22. Februar 2021

Bachelorprüfung in Technische Mechanik I

Nachname, Vorname	
MUSTERLOESUNG	
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

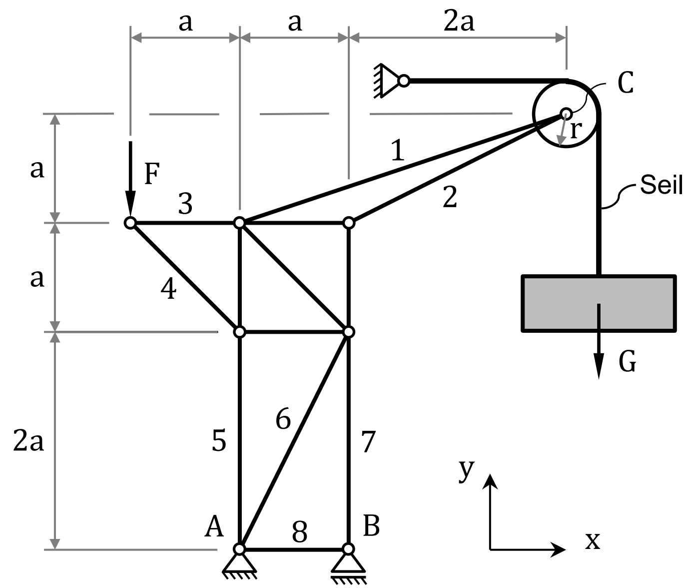
1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 8 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Der dargestellte ebene Kran im Hamburger Hafen ist kinematisch bestimmt und in den Punkten A und B gelagert. Auf ihn wirkt die Kraft F. Im Punkt C ist eine masselose Rolle (Radius r) reibungsfrei drehbar gelagert, über die ein Seil geschlungen ist. Das Seil ist an einem Ende in der Wand verankert. An dem anderen Ende des Seils hängt ein Container mit der Gewichtskraft G.



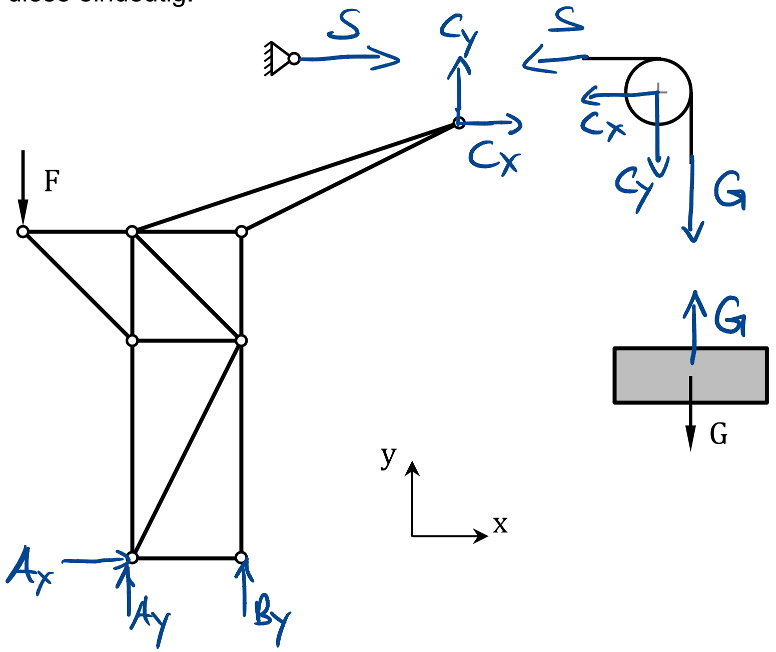
a) Geben Sie die Anzahl k der Knoten, die Anzahl s der Stäbe und die Summe q_a der äußeren Lagerwertigkeiten des Fachwerks an.

$k =$ 8, $s =$ 13, $q_a =$ 3

b) Ist die notwendige Bedingung für innerliche und äußerliche statische Bestimmtheit erfüllt?

☒ ja ☐ nein

c) Ergänzen Sie nachfolgendes Freikörperbild um alle Schnittkräfte. Benennen Sie diese eindeutig.



d) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für die Rolle auf.

