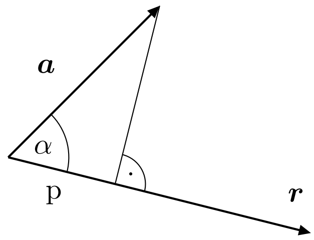
# Aufgabe 1.3

Ein Vektor $\boldsymbol{a}$ wird auf den Vektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$ projiziert. Wie lang ist die Projektion $p$?

Lösung:




Die Projektion $p$ des Vektors $\boldsymbol{a}$ auf $\boldsymbol{r}$ ist gegeben durch (siehe Skizze)

$$p = a\cos(\alpha)\,.$$

Andererseits gilt für das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} = a\,r\,\cos(\alpha)\,.$$

Durch Vergleich ergibt sich unmittelbar

$$p = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\,.$$

Mit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix},\\
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{und}\\
r &= |\boldsymbol{r}| = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

erhält man also

$$p = \frac{a_x + a_y + a_z}{\sqrt{3}}\,.$$

Alternativ: Ausgehend von der Projektionsformel

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{r}$$

wird der Betrag gebildet

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}\,|\boldsymbol{r}| \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\,.$$

## Aufgabe 1.6:

Gegeben seien die Vektoren $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}3 & 6 & 2\end{bmatrix}^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ und $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 2\end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Wie groß muss man den skalaren Faktor $\lambda$ wählen, wenn $\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ den Winkel $\alpha = 60°$ einschließen sollen?

Lösung:

Nach Definition des Skalarprodukts gilt

$$(\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |(\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b})|\,|\boldsymbol{c}| \cos\alpha,$$

also einerseits

$$(\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}3+\lambda \\ 6+2\lambda \\ 2-\lambda\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 2\end{bmatrix} = 2(2-\lambda)$$

und andererseits mit $\alpha = 60°$

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b})|\,|\boldsymbol{c}| \cos\alpha &= \sqrt{(3+\lambda)^2 + (6+2\lambda)^2 + (2-\lambda)^2}\sqrt{2^2}\frac{1}{2} \\ &= \sqrt{(3+\lambda)^2 + 4(3+\lambda)^2 + (2-\lambda)^2}. \end{aligned}$$

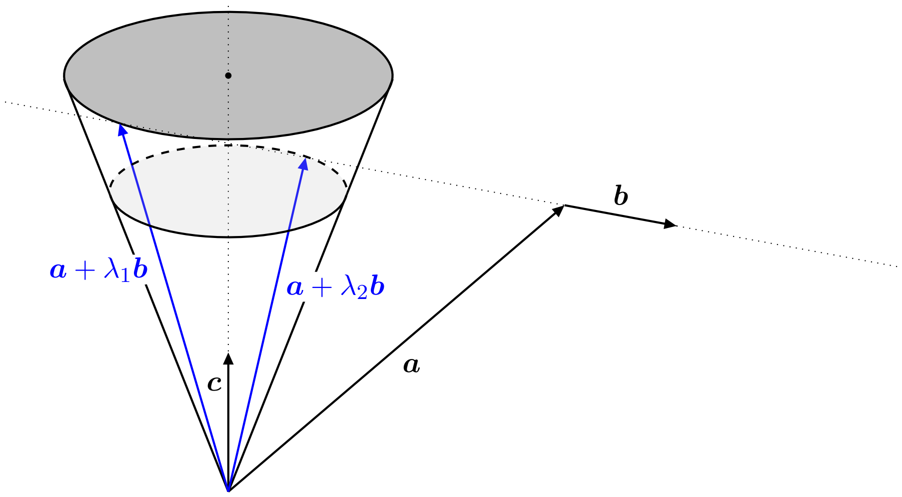
Beide Seiten gleichgesetzt und quadriert ergibt

$$\begin{aligned} 4(2-\lambda)^2 &= 5(3+\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 \\ 0 &= 2\lambda^2 + 42\lambda + 33 \end{aligned}$$

und somit

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(-42 \pm \sqrt{1500}) = -10,5 \pm 9,68$$

