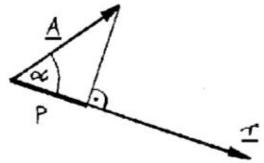
Aufgabe 1.3: Ein Vektor $\underline{A}$ wird auf den Vektor $\underline{r} = \underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z$ projiziert. Wie lang ist die Projektion p?

Lösung:



Die Projektion p des Vektors $\underline{A}$ auf $\underline{r}$ ist gegeben durch

$$p = A \cdot \cos\alpha$$

(siehe Skizze) .

Andererseits gilt für das Skalarprodukt der Vektoren $\underline{A}$ und $\underline{r}$

$$\underline{A}\,\underline{r} = A \cdot r \cdot \cos\alpha \ .$$

Durch Vergleich ergibt sich unmittelbar

$$p = \frac{\underline{A}\,\underline{r}}{r} \ .$$

Mit $\underline{A} = A_x\underline{e}_x + A_y\underline{e}_y + A_z\underline{e}_z = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$,

$$\underline{r} = \underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad r = |\underline{r}| = \sqrt{3}$$

erhält man also

$$\underline{\underline{p = \frac{A_x + A_y + A_z}{\sqrt{3}}}}$$

Aufgabe 1.6: Gegeben seien die Vektoren $\underline{A} = (3,6,2)$, $\underline{B} = (1,2,-1)$, $\underline{C} = (0,0,2)$. Wie groß muß man den skalaren Faktor λ wählen, wenn $\underline{A} + \lambda\underline{B}$ und $\underline{C}$ den Winkel $\alpha = 60^0$ einschließen sollen?

Lösung:

Nach Definition des Skalarprodukts gilt:

$$(\underline{A} + \lambda\underline{B})\,\underline{C} = |(\underline{A} + \lambda\underline{B})|\,|\underline{C}|\cos\alpha$$

Also einerseits

$$(\underline{A} + \lambda\underline{B})\,\underline{C} = (3+\lambda,\ 6+2\lambda,\ 2-\lambda)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2(2-\lambda) .$$

Andererseits mit $\alpha = 60^\circ$:

$$|(\underline{A} + \lambda\underline{B})|\,|\underline{C}|\cos 60^\circ = \sqrt{(3+\lambda)^2 + (6+2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2}\cdot\sqrt{2^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{(3+\lambda)^2 + 4(3+\lambda)^2 + (2-\lambda)^2} .$$

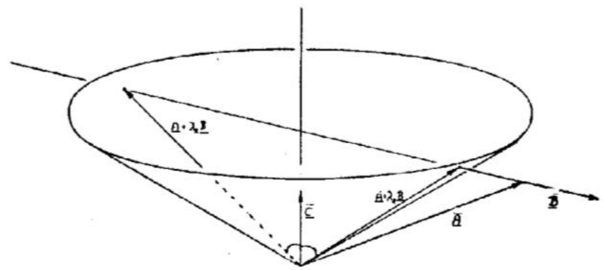
Beide Seiten gleichgesetzt und quadriert ergibt

$$4(2-\lambda)^2 = 5(3+\lambda)^2 + (2-\lambda)^2$$

$$2\lambda^2 + 42\lambda + 33 = 0$$

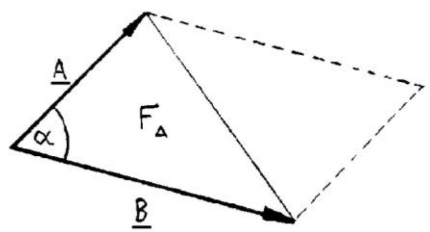
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}\left(-42 \pm \sqrt{1500}\right) = -10{,}5 \pm 9{,}68$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -0{,}82 \\ \lambda_2 &= -20{,}18 \end{aligned}}$$



Aufgabe 1.10: Ein Dreieck im Raum werde durch die Ortsvektoren $\underline{A} = (3,5,2)$ und $\underline{B} = (7,1,4)$ aufgespannt. Man berechne mit Hilfe der Vektorrechnung seine Fläche.