$-G - C_y = 0$

$-S - C_x = 0$

$-Gr + Sr = 0$

e) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Kran auf.

$A_x + C_x = 0$

$A_y + B_y + C_y - F = 0$

$B_y a + Fa + 3C_y a - 4C_x a = 0$

f) Bestimmen Sie die Kraft auf den Kran im Knoten C im gegebenen Koordinatensystem.

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} -G \\ -G \end{bmatrix}$$

g) Bestimmen Sie die Lagerkräfte in den Punkten A und B die auf den Kran wirken. Geben Sie die Kräfte im gegebenen Koordinatensystem an.

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} G \\ 2(F+G) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -F-G \end{bmatrix}$$

h) Schneiden Sie den Knoten C frei und benennen Sie eingeführte Kräfte eindeutig.

i) Klassifizieren Sie die folgenden Stäbe für $F > 0$ und $G > 0$. Kreuzen Sie Zutreffendes an.

	Zugstab	Nullstab	Druckstab
Stab 3	☒	☐	☐
Stab 5	☐	☐	☒
Stab 6	☐	☐	☒
Stab 8	☐	☒	☐

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Gegeben sind die Kraftvektoren $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_C$ sowie deren zugehörige Ortsvektoren $\mathbf{r}_{OA}$, $\mathbf{r}_{OB}$, $\mathbf{r}_{OC}$.

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{r}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{r}_{OC} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Berechnen Sie die folgenden Vektoren.

$$\mathbf{r}_{CA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{CB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Momente.

$$\mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie den resultierenden Kraftwinder $\left(\mathbf{F}, \mathbf{M}^{(C)}\right)$ bezüglich des Punktes C.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}^{(C)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

d) Geben Sie eine Kraft $\mathbf{F}_D$ und einen Vektor $\mathbf{r}_{DC}$ vom Punkt D zum Punkt C so an, dass diese einzelne Kraft dem bisher betrachteten Kräftesystem äquivalent ist.

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{DC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

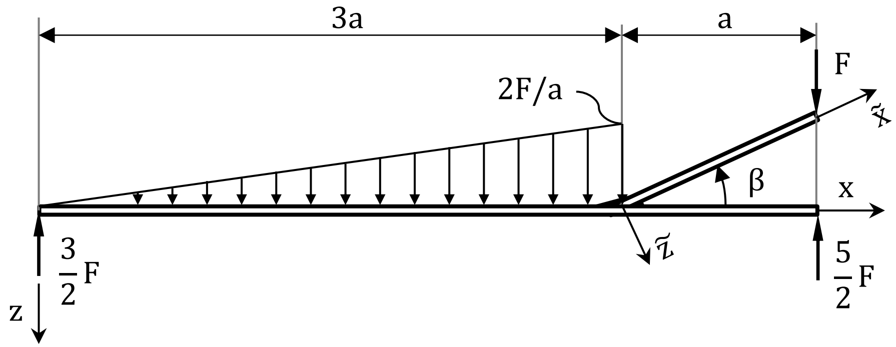
e) Ist der von Ihnen in Aufgabenteil d) ermittelte Vektor $\mathbf{r}_{DC}$ eindeutig bestimmt?

☐ Ja

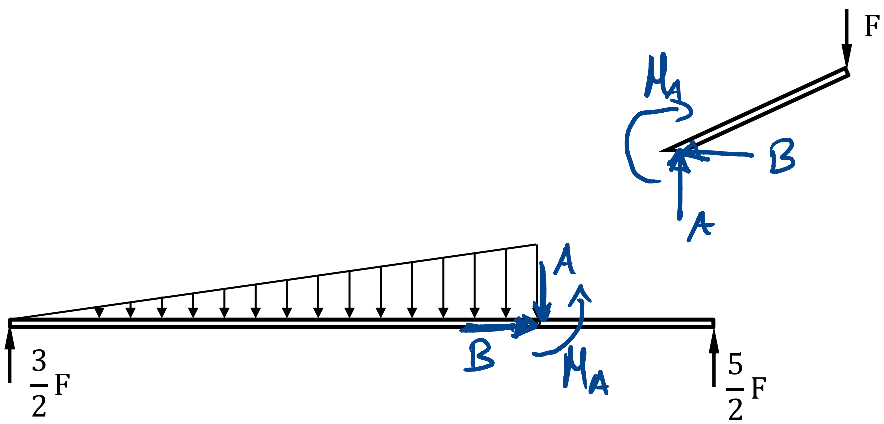
☒ Nein

Aufgabe 3 (18 Punkte)

