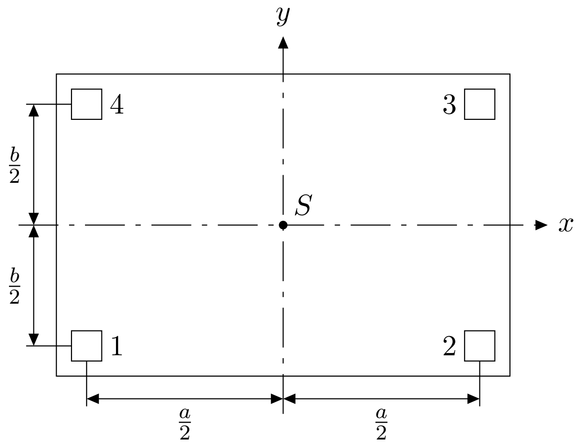
Aufgabe 2.2

Auf der horizontalen Platte eines Tisches vom Gewicht G_T mit dem Schwerpunkt S liegt eine Kugel vom Gewicht G_1. Die vier Beine des Tisches übertragen die Kräfte $F_1 = 40\,\mathrm{N}$, $F_2 = 80\,\mathrm{N}$, $F_3 = 110\,\mathrm{N}$, $F_4 = 70\,\mathrm{N}$ auf den Boden. Jetzt wird eine weitere Kugel vom halben Gewicht der ersten aufgelegt. Danach werden die Kräfte $F_1' = 60\,\mathrm{N}$, $F_2' = 90\,\mathrm{N}$, $F_3' = 120\,\mathrm{N}$, $F_4' = 90\,\mathrm{N}$ gemessen. Die Tischbeine haben den Längenabstand $a = 1{,}2\,\mathrm{m}$ und den Breitenabstand $b = 0{,}8\,\mathrm{m}$.



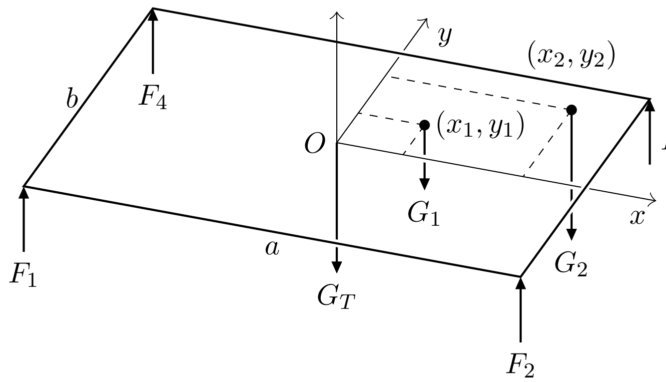
a) Wie schwer sind die Kugeln?

b) Wie schwer ist der Tisch?

c) An welchen Stellen der Tischplatte wurden die Kugeln aufgelegt?

d) Warum kann man diese Aufgabe nicht umkehren, d.h. aus bekannten Gewichten und Auflagestellen die Kräfte F_i, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, berechnen?

<u>Lösung:</u>



a) Gleichgewichtsbedingungen:
System paralleler Kräfte $\Rightarrow$ 3 Gleichungen trivial ($\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum M_z = 0$)

Fall I: eine aufgelegte Kugel

$$\sum F_z = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - G_\mathrm{T} - G_1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{1}$$

Fall II: beide Kugeln aufgelegt

$$\sum F_z = F_1' + F_2' + F_3' + F_4' - G_\mathrm{T} - G_1 - G_2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$

Aus (2) − (1) folgt:

$$
\begin{aligned}
G_2 &= (F_1' + F_2' + F_3' + F_4') - (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \\
&= 360\,\mathrm{N} - 300\,\mathrm{N} = \mathbf{60\,N} \\
G_1 &= 2G_2 = \mathbf{120\,N}
\end{aligned}
$$

b) Gewicht des Tisches:

$$
\overset{(1)}{\Rightarrow} \qquad G_\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{k} F_i - G_1 = \mathbf{180\,N}
$$

c) Die Auflagepunkte folgen aus den Momentengleichgewichten bezüglich des Ursprungs:
Fall I:

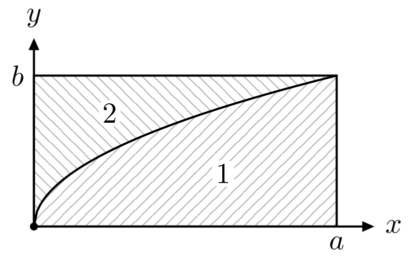
$$
\begin{aligned}
&\sum M_x = -\frac{b}{2}(F_1 + F_2) + \frac{b}{2}(F_3 + F_4) - y_1 G_1 \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & y_1 = \frac{b}{2G_1}(-F_1 - F_2 + F_3 + F_4) = \frac{0{,}8}{2 \cdot 120} \cdot 60\,\mathrm{m} = \mathbf{0{,}2\,m} \\
&\sum M_y = \frac{a}{2}(F_1 + F_4) - \frac{a}{2}(F_2 + F_3) + x_1 G_1 \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & x_1 = \frac{a}{2G_1}(-F_1 + F_2 + F_3 - F_4) = \frac{1{,}2}{2 \cdot 120} \cdot 80\,\mathrm{m} = \mathbf{0{,}4\,m}
\end{aligned}
$$

Fall II:

$$
\begin{aligned}
&\sum M_x = -\frac{b}{2}\left(F_1' + F_2'\right) + \frac{b}{2}\left(F_3' + F_4'\right) - y_1 G_1 - y_2 G_2 \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & y_2 = \frac{1}{G_2}\left(\frac{b}{2}\left(-F_1' - F_2' + F_3' + F_4'\right) - y_1 G_1\right) = \mathbf{0\,m} \\
&\sum M_y = \frac{a}{2}\left(F_1' + F_4'\right) - \frac{a}{2}\left(F_2' + F_3'\right) + x_1 G_1 + x_2 G_2 \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad & x_2 = \frac{1}{G_2}\left(\frac{a}{2}\left(-F_1' + F_2' + F_3' - F_4'\right) - x_1 G_1\right) = \mathbf{-0{,}2\,m}
\end{aligned}
$$

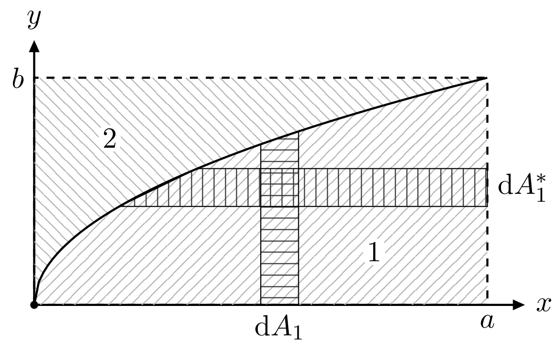
d) Eine Umkehrung ist nicht möglich, da nur 3 nichttriviale Gleichungen für 4 unbekannte Reaktionskräfte F_i vorliegen (statische Unbestimmtheit).

Aufgabe 2.4:



Man suche die Koordinaten des Schwerpunkts eines halben Parabelsegments (Fläche A_1) und des Schwerpunkts seiner Ergänzung zum Rechteck (Fläche A_2).

Lösung:
Unter der Voraussetzung einer konstanten Flächendichte entspricht der Schwerpunkt dem Flächenmittelpunkt.



Die Gleichung der Parabel lautet

$$x = cy^2.$$

Die Punktprobe ergibt $a = cb^2$ und somit $c = \frac{a}{b^2}$. Damit wird die Parabelgleichung zu

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

Teilfläche 1:
Zur Berechnung des Schwerpunktes S_1 schneidet man aus der Gesamtfläche A_1 die Flächenelemente $\mathrm{d}A_1$ und $\mathrm{d}A_1^*$ heraus. Die Gleichungen der Schwerpunktskoordinaten für S_1 lauten

$$x_{S_1} = \frac{1}{A_1}\int x\,\mathrm{d}A_1 \quad \text{und}$$
$$y_{S_1} = \frac{1}{A_1}\int y\,\mathrm{d}A_1^*.$$

Unter Verwendung der Parabelgleichung erhält man für die Flächenelemente

$$\mathrm{d}A_1 = y\,\mathrm{d}x = b\sqrt{\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x \quad \text{und}$$
$$\mathrm{d}A_1^* = (a-x)\,\mathrm{d}y = a\left(1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)\,\mathrm{d}y$$

und für die Gesamtfläche A_1

$$A_1 = \int \mathrm{d}A_1 = b\int_0^a \sqrt{\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}ab$$

bzw. $A_1 = \int \mathrm{d}A_1^* = \dots$. Damit gilt

$$x_{\mathrm{S}_1} = \frac{3}{2a^{\frac{3}{2}}} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}a \quad \text{und}$$
$$y_{\mathrm{S}_1} = \frac{3}{2b} \int_0^b y \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}b.$$

<u>Teilfläche 2:</u>
Erster Lösungsweg:
Integration wie bei Teilfläche 1.

