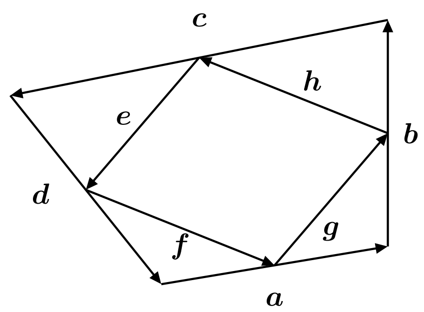
# Aufgabe 1.1

Man zeige mit Hilfe der Vektorrechnung, dass die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Lösung:




Zu zeigen:

$$\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{g} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{e} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{h} = -\boldsymbol{f} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{h} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

Zu Gleichung (1):

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}\boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{d} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} \tag{4}$$

Gleichungen (3) und (4) in (1) einsetzen:

$$\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g} = \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})}_{\substack{= \boldsymbol{0}, \text{ da geschlossene} \\ \text{Vektorkette}}} = \boldsymbol{0}$$

Zu Gleichung (2):

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{2}\boldsymbol{d} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} \tag{6}$$

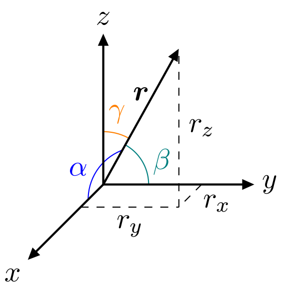
Gleichungen (5) und (6) in (2) einsetzen:

$$\boldsymbol{h} + \boldsymbol{f} = \frac{1}{2} \underbrace{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})}_{\substack{= \boldsymbol{0}, \text{ da geschlossene} \\ \text{Vektorkette}}} = \boldsymbol{0}$$

# Aufgabe 1.5:

Der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ hat die Länge $|\boldsymbol{r}| = 5\,cm$. Man zerlege ihn in drei aufeinander senkrechte Komponenten $\boldsymbol{r}_x$, $\boldsymbol{r}_y$ und $\boldsymbol{r}_z$ sodass sich deren Länge wie $1 : 2 : 3$ verhalten. Wie groß sind die Längen von $\boldsymbol{r}_x$, $\boldsymbol{r}_y$ und $\boldsymbol{r}_z$ und welche Winkel bilden sie mit $\boldsymbol{r}$?

<u>Lösung:</u>




Gesucht:

a) $r_x$, $r_y$ und $r_z$

b) Winkel von $\boldsymbol{r}_x$, $\boldsymbol{r}_y$ und $\boldsymbol{r}_z$ mit $\boldsymbol{r}$

*Zu a):*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_x + \boldsymbol{r}_y + \boldsymbol{r}_z = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Es folgt für $r_y = 2r_x$ und $r_z = 3r_x$

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{r_x^2 + 4r_x^2 + 9r_x^2} = r_x\sqrt{14} \stackrel{!}{=} 5\,\mathrm{cm},$$

und somit

$$r_x = \frac{5}{\sqrt{14}}\mathrm{cm}, \qquad r_y = 2r_x = \frac{10}{\sqrt{14}}\mathrm{cm} \qquad \text{und} \qquad r_z = 3r_x = \frac{15}{\sqrt{14}}\mathrm{cm}.$$

*Zu b):*

Mit dem Skalarprodukt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a\,b \cos\alpha$ folgt für den gegebenen Fall

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}}{r_x\,r} = \frac{\begin{bmatrix} r_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}}{r_x\,r} = \frac{r_x^2}{r_x\,r} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

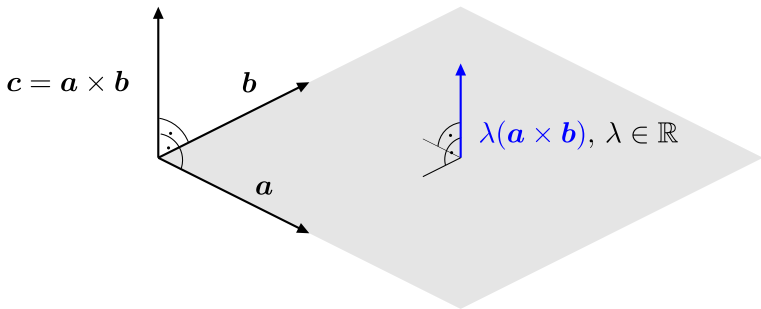
Somit ergeben sich die Winkel

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74.5°, \quad \beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 57.7° \quad \text{und} \quad \gamma = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 36.7°.$$