Der dargestellte schräge Balken ist im Winkel β fest mit dem waagerechten Balken verschweißt. Der waagerechte Balken ist durch eine dreiecksförmige Schneelast im Bereich $0 < x < 3a$ belastet und an seinen Enden wirken die angegebenen Lagerkräfte. Auf das Ende des schrägen Balkens wirkt eine Kraft F. Das ebene System befindet sich im Gleichgewicht. Die Massen aller Balken sind vernachlässigbar.



a) Ergänzen Sie Schnittkräfte und -momente im nachfolgenden Freikörperbild. Benennen Sie diese eindeutig.



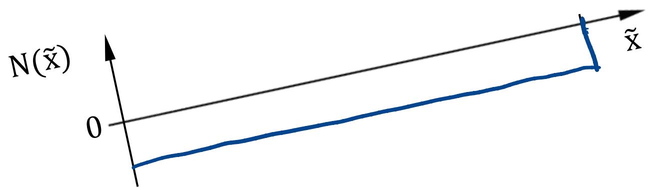
b) Bestimmen Sie durch Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen des schrägen Balkens, die wirkenden Kräfte und Momente in der Schweißnaht. Verwenden Sie hierfür die von Ihnen in Aufgabenteil b) eingeführten Größen.

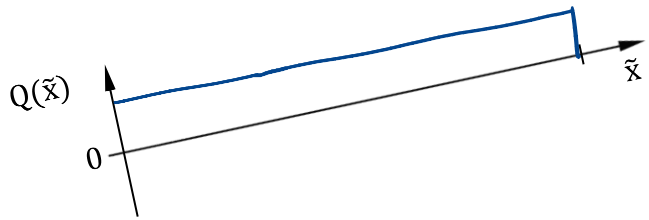
$A = F$

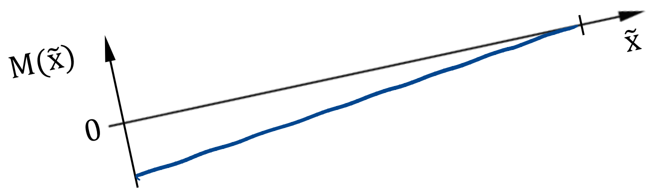
$B = 0$

$M_A = -aF$

c) Skizzieren Sie **qualitativ** den Verlauf von Normalkraft, Querkraft und Biegemoment im schrägen Balken für den Fall $0° < \beta < 90°$.







d) Geben Sie für $0 < x < 4a$ unter Verwendung von Klammerfunktionen (Föppl-Funktionen) den Normalkraftverlauf $N(x)$, die kontinuierliche Belastung $q(x)$, den Querkraftverlauf $Q(x)$ sowie den Momentenverlauf $M(x)$ an.

$N(x) = 0$

$q(x) = \frac{2}{3}\frac{F}{a^2}x - \frac{2}{3}\frac{F}{a^2}\langle x-3a\rangle^1$

$- 2\frac{F}{a}\langle x-3a\rangle^0$

$Q(x) = -\frac{1}{3}\frac{F}{a^2}x^2 + \frac{1}{3}\frac{F}{a^2}\langle x-3a\rangle^2 + 2\frac{F}{a}\langle x-3a\rangle^1$

