20. Februar 2017

Bachelorprüfung in Technische Mechanik I

Nachname, Vorname	
MUSTERLÖSUNG	
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
Σ 68	Fr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben sind die Kraftvektoren $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_C$, sowie deren zugehörige Ortsvektoren $\mathbf{r}_{OA}$, $\mathbf{r}_{OB}$, $\mathbf{r}_{OC}$.

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{r}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{r}_{OC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a) Berechnen Sie die folgenden Momente.

$$\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \; \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \; \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie den resultierenden Kraftwinder $(\mathbf{F}, \mathbf{M}^{(O)})$.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{M}^{(O)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Wie lautet die Transformationsbeziehung für den Kraftwinder bei einem Wechsel des Bezugspunktes von O nach P?

$$(\mathbf{F}, \mathbf{M}^{(P)}) = (\underline{F}, \; \underline{r}_{PO} \times \underline{F} + \underline{M}^{(O)})$$

oder: $\underline{F}$, $-\underline{r}_{OP} \times \underline{F} + \underline{M}^{(O)}$

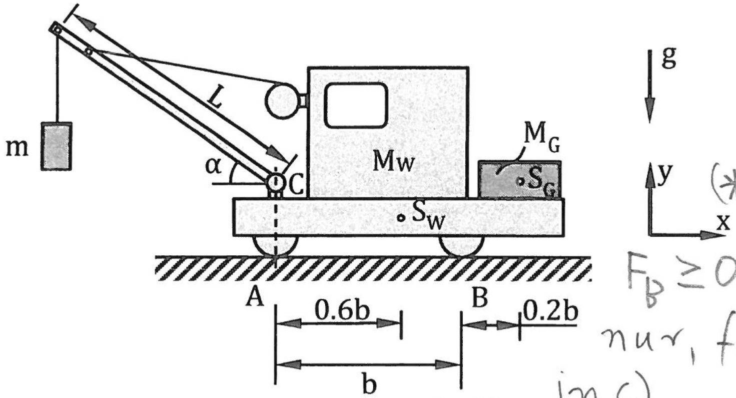
d) Geben Sie einen Ortsvektor $\mathbf{r}_{OP}$ zu einem Punkt P an, bezüglich dessen das Moment zum Nullvektor wird.

$$\mathbf{r}_{OP} = \begin{bmatrix} P_x \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

x-Koordinate beliebig

Aufgabe 2 (8 Punkte)

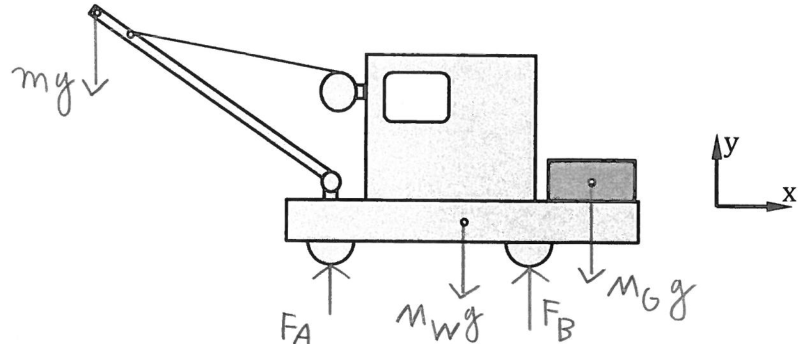
Der dargestellte Schienenkran soll untersucht werden. Er besteht aus dem Wagen (Masse M_W, Schwerpunkt S_W), dem Gegengewicht (Masse M_G, Schwerpunkt S_G) sowie dem Ausleger (masselos, Länge L), der im Punkt C gelenkig gelagert ist. Am Ausleger hängt eine Last der Masse m. Der Wagen steht an den Punkten A und B auf den Schienen auf, ein Rollen oder Gleiten kann ausgeschlossen werden. Das System befindet sich im Gleichgewicht und wird als eben betrachtet.



(*) auch möglich: $F_B \geq 0$, gilt aber nur, falls F_B korrekt in c)

Falls F_A und F_B in andere Richtung zeigen, VZ-Wechsel bei c) und d)

a) Schneiden Sie den Schienenkran frei, zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte in die Skizze ein und benennen Sie diese.



b) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen an.

$\sum F_{y,i} = 0: \; F_A + F_B - M_W g - M_G g - mg = 0$

$\sum M_{z,i}^{(A)}: \; mgL\cos\alpha - M_W g\, 0{,}6b + F_B b - M_G g\, 1{,}2b = 0$

c) Berechnen Sie die Reaktionskräfte in den Punkten A und B.