# Aufgabe 1.7:

Die beiden Vektoren $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}2 & 2 & 5\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ sollen von dem Anfangspunkt $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ ausgehen und spannen somit eine Ebene auf. Man berechne die Vektoren, die auf dieser senkrecht stehen und denselben Betrag wie der Vektor $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ haben.

Lösung:




Ein senkrechter Vektor folgt aus dem Kreuzprodukt

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

Der Betrag der gesuchten Vektoren beträgt

$$\left|\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right| = \sqrt{3}.$$

Für die gesuchten Vektoren $\boldsymbol{x}$ muss somit

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}| = |\lambda \boldsymbol{c}| &\overset{!}{=} \sqrt{3} \\ &= |\lambda|\sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = |\lambda|\sqrt{21} \end{aligned}$$

gelten. Es ergibt sich $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$ und die gesuchten Vektoren lauten

$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

# Aufgabe 1.8:

Man zeige, dass

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

ist.

Lösung:

*1. Weg:*

Koordinatenweise ausrechnen mit $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^\mathsf{T}, \ldots$

$\Rightarrow$ aufwendig und fehleranfällig

*2. Weg:*

Mit der Determinantenformel

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

Eigenschaften der Determinante: Durch das Vertauschen von zwei Zeilen ändert sich nur das Vorzeichen. Es folgt somit

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$$

*3. Weg:*

Mit dem Distributivgesetz erhält man

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \\ &= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \underbrace{\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})}_{=0} - \underbrace{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})}_{=0} - \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \\ &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \\ &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot ((\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})) \\ &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot ((\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})) \\ &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \underbrace{((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c})}_{\substack{\text{Vektor der} \\ \text{senkrecht auf} \\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \text{ steht}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ kann analog vorgegangen werden.

## Aufgabe 1.9

In einem kartesischen Koordinatensystem seien drei Vektoren gegeben: $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{e}_x + \alpha\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$ und $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{e}_x - 10\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z$. Wie groß muss die Koordinate $a_y = \alpha$ gewählt werden, damit die drei Vektoren komplanar sind?

Lösung:

Die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ heißen komplanar wenn es reelle Zahlen $x$, $y$ und $z$ gibt mit $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ und $x$, $y$ und $z$ nicht gleichzeitig 0 sind. Es muss also $\alpha$ so bestimmt werden, dass für

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

eine Lösung $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ existiert. Es folgt

$$x\begin{bmatrix}5\\\alpha\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}2\\-10\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Eine Lösung $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ existiert nur wenn

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}5 & 3 & 2\\ \alpha & 4 & -10\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix} &\overset{!}{=} 0\\ 5(16-10) - \alpha(12+2) + 2(-30-8) &= 0\\ \Leftrightarrow \quad 30 - 14\alpha - 76 &= 0,\end{aligned}$$

womit sich

$$\alpha = -\frac{23}{7}$$

ergibt.

*Weitere Möglichkeiten:*

a) Berechne den senkrechten Vektor auf der durch $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ aufgespannten Ebene $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$. Für Komplanarität muss nun der verbleibende Vektor $\boldsymbol{a}$ senkrecht zum Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ stehen und somit $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ gelten. Die Berechnung entspricht dem Spatprodukt $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ der drei Vektoren und ist somit äquivalent zur obigen Lösung. Aus der Anschauung ist klar, dass auch jedes andere Spatprodukt der drei Vektoren (zum Beispiel $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = 0$ oder $\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$) genuzt werden kann.

b) Mit dem Ansatz $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{b} + \lambda_2\boldsymbol{c}$.
Problem: Falls $\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{c}$ (parallel), führt dieser Weg zu Schwierigkeiten.