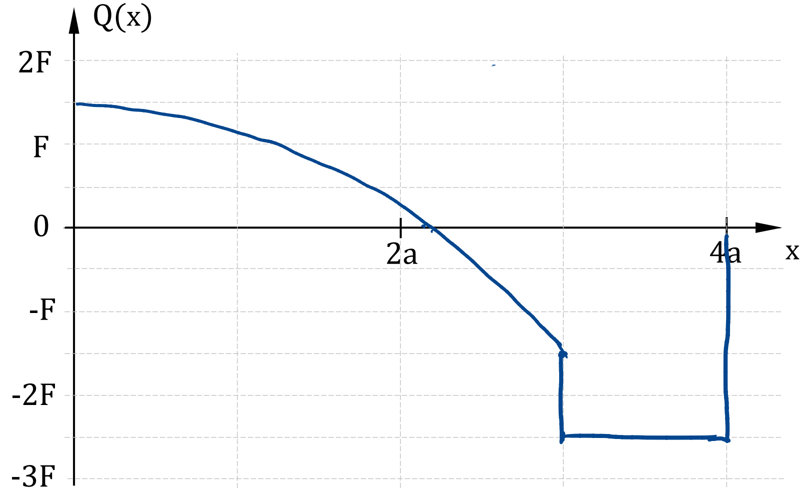
$+\frac{3}{2}F - F\langle x-3a\rangle^0 \left(+ \frac{5}{2}F\langle x-4a\rangle^0\right)$

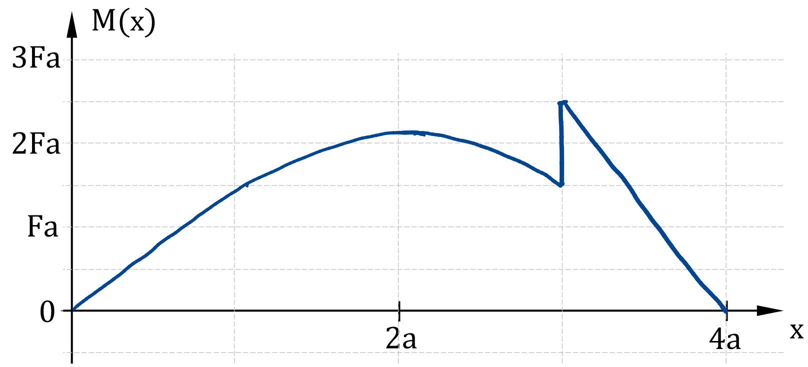
$M(x) = -\frac{1}{9}\frac{F}{a^2}x^3 + \frac{1}{9}\frac{F}{a^2}\langle x-3a\rangle^3 + \frac{F}{a}\langle x-3a\rangle^2$

$+\frac{3}{2}Fx - F\langle x-3a\rangle^1 + Fa\langle x-3a\rangle^0$

$\left(+\frac{5}{2}F\langle x-4a\rangle^1\right)$

e) Zeichnen Sie die Verläufe von Querkraft $Q(x)$ und Biegemoment $M(x)$ im Bereich $0 < x < 4a$.



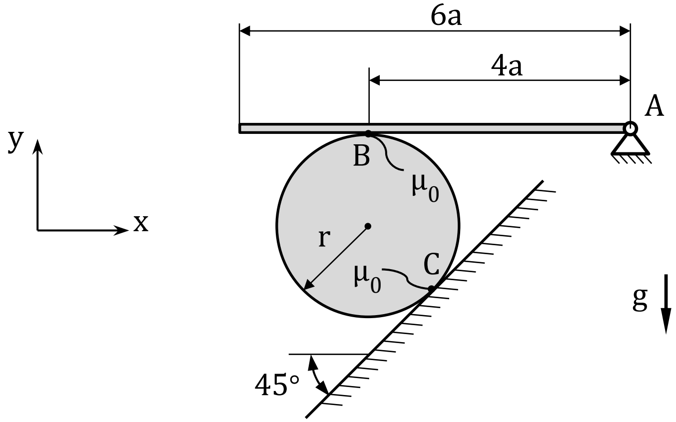


f) In welchem Bereich ist das maximale Biegemoment zu erwarten?