$F_A = \frac{2}{5} M_W g - \frac{1}{5} M_G g + mg\left(1 + \frac{L}{b}\cos\alpha\right)$

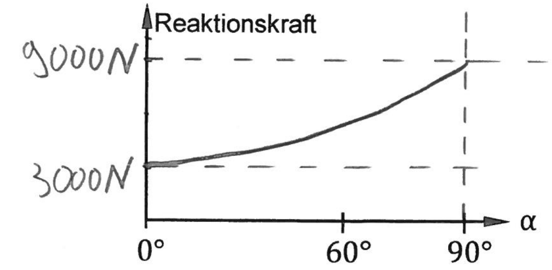
$F_B = \frac{3}{5} M_W g + \frac{6}{5} M_G g - mg\frac{L}{b}\cos\alpha$

d) Was muss gelten, damit der Schienenkran nicht nach links kippt?

$M_G \frac{6}{5} + M_W \frac{3}{5} - m\frac{L}{b}\cos\alpha \geq 0$ oder (*)

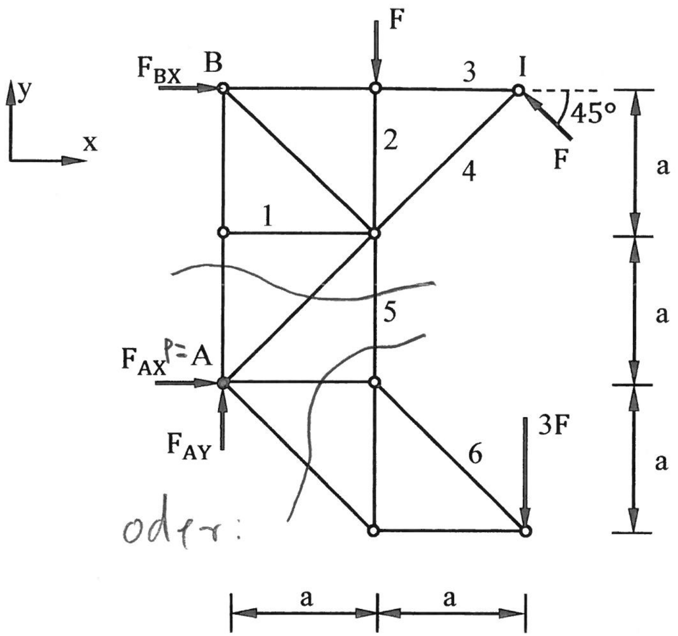
e) Stellen Sie den Betrag der Reaktionskraft im Punkt B in Abhängigkeit des Neigungswinkels α dar. Nutzen Sie die folgenden Zahlenwerte und führen Sie eine geeignete Achsenbeschriftung für die Reaktionskraft ein.

$b = 2\,\mathrm{m}$
$L = 3\,\mathrm{m}$
$m = 400\,\mathrm{kg}$
$M_W = 1000\,\mathrm{kg}$
$M_G = 250\,\mathrm{kg}$
$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$



Aufgabe 3 (16 Punkte)

Das dargestellte, bereits freigeschnittene, ebene Fachwerk ist kinematisch bestimmt und in den Punkten A und B gelagert.



a) Geben Sie die Anzahl der Knoten k, die Anzahl der Stäbe s und die Zahl der unabhängigen Lagerreaktionen q an.

k = 9, s = 15, q = 3

b) Wie lautet die notwendige Bedingung, dass alle Stabkräfte berechnet werden können?

$2k = s + q$

c) Klassifizieren Sie das Fachwerk.

☒ innerlich bestimmt ☒ äußerlich bestimmt

☐ nicht innerlich bestimmt ☐ nicht äußerlich bestimmt

d) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Lagerkräfte an.

$$(A)\quad \sum M_{zi} = 0: -F_{Bx}2a - Fa + 2\sqrt{2}aF - 3F2a = 0$$

$$\sum F_{xi} = 0: F_{Bx} + F_{Ax} - \frac{\sqrt{2}}{2}F = 0$$

$$\sum F_{yi} = 0: F_{Ay} - F + \frac{\sqrt{2}}{2}F - 3F = 0$$

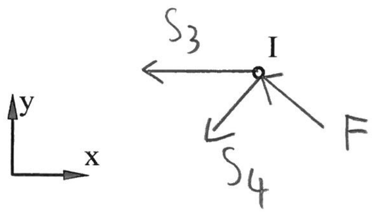
e) Bestimmen Sie die Lagerkräfte.

