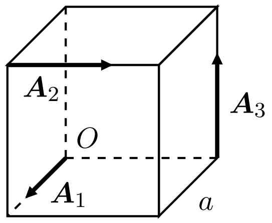
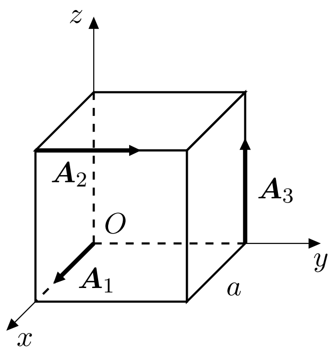
Aufgabe 1.14*

In drei Kanten eines Würfels mit der Kantenlänge a liegen drei windschiefe gebundene Vektoren je vom Betrag A. Man bestimme den Vektorwinder für den Punkt O.



Lösung:
Für die Wahl eines Koordinatensystems bietet sich an, den Ursprung in eine Würfelecke zu legen und die Achsen kantenparallel auszurichten.



Dann gehören zu den Vektoren

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix}$$

der Reihe nach die Ortsvektoren der Angriffspunkte

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \text{ und } \quad \boldsymbol{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Für den dem System $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3\}$ äquivalenten Vektorwinder $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_O)$ im Punkt O gilt

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{A}_i \quad \text{und} \quad \boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{A}_i \,.$$

Man erhält somit

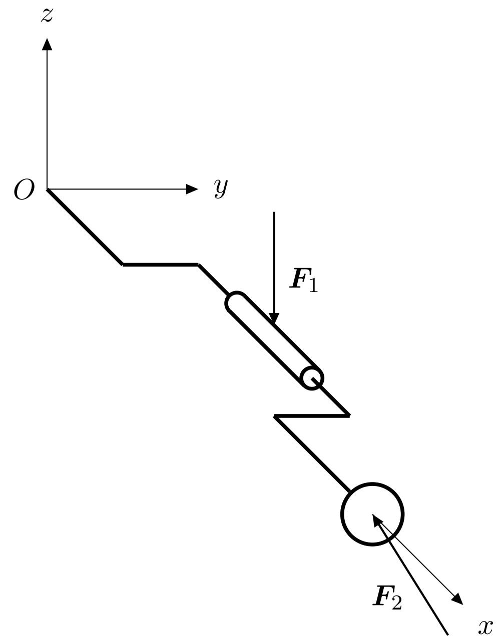
$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1 &= \boldsymbol{0} \,, \\ \boldsymbol{M}_3 &= aA\boldsymbol{e}_x \quad \text{(Rechte-Hand-Regel) und} \\ \boldsymbol{M}_2 &= \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{A}_2 = aA\boldsymbol{e}_z - aA\boldsymbol{e}_x \,. \end{aligned}$$

womit folgt

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} A \\ A \\ A \end{bmatrix} , \qquad \boldsymbol{M}_O = aA\boldsymbol{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ aA \end{bmatrix} .$$

Aufgabe 3.2

Eine Bohrleier wird in x-Richtung rechtwinklig zu einer Wand (yz-Ebene) angesetzt. An der Leier greifen die eingezeichneten Kräfte $\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & -100\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ N und $\boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix}-100 & 0 & 40\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ N an. Die Angriffspunkte werden durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix}12 & 10 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ cm und $\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix}30 & 0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ cm bestimmt. Man berechne die Kraft $\boldsymbol{F}$ und das Moment $\boldsymbol{M}_O$, das der Bohrer an der Bohrstelle O auf die Wand ausübt, d.h. den äquivalenten Kraftwinder bezogen auf den Punkt O.



Lösung:
Die Wirkung des Kräftesystems aus den Kräften $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ am Punkt O wird druch den Kraftwinder

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M}_O)$$

beschrieben. Hierfür gilt

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{F}_i, \qquad \boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i.$$

Die Ergebnisse lassen sich übersichtlich in einer Tabelle zusammenfassen.