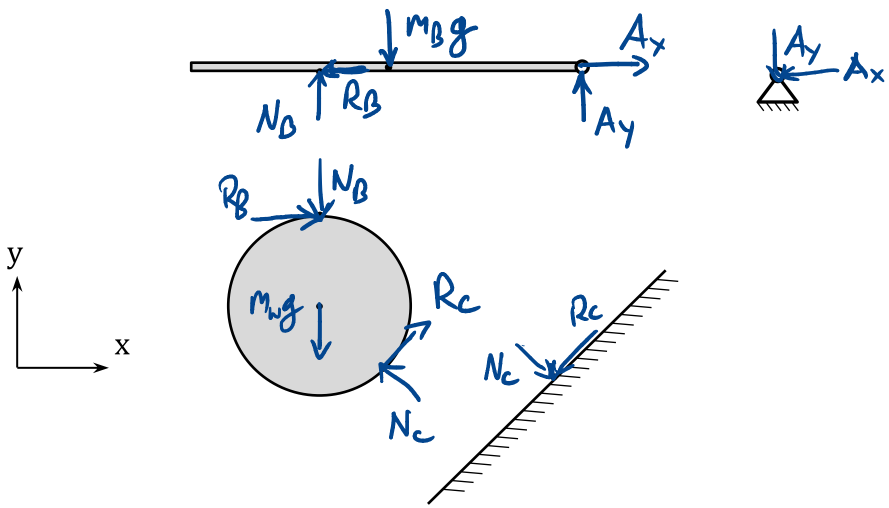
☐ $0 < x < \frac{4}{3}a$ ☐ $\frac{4}{3}a < x < 2\frac{4}{3}a$ ☒ $2\frac{4}{3}a < x < 4a$

Aufgabe 4 (18 Punkte)

Ein homogener dünner Balken (Masse m_B, Länge $6a$) ist in Punkt A drehbar gelagert und liegt im Punkt B auf einer Walze (Masse m_W, Radius r) auf. Die Walze berührt im Punkt C eine schiefe Ebene (Neigungswinkel $45°$). Sämtliche Kontakte (Balken/Walze und Walze/Ebene) sind reibungsbehaftet (jeweils Haftreibungskoeffizient μ_0). Das System befindet sich im Gleichgewicht.



a) Ergänzen Sie den Freischnitt des Systems. Benennen Sie eingeführte Größen eindeutig. Stellen Sie zudem die Kräfte- und Momentengleichgewichte für Balken und Walze auf.



Balken:

$$-4aN_B + 3a m_B g = 0$$

$$N_B - m_B g + A_y = 0$$

$$-R_B + A_x = 0$$

Walze:

$$-R_B r + R_C r = 0$$

$$R_B + \frac{\sqrt{2}}{2} R_C - \frac{\sqrt{2}}{2} N_C = 0$$

$$-N_B - m_W g + \frac{\sqrt{2}}{2} N_C + \frac{\sqrt{2}}{2} R_C = 0$$

b) Ermitteln Sie die eingeführten Reaktionskräfte in den Punkten A, B und C.

$$N_B = \frac{3}{4} m_B g \qquad R_B = \frac{g}{1+\sqrt{2}}\left(m_B \frac{3}{4} + m_W\right)$$

$$A_x = \frac{g}{1+\sqrt{2}}\left(m_B \frac{3}{4} + m_W\right) \qquad R_C = \frac{g}{1+\sqrt{2}}\left(m_B \frac{3}{4} + m_W\right)$$

$$N_C = g\left(m_B \frac{3}{4} + m_W\right) \qquad A_y = \frac{1}{4} m_B g$$

c) Welche allgemeine Bedingung muss an den Punkten B und C jeweils gelten, damit das System in Ruhe bleibt? Nutzen Sie die von Ihnen in Aufgabenteil a) eingeführten Größen.

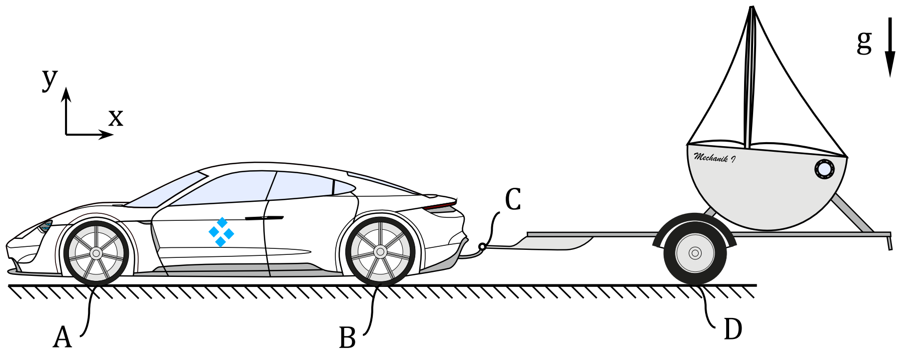
$$|R_B| \leq \mu_0 |N_B| \qquad |R_C| \leq \mu_0 |N_C|$$

d) Wie groß muss μ_0 sein, damit das System im Gleichgewicht bleibt?

