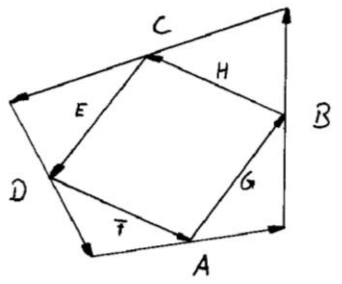
Aufgabe 1.1: Man zeige mit Hilfe der Vektorrechnung, daß die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Lösung:



zu zeigen:

$\underline{E} = -\underline{G}$ bzw. $\underline{E} + \underline{G} = \underline{0}$ (1)

$\underline{H} = -\underline{F}$ $\quad \underline{H} + \underline{F} = \underline{0}$ (2)

zu (1)

$\underline{E} = \frac{1}{2}\underline{C} + \frac{1}{2}\underline{D}$ (3)

$\underline{G} = \frac{1}{2}\underline{A} + \frac{1}{2}\underline{B}$ (4)

(3) u. (4) in (1)

$$\underline{E} + \underline{G} = \frac{1}{2}\underbrace{(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D})}_{=\underline{0} \text{ da geschlossene Vektorkette}} = \underline{0}$$

zu (2)

$\underline{F} = \frac{1}{2}\underline{D} + \frac{1}{2}\underline{A}$ (5)

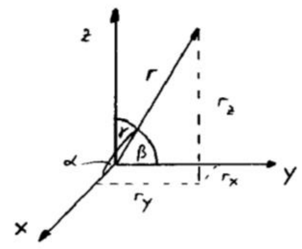
$\underline{H} = \frac{1}{2}\underline{B} + \frac{1}{2}\underline{C}$ (6)

(5) u. (6) in (2)

$$\underline{H} + \underline{F} = \frac{1}{2}\underbrace{(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D})}_{=\underline{0} \text{ da geschlossene Vektorkette}} = \underline{0}$$

Aufgabe 1.5: Der Ortsvektor $\underline{r}$ hat die Länge $r = 5$ cm. Man zerlege ihn in drei aufeinander senkrechte Komponenten $\underline{r}_x$, $\underline{r}_y$, $\underline{r}_z$, so daß sich deren Längen wie $1 : 2 : 3$ verhalten. Wie groß sind die Längen von $\underline{r}_x$, $\underline{r}_y$, $\underline{r}_z$ und welchen Winkel bilden sie mit $\underline{r}$?

Lösung.



Gesucht: a) r_x, r_y, r_z

b) Winkel von $\underline{r}_x, \underline{r}_y, \underline{r}_z$ mit $\underline{r}$

zu a)

$$\underline{r} = \underline{r}_x + \underline{r}_y + \underline{r}_z = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

$$|\underline{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \qquad \text{mit } r_y = 2r_x, \; r_z = 3r_x$$

$$= \sqrt{r_x^2 + 4r_x^2 + 9r_x^2}$$

$$= r_x\sqrt{14} \stackrel{!}{=} 5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r_x = \frac{5}{\sqrt{14}}\,\text{cm}, \; r_y = \frac{10}{\sqrt{14}}\,\text{cm}, \; r_z = \frac{15}{\sqrt{14}}\,\text{cm}}}$$

zu b)

Skalarprodukt: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a \cdot b \cdot \cos\measuredangle$

$$\cos\alpha = \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}_x}{r \cdot r_x} = \frac{\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{r \cdot r_x} = \frac{r_x^{\cancel{2}}}{r \cdot \cancel{r_x}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

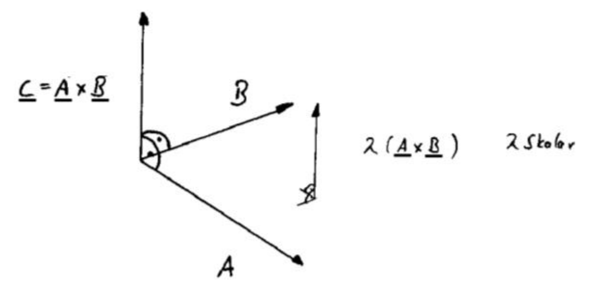
$$\Rightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{14}} \approx \underline{\underline{74{,}5^\circ}}$$

analog: $\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt{14}} \approx \underline{\underline{57{,}7^\circ}}$

$\gamma = \arccos\frac{3}{\sqrt{14}} \approx \underline{\underline{36{,}7^\circ}}$

Aufgabe 1.7: Die beiden Vektoren $\underline{A} = (1,2,3)$ und $\underline{B} = (2,2,5)$ sollen von dem Anfangspunkt $(0,0,0)$ ausgehen und spannen somit eine Ebene auf. Man berechne die Vektoren, die auf dieser senkrecht stehen und denselben Betrag wie der Vektor $(1,1,1)$ haben.