$F_{AX} = \left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)F$

$F_{AY} = \left(4 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)F$

$F_{BX} = \left(-\frac{7}{2} + \sqrt{2}\right)F$

f) Schneiden Sie Knoten I frei. Tragen Sie alle wirkenden Kräfte ein und benennen Sie diese.



g) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Stabkräfte in Knoten I an.

$$\sum F_{xi} = 0: -S_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_4 - \frac{\sqrt{2}}{2}F = 0$$

$$\sum F_{yi} = 0: \frac{\sqrt{2}}{2}F - \frac{\sqrt{2}}{2}S_4 = 0$$

h) Zeichnen Sie einen geeigneten Ritter-Schnitt zur Ermittlung der Stabkraft S_5 sowie den zugehörigen Momentenbezugspunkt P in die obige Skizze ein.

i) Geben Sie die Stabkraft S_5 an.

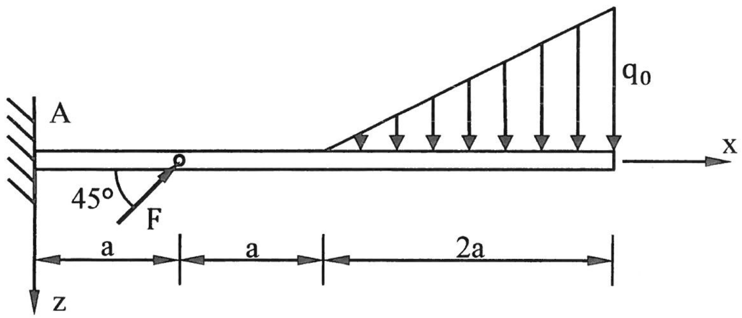
$S_5 =$ $6F$

j) Klassifizieren Sie die folgenden Stäbe für $F > 0$.

	Stab 1	Stab 2	Stab 5	Stab 6
Zugstab			×	×
Nullstab	×			
Druckstab		×		

Aufgabe 4 (16 Punkte)

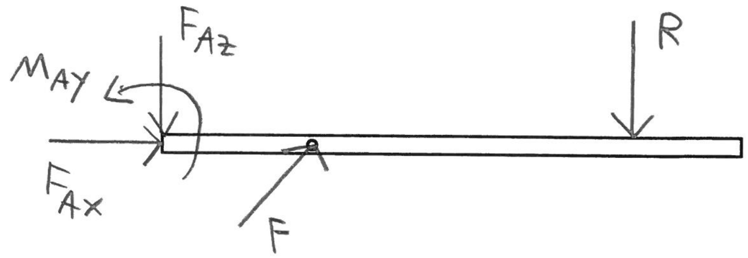
Ein masseloser Balken (Länge $4a$) ist im Punkt A fest eingespannt. Der Balken ist wie skizziert durch eine Einzelkraft (Betrag F) sowie durch eine linear anwachsende Streckenlast (Maximalwert q_0) belastet.



a) Zur Berechnung der Lagerreaktionen soll die Streckenlast durch eine äquivalente Einzelkraft R ersetzt werden. Geben Sie den Betrag sowie die x-Koordinate des Angriffspunkts von R an.

Betrag: $R =$ $a\,q_0$ Angriffspunkt: $x_R =$ $\frac{10}{3}a$

b) Schneiden Sie den Balken frei, zeichnen Sie alle Lagerreaktionen ein und benennen Sie diese. Zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte ein und ersetzen Sie dabei die Streckenlast durch die äquivalente Einzelkraft R.



c) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Lagerreaktionen auf.

$\sum F_{xi} = 0: \; F_{Ax} + \frac{\sqrt{2}}{2} F = 0$

$\sum F_{zi} = 0: \; F_{Az} - \frac{\sqrt{2}}{2} F + R = 0$

$\sum M_{yi}^{(A)} = 0: \; M_{Ay} + \frac{\sqrt{2}}{2} F a - R \frac{10}{3} a = 0$

d) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in Abhängigkeit von q_0, a und F.