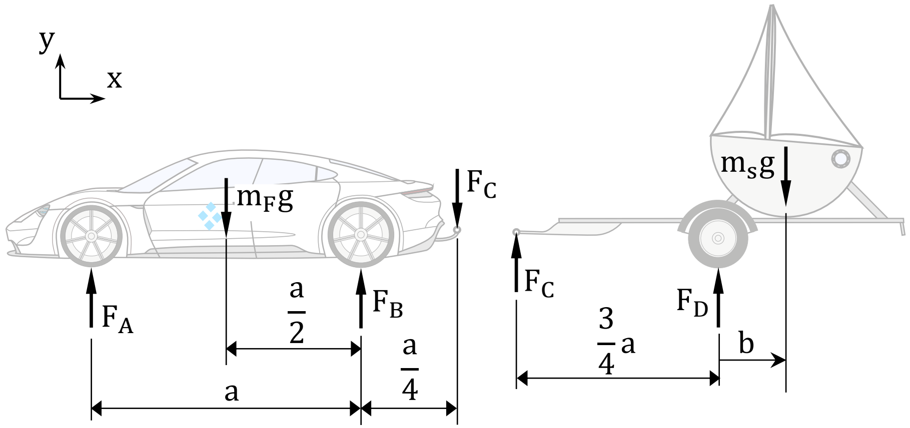
$$\mu_0 \geq \frac{1}{1+\sqrt{2}}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{m_W}{m_B}\right)$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Michael H. fährt sein Segelboot (Masse m_S) von Stuttgart in Richtung Nordsee. Das Segelboot befindet sich auf einem Anhänger mit vernachlässigbarer Masse. Der Anhänger ist über ein Gelenk am Zugfahrzeug (Masse m_F) im Punkt C befestigt. Auf der Fahrt legt er eine Pause ein, um das Boot neu auf dem Anhänger zu positionieren. Die Reifen von Fahrzeug und Anhänger berühren die ebene Straße jeweils an den Punkten A, B und D. Das System kann als eben und sämtliche Fahrzeugteile als starr betrachtet werden.



Gegeben ist zudem der folgende Freischnitt vom Zugfahrzeug sowie vom Anhänger mit Boot. Der variable vorzeichenbehaftete Abstand von Punkt D zum Schwerpunkt des Segelbootes entlang der x-Richtung gemessen, ist durch b beschrieben. Im Freischnitt ist die Situation für einen positiven Wert von b abgebildet.



a) Geben Sie das Momentengleichgewicht von Anhänger mit Boot bezüglich des Punktes D an.

$$-\frac{3}{4} a F_C - m_S g b = 0$$

b) Berechnen Sie die Reaktionskraft in y-Richtung im Punkt C zwischen Anhänger und Fahrzeug.

$F_C = -m_S g \frac{4}{3} \frac{b}{a}$

c) Stellen Sie für das Fahrzeug das Momentengleichgewicht bezüglich des Punktes B, sowie das Kräftegleichgewicht in y-Richtung auf.

$$-\frac{a}{4} F_C + \frac{a}{2} m_F g - F_A a = 0$$

$$F_A - m_F g + F_B - F_C = 0$$

d) Bestimmen Sie die Reaktionskräfte zwischen Fahrzeug und Boden in den Punkten A und B.

$F_A = g\left(\frac{m_F}{2} + \frac{1}{3}\frac{m_S b}{a}\right)$

$F_B = g\left(\frac{m_F}{2} - \frac{5}{3}\frac{m_S b}{a}\right)$

e) In welchem Bereich muss sich der Abstand b in Abhängigkeit von m_S, m_F und a bewegen, damit keiner der Reifen des Fahrzeugs den Bodenkontakt verliert?

