) Klassifizierung

Aus der Anzahl der Stäbe (15) und der Lagerung folgt

$$p = 45, \quad q = \underbrace{(4+4+4+6)}_{\text{doppelt vorkommend}} \cdot 2 + 6 + \underbrace{2+1}_{\text{äußere Lagerung}} = 45\,.$$

Aus der Anschauung ergibt sich $f = 0$, sodass

$$f = 0, \quad r = p - f = 45 \quad \text{und} \quad n = q - r = 0$$

folgen.

b) Lagerreaktionen

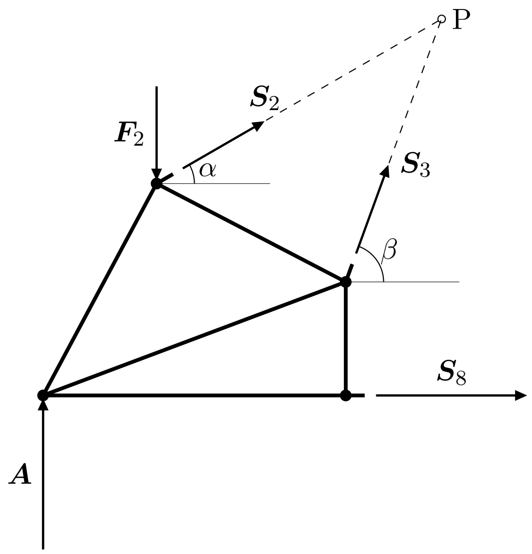
Aus der Symmetrie folgt

$$A = B = \frac{F_1 + F_2 + F_3}{2} = 9000\,\mathrm{N}\,.$$

c) Stabkräfte

Durch die gegebene Symmetrie folgt, dass die Stabkräfte der rechten Fachwerkhälfte den entsprechende Stabkräfte der linken Hälfte entsprechen.

1.) *Ritterschnitt*



Für den gegebenen Ritterschnitt ergeben sich die geometrischen Beziehungen

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 26,6^\circ$$
$$\tan(\beta) = \frac{3,5}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 60,3^\circ$$

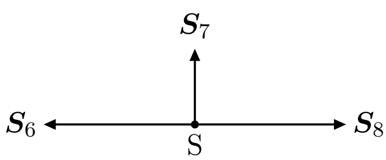
sowie die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_\mathrm{P} \overset{!}{=} 0: \; S_8 \cdot 6\,\mathrm{m} - A \cdot 6\,\mathrm{m} + F_2 \cdot 4\,\mathrm{m} = 0, \tag{1}$$
$$\sum M_\mathrm{Q} \overset{!}{=} 0: \; S_8 \cdot 4\,\mathrm{m} - A \cdot 2\,\mathrm{m} + S_3 \cdot \cos(\beta) \cdot 1,5\,\mathrm{m} + S_3 \cdot \sin(\beta) \cdot 2\,\mathrm{m} = 0, \tag{2}$$
$$\sum M_R \overset{!}{=} 0: \; S_8 \cdot 2,5\,\mathrm{m} + F_2 \cdot 2\,\mathrm{m} - A \cdot 4\,\mathrm{m} - S_2 \cos(\alpha) \cdot 1,5\,\mathrm{m} - S_2 \sin(\alpha) \cdot 2\,\mathrm{m} = 0. \tag{3}$$

Es folgen die Stabkräfte

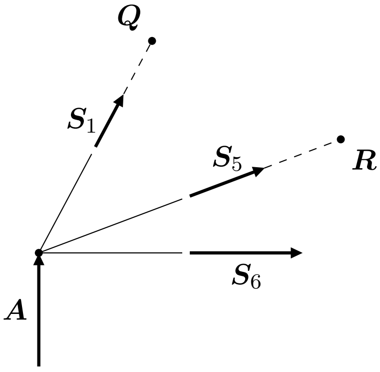
$$S_8 \overset{(1)}{=} A - \frac{2}{3} F_2 = 5667\,\mathrm{N} \quad \text{(Zug)},$$
$$S_3 \overset{(2)}{=} \frac{2A - 4S_8}{1,5\cos(\beta) + 2\sin(\beta)} = -1882\,\mathrm{N} \quad \text{(Druck)},$$
$$S_2 \overset{(3)}{=} \frac{2,5 S_8 + 2F_2 - 4A}{1,5\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha)} = -5290\,\mathrm{N} \quad \text{(Druck)}.$$

2.) *Knotenpunktverfahren*



Für den abgebildeten Knoten S folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen der Nullstab $S_7 = 0\,\mathrm{N}$ und die Zugstäbe $S_6 = S_8 = 5667\,\mathrm{N}$.