Zweiter Lösungsweg:
Für den Schwerpunkt einer aus A_1 und A_2 zusammengesetzten Fläche gilt

$$\boldsymbol{r}_s = \frac{\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}_1} A_1 + \boldsymbol{r}_{\mathrm{S}_2} A_2}{A_1 + A_2}.$$

Mit der Gesamtfläche $A_2 = A - A_1 = \frac{1}{3}ab$ folgt für die beiden gesuchten Schwerpunktskoordinaten

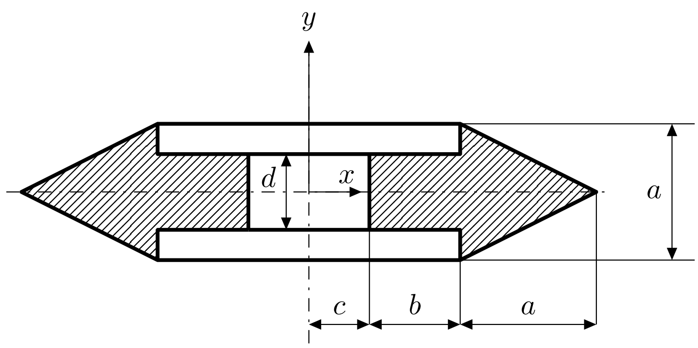
$$x_{\mathrm{S}_2} = \frac{1}{A_2}\left(x_{\mathrm{S}} A - x_{\mathrm{S}_1} A_1\right) = \frac{3}{ab}\left(\frac{a^2 b}{2} - \frac{2}{5}a^2 b\right),$$
$$y_{\mathrm{S}_2} = \frac{1}{A_2}\left(y_{\mathrm{S}} A - y_{\mathrm{S}_1} A_1\right) = \frac{3}{ab}\left(\frac{ab^2}{2} - \frac{1}{4}ab^2\right),$$

also

$$x_{\mathrm{S}_2} = \frac{3}{10}a \quad \text{und} \quad y_{\mathrm{S}_2} = \frac{3}{4}b.$$

Aufgabe 2.6:

Man ermittle das Volumen des dargestellten homogenen Ringkörpers, der durch Rotation der schraffierten Fläche um die y-Achse erzeugt wird. Hierbei gelte $a = 9\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$ und $d = 5\,\text{cm}$.



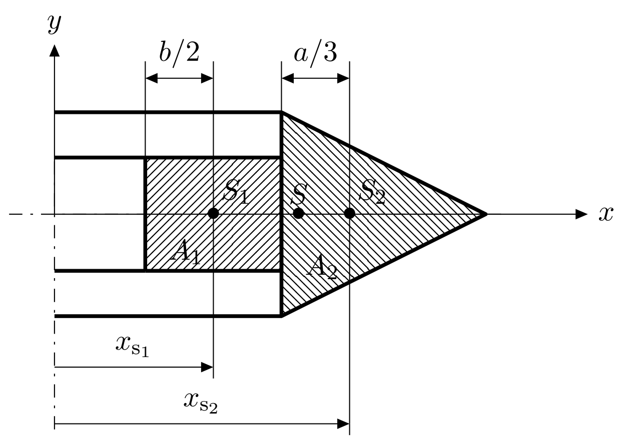
Lösung:
Für das Volumen eines Rotationskörpers gilt nach der 2. Guldinschen Regel

$$V = 2\pi x_\mathrm{s} A$$

wobei A der Betrag der erzeugenden Fläche und x_s die Koordinate ihres Flächenmittelpunktes (Abstand des Flächenmittelpunktes von der Drehachse) ist.