Lösung:



$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Der Betrag der gesuchten Vektoren ist

$$\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

Für die gesuchten Vektoren $\underline{X}$ muß gelten

$$|\underline{X}| = \sqrt{3} = |\lambda \underline{C}|$$
$$= |\lambda| \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2}$$
$$= |\lambda| \cdot \sqrt{21}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\underline{X} = \pm \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1.8: Man zeige, daß $\underline{A}(\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}(\underline{C} \times \underline{A}) = \underline{C}(\underline{A} \times \underline{B})$ ist.

Lösung:

1\. Weg: Koordinatenweise ausrechnen

mit $\underline{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \ldots$

$\Rightarrow$ aufwendig und fehleranfällig

2\. Weg: mit Determinantenformel

$$\underline{A}(\underline{B} \times \underline{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Eigenschaft der Determinante:
Durch das Vertauschen von zwei Zeilen ändert sich nur das Vorzeichen

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{B} \times \underline{C}) = -\underline{B}(\underline{A} \times \underline{C}) = \underline{B}(\underline{C} \times \underline{A})$$

3\. Weg: mit Distributivgesetz

$$\underline{A}(\underline{B} \times \underline{C}) - \underline{B}(\underline{C} \times \underline{A})$$
$$= \underline{A}(\underline{B} \times \underline{C}) + \underbrace{\underline{B}(\underline{B} \times \underline{C})}_{0} - \underbrace{\underline{A}(\underline{C} \times \underline{A})}_{0} - \underline{B}(\underline{C} \times \underline{A})$$
$$= (\underline{A} + \underline{B})(\underline{B} \times \underline{C}) - (\underline{A} + \underline{B})(\underline{C} \times \underline{A})$$
$$= (\underline{A} + \underline{B})\left\{(\underline{B} \times \underline{C}) - (\underline{C} \times \underline{A})\right\}$$
$$= (\underline{A} + \underline{B})\left\{(\underline{B} \times \underline{C}) + (\underline{A} \times \underline{C})\right\}$$
$$= (\underline{A} + \underline{B})\left\{\underbrace{(\underline{A} + \underline{B}) \times \underline{C}}_{\text{Vektor der senkrecht auf } (\underline{A}+\underline{B}) \text{ steht}}\right\}$$
$$= 0$$

$\underline{B}(\underline{C} \times \underline{A}) - \underline{C}(\underline{A} \times \underline{B})$ analog

Aufgabe 1.9: In einem kartesischen Koordinatensystem seien drei Vektoren gegeben: $\underline{A} = 5\underline{e}_x + \alpha\underline{e}_y + 2\underline{e}_z$, $\underline{B} = 3\underline{e}_x + 4\underline{e}_y - \underline{e}_z$, $\underline{C} = 2\underline{e}_x - 10\underline{e}_y + 4\underline{e}_z$. Wie groß muß die Koordinate $A_y = \alpha$ gewählt werden, damit die drei Vektoren komplanar sind?

Lösung:

Die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ heißen komplanar wenn es reelle Zahlen x, y, z gibt mit $x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c} = \underline{0}$ und x, y, z nicht gleichzeitig 0.

Es muß also α so bestimmt werden, daß für

$$a\underline{A} + b\underline{B} + c\underline{C} = \underline{0} \quad \text{eine Lösung} \quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

existiert.

$$a\begin{bmatrix}5\\ \alpha\\ 2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}3\\ 4\\ -1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}2\\ -10\\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Eine Lösung $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ existiert nur wenn

$$\begin{vmatrix}5 & 3 & 2\\ \alpha & 4 & -10\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= 5(16-10) - \alpha(12+2) + 2(-30-8)\\ &= 30 - 14\alpha - 76 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\alpha = -\frac{23}{7}}}$$

Weitere Möglichkeit:

Ansatz: $\underline{A} = \lambda_1\underline{B} + \lambda_2\underline{C}$ Problem: Falls $\underline{B} \parallel \underline{C}$ führt dieser Weg zu Schwierigkeiten