	1	2	$\sum$
$\boldsymbol{r}_i$	$\begin{bmatrix}12 & 10 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ cm	$\begin{bmatrix}30 & 0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ cm	-
$\boldsymbol{F}_i$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & -100\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ N	$\begin{bmatrix}-100 & 0 & 40\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ N	$\begin{bmatrix}-100 & 0 & -60\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ N
$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$	$\begin{bmatrix}-1000 & 1200 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ Ncm	$\begin{bmatrix}0 & -1200 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ Ncm	$\begin{bmatrix}-1000 & 0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ Ncm

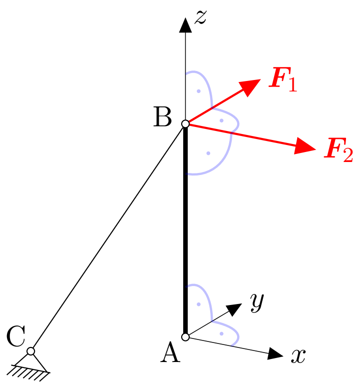
Das Moment am Punkt O wirkt in x-Richtung. Die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}$ hat neben einer Komponente in x-Richtung zusätzlich eine Komponente in z-Richtung.

Kraftwinder

Der skizzierte Eckpfosten eines Gartenzaunes ist im Punkt A fest im Boden verankert. Er wird im Punkt B durch die Kräfte $|\boldsymbol{F}_1| = F$, $|\boldsymbol{F}_2| = F$ und $|\boldsymbol{S}| = S$ belastet. Die Punkte B und C sind durch die Ortsvektoren

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}$$

gegeben.



a) Wie lautete die Koordinatendarstellung der Kräfte $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{S}$?

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}}S \\ -\frac{1}{\sqrt{6}}S \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}S \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie den zu $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{S})$ äquivalenten Kraftwinder bezüglich A.

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F - \frac{1}{\sqrt{6}}S \\ F - \frac{1}{\sqrt{6}}S \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}S \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M}^{(A)} = \begin{bmatrix} -2a\left(F - \frac{1}{\sqrt{6}}S\right) \\ 2a\left(F - \frac{1}{\sqrt{6}}S\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Wie groß muss die Kraft S sein, damit das Einspannmoment in A verschwindet?

$$S = \sqrt{6}F$$

Gebundene Vektoren

Ein System zweier gebundener Vektoren

$$\boldsymbol{F}_1 = F_1 \boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hat den äquivalenten Vektorwinder $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{M}_0)$ mit

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{M}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Der Angriffspunkt von $\boldsymbol{F}_1$ ist $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y$.

a) Ermitteln Sie den Betrag des Vektors $\boldsymbol{F}_1$ und den Angriffspunkt von $\boldsymbol{F}_2$, der in der y-z-Ebene liegen soll.

$$F_1 = 3, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Erklärung:
Aus $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ folgt für die dritte und einzige Komponente von $\boldsymbol{F}_1$, $F_{1,z} = 4 - 1 = 3$ und somit für den Betrag $|\boldsymbol{F}_1| = F_1 = F_{1,z}$.
Da $\boldsymbol{r}_2$ in der y-z-Ebene liegt ergibt sich $r_{2,x} = 0$ und es ergibt sich mit $\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 & r_{2,y} & r_{2,z} \end{bmatrix}^\top$

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{2,y} - r_{2,z} \\ -3r_{2,z} \\ 3r_{2,y} \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_{2,y} &= -2 \\ r_{2,z} &= -3 \end{aligned}$$

b) Warum lassen sich nicht alle drei Koordinaten des Angriffspunktes von $\boldsymbol{F}_2$ rechnerisch ermitteln? Geben Sie eine physikalische Erklärung.

$\boldsymbol{F}_2$ ist linienflüchtig. Durch $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{M}_0$ ist nur die Wirkungslinie von $\boldsymbol{F}_2$ definiert.