Setzt sich die Fläche A aus i Teilflächen A_i mit leicht zu ermittelnden oder bekannten Flächenmittelpunktskoordinaten x_{s_i} zusammen, so gilt

$$Ax_\mathrm{s} = \sum_i A_i x_{\mathrm{s}_i}.$$



Im vorliegenden Fall ergibt sich somit

$$Ax_\mathrm{s} = A_1 x_{\mathrm{s}_1} + A_2 x_{\mathrm{s}_2} = \left(c + \frac{b}{2}\right) bd + \left(c + b + \frac{a}{3}\right) \frac{a^2}{2}.$$

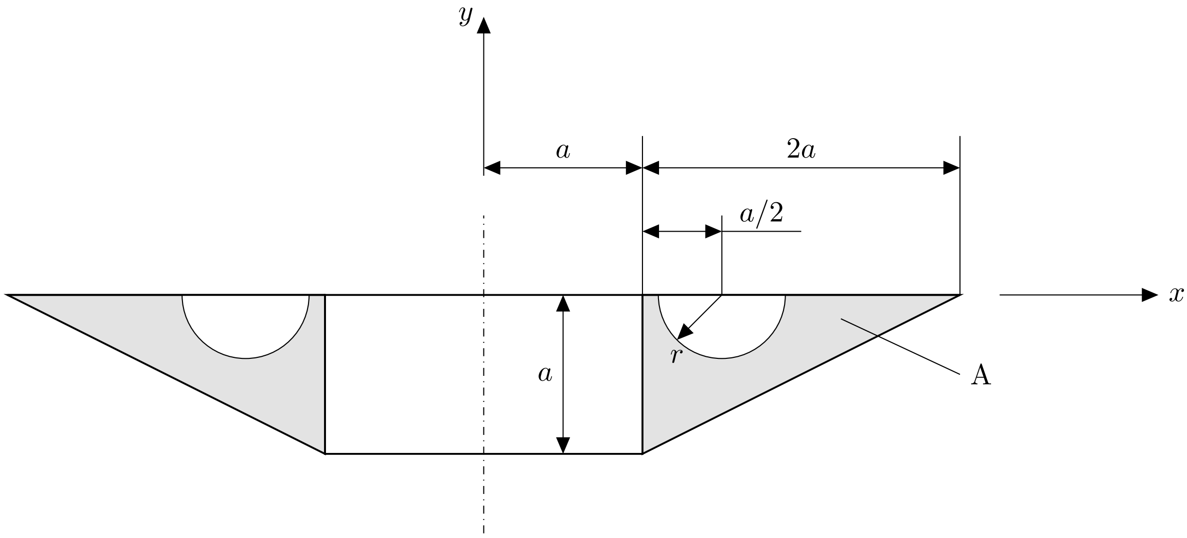
Damit wird das Volumen

$$V = 2\pi \left[\left(c + \frac{b}{2}\right) bd + \left(c + b + \frac{a}{3}\right) \frac{a^2}{2}\right]$$

und mit den gegebenen Zahlenwerten $V = 4628\,\text{cm}^2$.

Schwerpunktsbestimmung

Für den dargestellten homogenen Ringkörper sollen die Lage des Schwerpunkts und mit Hilfe der Guldinschen Regeln das Volumen bestimmt werden. Die erzeugende Fläche A lässt sich als Dreieck (Fläche A_1) mit ausgeschnittenem Halbkreis (Fläche A_2) beschreiben



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilflächen und der erzeugenden Fläche.

$$A_1 = a^2, \qquad A_2 = \frac{\pi}{2} r^2, \qquad A_3 = a^2 - \frac{\pi}{2} r^2$$

b) Bestimmen Sie die Lage der Schwerpunkte der Teilflächen.

$$x_{S_1} = \frac{5}{3} a, \qquad x_{S_2} = \frac{3}{2} a,$$

$$y_{S_1} = -\frac{a}{3}, \qquad y_{S_2} = -\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$$

c) Wo liegt der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche?

$$x_S = \frac{\frac{5}{3}a^3 - \frac{3}{4}\pi a r^2}{a^2 - \frac{\pi}{2} r^2}, \qquad y_S = \frac{-\frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}r^3}{a^2 - \frac{\pi}{2} r^2}$$

d) Wie groß ist das Volumen des Ringkörpers.

$$V = 2\pi \left(\frac{5}{3} a^3 - \frac{3}{4} \pi a r^2 \right)$$