Lösung:



1. Möglichkeit: Der Betrag des Vektorproduktes $\underline{A} \times \underline{B}$ ist gleich der Fläche des skizzierten Parallelogramms, also

$$F_\Delta = \frac{1}{2} |\underline{A} \times \underline{B}|$$

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 3 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18\underline{e}_x + 2\underline{e}_y - 32\underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{F_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{18^2 + 2^2 + 32^2} \approx 18{,}4}}$$

2. Möglichkeit:

$$F_\Delta = \frac{1}{2} |\underline{A}||\underline{B}| \sin\alpha = \frac{1}{2} |\underline{A}||\underline{B}| \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\underline{A}|^2|\underline{B}|^2 - (|\underline{A}||\underline{B}|\cos\alpha)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\underline{A}|^2|\underline{B}|^2 - (\underline{A} \cdot \underline{B})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{38 \cdot 66 - (7 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 2)^2}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2}\sqrt{1352} \approx 18{,}4}}$$

Aufgabe 1.11: Man zeige, daß der Entwicklungssatz $(\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C} = (\underline{C}\underline{A})\underline{B} - (\underline{C}\underline{B})\underline{A}$ für die speziellen Vektoren $\underline{A} = (1,2,-1)$, $\underline{B} = (2,-1,3)$, $\underline{C} = (1,1,1)$ gilt.

Lösung:

Es ist

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 5 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}}},$$

andererseits

$$\underline{C} \cdot \underline{A} = 2 \quad \leadsto \quad (\underline{C} \cdot \underline{A})\underline{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

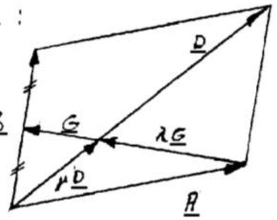
$$\underline{C} \cdot \underline{B} = 4 \quad \leadsto \quad (\underline{C} \cdot \underline{B})\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix},$$

also

$$(\underline{C} \cdot \underline{A})\underline{B} - (\underline{C} \cdot \underline{B})\underline{A} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}}}.$$

Aufgabe 1.2: In welchem Verhältnis wird die Diagonale eines Parallelogramms von einer Geraden geteilt, die durch eine Seitenmitte und einen Eckpunkt geht?

Lösung:



Das Parallelogramm wird von $\underline{A}$ und $\underline{B}$ aufgespannt. Für die Vektoren auf der Diagonalen und der Geraden gilt:

$$\underline{D} = \underline{A} + \underline{B} \quad , \quad \underline{G} = -\underline{A} + \tfrac{1}{2}\underline{B} \qquad (1)$$

Das gesuchte Verhältnis ist $\dfrac{|\mu \underline{D}|}{|\underline{D}|} = \mu$, wenn μ und λ so eingerichtet werden, daß

$$\underline{A} + \lambda \underline{G} = \mu \underline{D} \quad \text{ist.} \qquad (2)$$

Mit (1) wird dies:

$$\underline{A} + \lambda\left(-\underline{A} + \tfrac{1}{2}\underline{B}\right) = \mu\left(\underline{A} + \underline{B}\right)$$

$$(1 - \lambda - \mu)\,\underline{A} + \left(\tfrac{1}{2}\lambda - \mu\right)\underline{B} = \underline{0}$$

Da $\underline{A}$, $\underline{B}$ linear unabhängig sind, muß

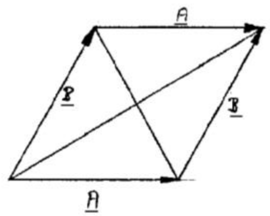
$$1 - \lambda - \mu = 0 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\lambda - \mu = 0 \quad \text{sein,}$$

also $\underline{\lambda = \tfrac{2}{3}}$, $\boxed{\mu = \tfrac{1}{3}}$

Aufgabe 1.4: Man beweise mit Hilfe der Vektorrechnung, daß die Diagonalen einer Raute aufeinander senkrecht stehen.

Lösung:

Die Raute ist ein Parallelogramm mit vier gleichen Seiten,



das durch die Vektoren $\underline{A}$ und $\underline{B}$ aufgespannt werden möge ($A = B$).

Dann sind die Diagonalen

$$\underline{A} + \underline{B} \quad \text{und} \quad \underline{A} - \underline{B} \;.$$

Sie stehen aufeinander senkrecht genau dann, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$(\underline{A} + \underline{B})(\underline{A} - \underline{B}) = A^2 + \underline{B}\,\underline{A} - \underline{A}\,\underline{B} - B^2$$
$$= A^2 - B^2$$
$$= 0 \quad \text{wegen} \quad A = B.$$