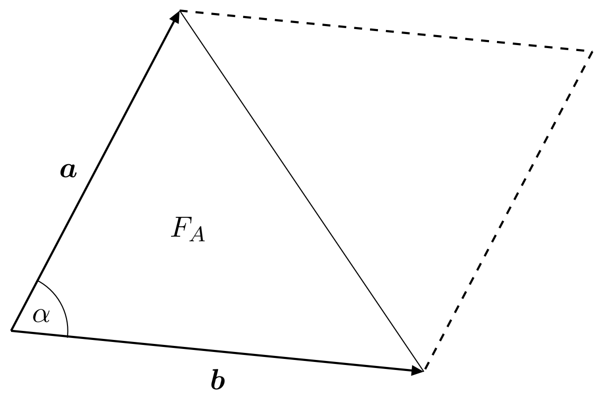
$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \lambda_1 &= -0.82 \\ \Rightarrow \qquad \lambda_2 &= -20.18 \end{aligned}$$



## Aufgabe 1.10:

Ein Dreieck im Raum werde durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ aufgespannt. Man berechne mit Hilfe der Vektorrechnung seine Fläche.

Lösung:




1. Möglichkeit:

Der Betrag des Vektorproduktes $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ist gleich der Fläche des skizzierten Parallelogramms, also $F_A = \frac{1}{2} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$, wobei

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 18\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 32\boldsymbol{e}_z.$$

Somit folgt $F_A = \frac{1}{2} \sqrt{18^2 + 2^2 + 32^2} \approx 18.4$

2. Möglichkeit:

Aus der Formel für die Fläche eines Parallelogramms (Grundseite mal Höhe) ergibt sich im vorliegenden Fall für das Dreieck

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{1}{2} |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2} ab \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - (ab\cos\alpha)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2} \\ &= \sqrt{38 \cdot 66 - (21 + 5 + 8)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1352} \approx 18.4 \end{aligned}$$

# Aufgabe 1.11:

Man zeige, dass der Entwicklungssatz $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{a}$ für die speziellen Vektoren $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ und $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ gilt.

Lösung:

Es gilt

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

und andererseits

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = 4 \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix},$$

also

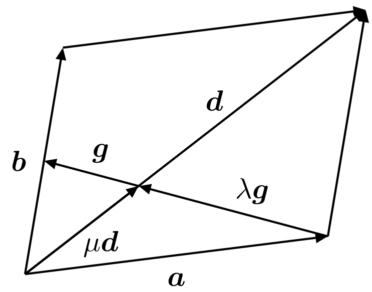
$$(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

# Aufgabe 1.2

In welchem Verhältnis wird die Diagonale eines Parallelogramms von einer Geraden geteilt, die durch eine Seitenmitte und einen Eckpunkt geht?

Lösung:

Das Parallelogramm wird von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt. Für die Vektoren auf der Diagonalen und der Geraden gilt.




$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{g} = -\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} \tag{1}$$

Das gesuchte Verhältnis ist $\frac{|\mu\boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{d}|} = \mu$, wenn $\mu$ und $\lambda$ so eingerichtet werden, dass

$$\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{g} = \mu\boldsymbol{d} \tag{2}$$

ist. Mit (1) wird dies zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \lambda(-\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}) &= \mu(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ (1 - \lambda - \mu)\boldsymbol{a} + (\frac{1}{2}\lambda - \mu)\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ linear unabhängig sind, muss $1 - \lambda - \mu = 0$ und $\frac{1}{2}\lambda - \mu = 0$ sein, also

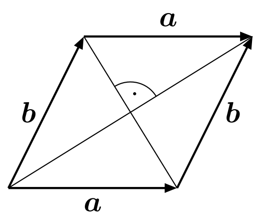
$$\lambda = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{1}{3}.$$

# Aufgabe 1.4

Man beweise mit Hilfe der Vektorrechnung, dass die Diagonalen einer Raute aufeinander senkrecht stehen.

Lösung:

Die Raute ist ein Parallelogramm mit vier gleichen Seiten, das durch die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt werden möge ($|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$).




Dann sind die Diagonalen

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\,.$$

Sie stehen aufeinander senkrecht genau dann, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= a^2 + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \\ &\overset{a=b}{=} 0\end{aligned}$$