3.) *Ritterschnitt*



Für den skizzierten Ritterschnitt folgen die geometrischen Beziehungen

$$\tan(\gamma) = \frac{2,5}{4} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 32^\circ$$
$$\tan(\psi) = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad \psi \approx 63,4^\circ$$

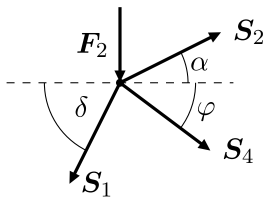
sowie die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_\mathrm{Q} \stackrel{!}{=} 0: \; S_6 \cdot 4\,\mathrm{m} - A \cdot 2\,\mathrm{m} + S_5 \cos(\gamma) \cdot 1,5\,\mathrm{m} + S_5 \sin(\gamma) \cdot 2\,\mathrm{m} = 0 \quad \text{und} \tag{4}$$
$$\sum M_\mathrm{R} \stackrel{!}{=} 0: \; S_6 \cdot 2,5\,\mathrm{m} - A \cdot 4\,\mathrm{m} - S_1 \cos(\psi) \cdot 1,5\,\mathrm{m} - S_1 \sin(\psi) \cdot 2\,\mathrm{m} = 0. \tag{5}$$

Es ergeben sich die Stabkräfte

$$S_5 \stackrel{(4)}{=} \frac{2A - 4S_6}{1,5\cos(\gamma) + 2\sin(\gamma)} = -2002\,\mathrm{N} \quad \text{(Druck)},$$
$$S_1 \stackrel{(5)}{=} \frac{2,5S_6 - 4A}{1,5\cos(\psi) + 2\sin(\psi)} = -8875\,\mathrm{N} \quad \text{(Druck)}.$$

4.) *Knotenpunktverfahren*



Für den skizzierten Knoten Q ergibt sich aus der Geometrie

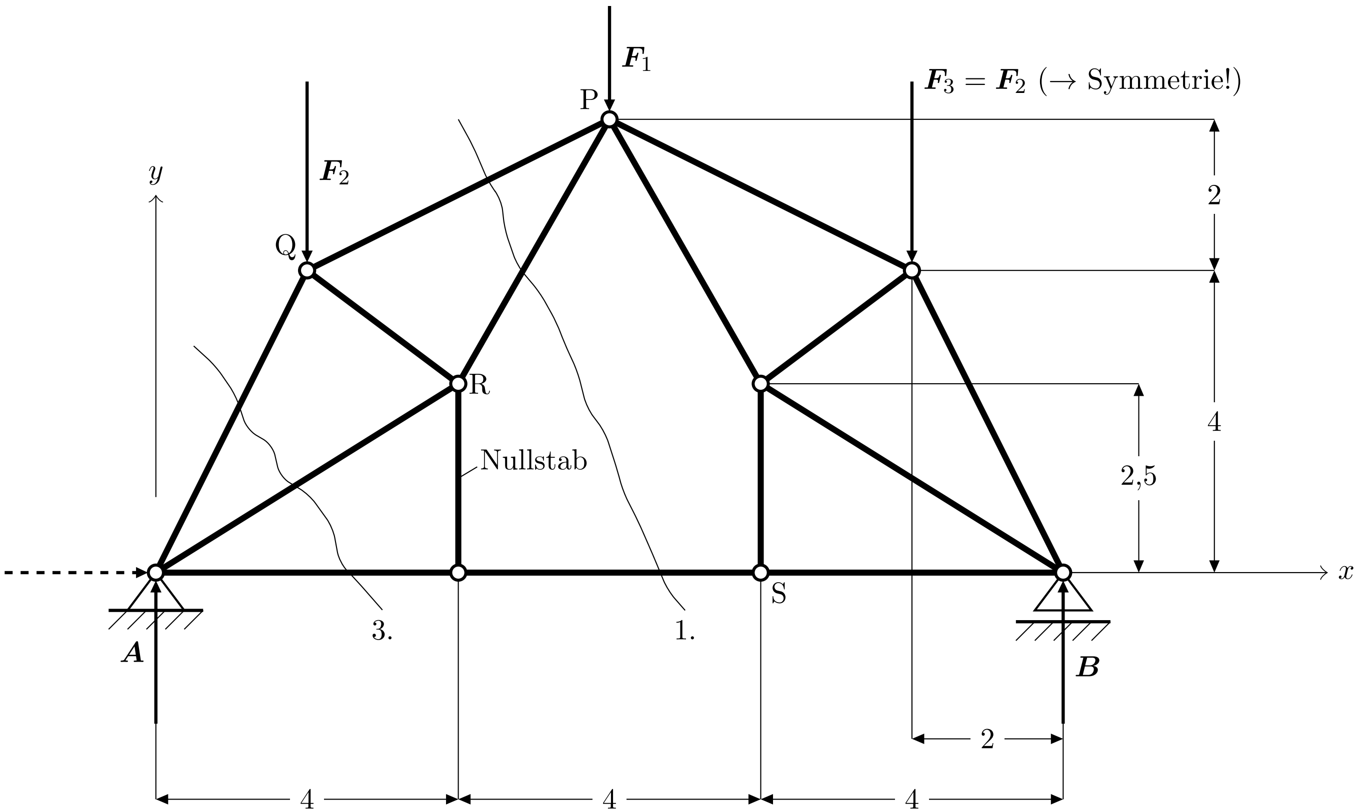
$$\tan(\varphi) = \frac{1,5}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 36,9^\circ.$$

Aus dem Kräftegleichgewicht

$$\sum F_x \stackrel{!}{=} 0: \; -S_1\cos(\delta) + S_2\cos(\alpha) + S_4\cos(\varphi) = 0$$

folgt der Zugstab

$$S_4 = \frac{S_1\cos(\delta) - S_2\cos(\alpha)}{\cos(\varphi)} = 946\,\mathrm{N}.$$


F_1
$F_3 = F_2$ (→ Symmetrie!)
P
F_2
y
Q
R
Nullstab
S
x
3.
1.
A
B
2
4
2,5
2
4
4
4