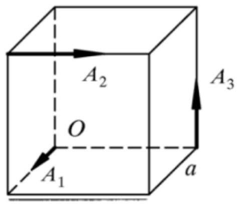
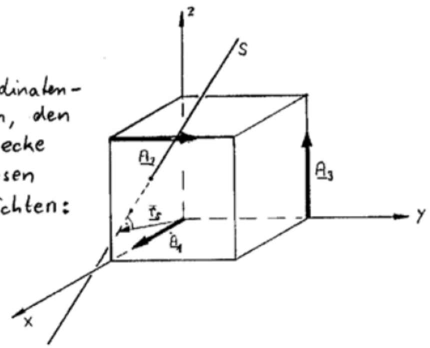
Aufgabe 1.14: In drei Kanten eines Würfels mit der Kantenlänge a liegen drei windschiefe gebundene Vektoren je vom Betrag A. Man bestimme den Vektorwinder für den Punkt O



Lösung:

a) Für die Wahl eines Koordinaten-systems bietet sich an, den Ursprung in eine Würfelecke zu legen und die Achsen kantenparallel auszurichten:



Dann gehören zu den Vektoren

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix}$$

der Reihe nach die Ortsvektoren der Angriffspunkte

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für den, dem System $\{\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3\}$ äquivalenten Vektorwinder $(\underline{R}, \underline{M}_0)$ im Punkt O gilt

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{3} \underline{A}_i \qquad \text{und} \qquad \underline{M}_0 = \sum_{i=1}^{3} \underline{M}_i = \sum_{i=1}^{3} \underline{r}_i \times \underline{A}_i \ .$$

Man erhält:

$$\underline{M}_1 = \underline{0} \ ,$$

$$\underline{M}_3 = a \cdot A\, \underline{e}_x \qquad \text{(Rechte-Hand-Regel)} \ ,$$

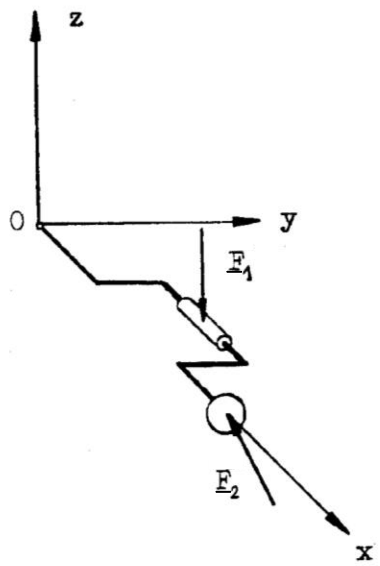
$$\underline{M}_2 = \underline{r}_2 \times \underline{A}_2 = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ a & 0 & a \\ 0 & A & 0 \end{vmatrix} = aA\underline{e}_z - aA\underline{e}_x \ .$$

Also:

$$\boxed{\underline{R} = \begin{bmatrix} A \\ A \\ A \end{bmatrix} \qquad \underline{M}_0 = aA\,\underline{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ aA \end{bmatrix}}$$

Aufgabe 3.2: Eine Bohrleier wird in x-Richtung rechtwinklig zu einer Wand (yz-Ebene) angesetzt. An der Leier greifen die eingezeichneten Kräfte $\underline{F}_1 = (0,0,-100)$ N und $\underline{F}_2 = (-100,0,40)$ N an. Die Angriffspunkte werden durch die Ortsvektoren $\underline{r}_1 = (12,10,0)$ cm und $\underline{r}_2 = (30,0,0)$ cm bestimmt.

Man berechne die Kraft $\underline{F}$ und das Moment $\underline{M}_0$, das der Bohrer an der Bohrstelle 0 auf die Wand ausübt, d.h. den äquivalenten Kraftwinder bezogen auf den Punkt 0.



Lösung:

Die Wirkung des Kräftesystems aus den Kräften $\underline{F}_1$ und $\underline{F}_2$ am Punkt 0 wird durch den Kraftwinder beschrieben:

$$(\underline{F}_1, \underline{F}_2) \sim (\underline{F}, \underline{M}_0).$$

Dafür gilt:

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{2} \underline{F}_i \quad , \qquad \underline{M}_0 = \sum_{i=1}^{2} \underline{M}_i = \sum_{i=1}^{2} \underline{r}_i \times \underline{F}_i .$$

Die Ergebnisse lassen sich übersichtlich in einer Tabelle zusammenfassen:

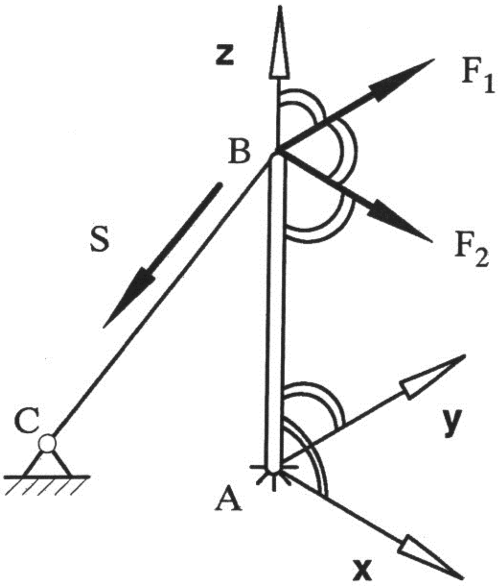
	1	2	Σ
$\underline{r}_i$	(12, 10, 0) cm	(30, 0, 0) cm	
$\underline{F}_i$	(0, 0, -100) N	(-100, 0, 40) N	(-100, 0, -60) N
$\underline{r}_i \times \underline{F}_i$	(-1000, 1200, 0) Ncm	(0, -1200, 0) Ncm	(-1000, 0, 0) Ncm

Das Moment am Punkt 0 wirkt in x-Richtung.

Die resultierende Kraft $\underline{F}$ hat neben einer Komponente in x-Richtung zusätzlich eine Komponente in z-Richtung.

Institut für Technische und Numerische Mechanik
Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. P. Eberhard
Prof. Dr.-Ing. M. Hanss
Jun.-Prof. Dr.-Ing. J. Fehr

Kraftwinder



Der skizzierte Eckpfosten eines Gartenzaunes ist bei A fest im Boden verankert.

Er wird in B durch die Kräfte $|\mathbf{F}_1| = F$, $|\mathbf{F}_2| = F$ und $|\mathbf{S}| = S$ belastet. Die Punkte B und C sind durch die Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AC} = \begin{bmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Wie lautet die Koordinatendarstellung der Kräfte $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ und $\mathbf{S}$?

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} S \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} S \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} S \end{bmatrix}$$

$\underline{r}_{BC} = -\underline{r}_{AB} + \underline{r}_{AC}$

$\underline{S} = \frac{\underline{r}_{BC}}{|\underline{r}_{BC}|} S$

b) Bestimmen Sie den zu $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{S})$ äquivalenten Kraftwinder bezüglich A.

$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{S}$

$\underline{M}^{(A)} = \underline{r}_{AB} \times \underline{F}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F - \frac{1}{\sqrt{6}} S \\ F - \frac{1}{\sqrt{6}} S \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} S \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}^{(A)} = \begin{bmatrix} -2a\left(F - \frac{1}{\sqrt{6}} S\right) \\ 2a\left(F - \frac{1}{\sqrt{6}} S\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Wie groß muss die Kraft S sein, damit das Einspannmoment in A verschwindet?

$S = \sqrt{6}\, F$

Gebundene Vektoren

Ein System zweier gebundener Vektoren

$$\mathbf{F}_1 = \mathrm{F}_1 \, \mathbf{e}_z \,, \qquad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hat den äquivalenten Vektorwinder $(\mathbf{F}, \mathbf{M}_0)$ mit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Der Angriffspunkt von $\mathbf{F}_1$ ist $\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$.

a) Ermitteln Sie den Betrag des Vektors $\mathbf{F}_1$ und den Angriffspunkt von $\mathbf{F}_2$, der in der yz-Ebene liegen soll.

$\mathrm{F}_1 =$ 3

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 \Rightarrow F_1 = 4-1 = 3$

$\underline{r}_2$ in yz-Ebene $\Rightarrow r_{2x} = 0$; $\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{bmatrix}$

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \times \underline{F}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{2y} - r_{2z} \\ -3 r_{2z} \\ 3 r_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} r_{2y} = -2 \\ r_{2z} = -3 \end{matrix}$$

b) Warum lassen sich nicht alle drei Koordinaten des Angriffspunktes von $\mathbf{F}_2$ rechnerisch ermitteln? Geben Sie eine physikalische Erklärung.

$\underline{F}_2$ ist linienflüchtig. Durch $\underline{r}_1, \underline{F}_1, \underline{F}_2, \underline{M}_0$ ist nur die Wirkungslinie von $\underline{F}_2$ definiert.