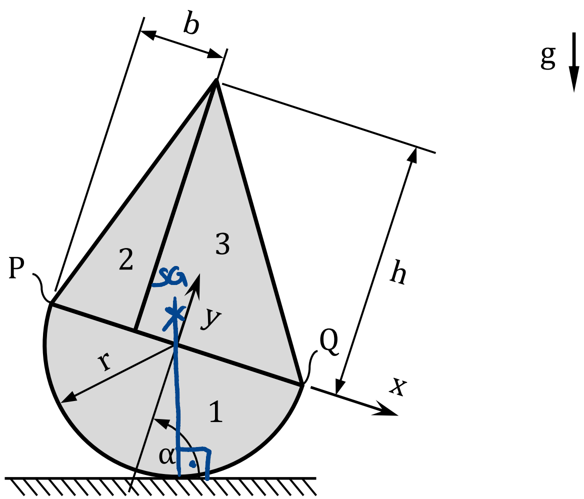
$-\frac{3}{2}\frac{m_F}{m_S} a \leq b \leq \frac{3}{10}\frac{m_F}{m_S} a$

f) Das Boot darf nun beliebig auf der begrenzten Ladefläche des Anhängers mit $-\frac{a}{2} \leq b \leq \frac{a}{5}$ platziert werden. Wie schwer darf das Boot in Abhängigkeit von m_F maximal sein, damit weiterhin keiner der Reifen des Fahrzeugs den Bodenkontakt verliert?

$m_S \leq \frac{3}{2} m_F$

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Leichtmatrose Michael H. wurde von der Ebbe überrascht und ist kurz vor der Insel Spiekeroog auf Grund gelaufen. Sein Segelboot gerät dabei in Schräglage um den Winkel α. Die beiden dreieckigen Segel (2, 3) haben jeweils die Höhe h. Das vordere Segel (2) hat die Breite b. Der Rumpf des Schiffes kann vereinfachend als Halbkreisfläche (1) (Radius r) betrachtet werden. Insgesamt besteht das Segelboot aus 3 Teilflächen.



a) Bestimmen Sie die aus den 3 Teilflächen zusammengesetzte Gesamtfläche.

$A_G =$ $\frac{\pi r^2}{2} + rh$

b) Geben Sie die x-Koordinaten sowie die y-Koordinaten der Flächenschwerpunkte der Teilflächen im gegebenen Koordinatensystem an.

$x_{S1} =$ 0, $y_{S1} =$ $-\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$,

$x_{S2} =$ $\frac{2}{3}b - r$, $y_{S2} =$ $\frac{h}{3}$,

$x_{S3} =$ $\frac{2}{3}b - \frac{r}{3}$, $y_{S3} =$ $\frac{h}{3}$

c) Wie lautet die Formel zur Berechnung der y-Koordinate y_{SG} des Flächenschwerpunkts der Gesamtfläche in Abhängigkeit der Flächeninhalte der Teilflächen A_1, A_2 und A_3 sowie von A_G, y_{S1}, y_{S2} und y_{S3}?

$y_{SG} =$ $\frac{1}{A_G}\left(A_1 y_{S1} + A_2 y_{S2} + A_3 y_{S3}\right)$

d) Welche Bedingung muss für die Höhe h erfüllt sein, damit für den Gesamt-Flächenschwerpunkt $y_{SG} \geq 0$ gilt?

$h \geq$ $\sqrt{2}\,r$

Die folgenden Fragen können unabhängig von den vorherigen Teilaufgaben beantwortet werden. Im Weiteren werden die Teilflächen als homogene Körper mit identischer Dicke und Dichte betrachtet.

e) Markieren Sie in der Zeichnung für $b < r$ **qualitativ** die Lage des Gesamtschwerpunkts, wenn sich das Boot wie dargestellt im Gleichgewicht befindet.

Nehmen Sie im Folgenden die x-Koordinate x_{SG} und y-Koordinate $y_{SG} > 0$ des Schwerpunktes der Gesamtfläche als gegebene Größen an.

f) Welcher Winkel α stellt sich, unter der Annahme $0° < \alpha < 90°$, im Gleichgewichtszustand ein?

$\alpha =$ $\arctan\left(-\frac{y_{SG}}{x_{SG}}\right)$

g) An welchem der beiden Punkte P oder Q aus der Abbildung müsste ein geeignetes Gegengewicht in Form eines Ankers generell angebracht werden, damit das Boot im Gleichgewicht waagerecht ($\alpha = 90°$) im Watt stünde?

☐ im Punkt P ☒ im Punkt Q

ENDE