$F_{Ax} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$

$F_{Az} = \frac{\sqrt{2}}{2} F - a\,q_0$

$M_{Ay} = \frac{10}{3} q_0 a^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} F a$

bei d) entspr. Vz-Wechsel, falls Reaktions-Kräfte andersrum eingezeichnet

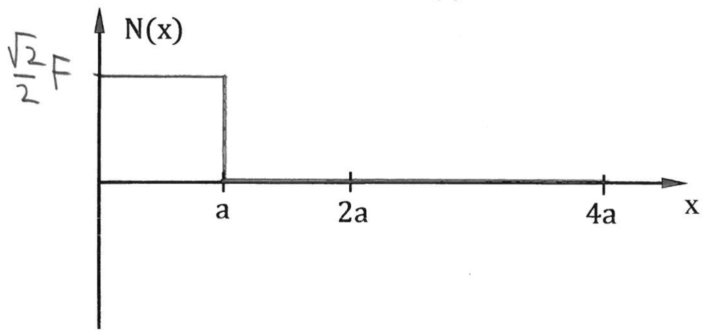
e) Geben Sie unter Verwendung der Klammerfunktionen (Föppl-Funktionen) den Normalkraftverlauf $N(x)$, die kontinuierliche Belastung $q(x)$ sowie den Querkraftverlauf $Q(x)$ an.

$N(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} F \langle x-0 \rangle^0 - \frac{\sqrt{2}}{2} F \langle x-a \rangle^0$

$q(x) = \frac{q_0}{2a} \langle x-2a \rangle^1$

$Q(x) = \left(a q_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} F\right) \langle x-0 \rangle^0 + \frac{\sqrt{2}}{2} F \langle x-a \rangle^0 - \frac{q_0}{4a} \langle x-2a \rangle^2$

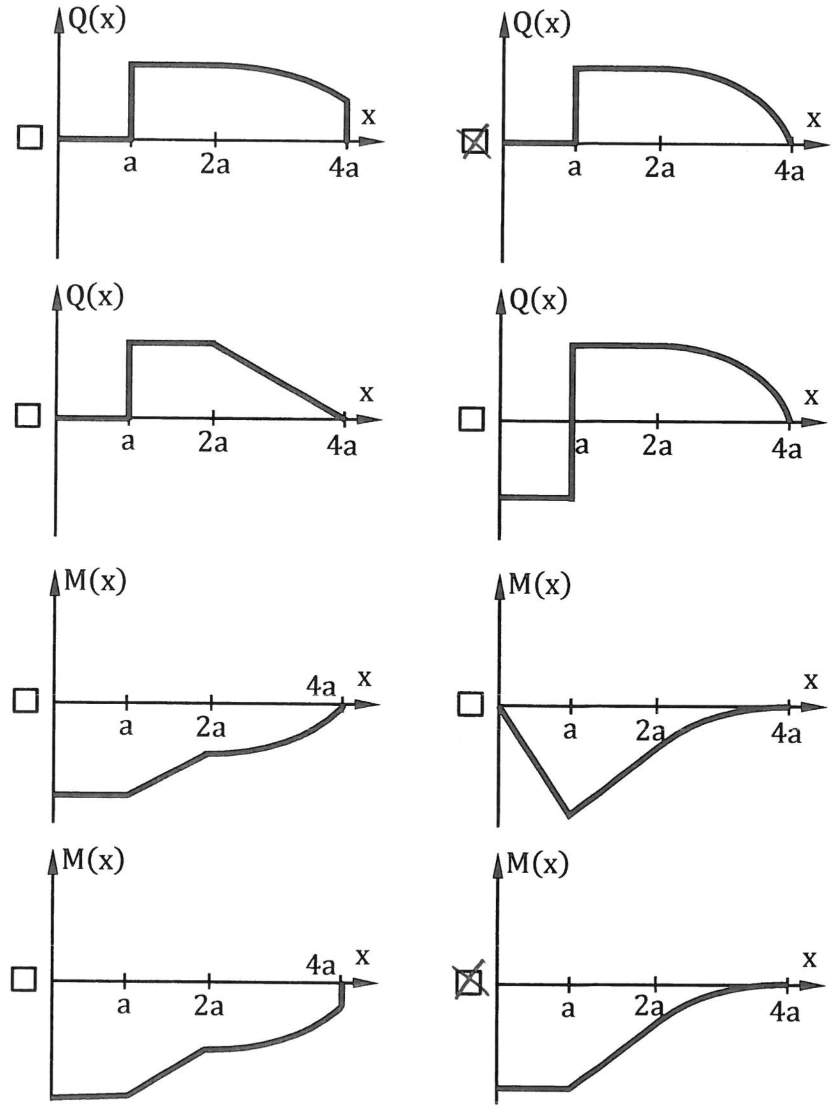
f) Skizzieren Sie den Verlauf der Normalkraft $N(x)$.



g) Wie muss F gewählt werden, damit an der Einspannstelle des Balkens keine Querkraft auftritt?

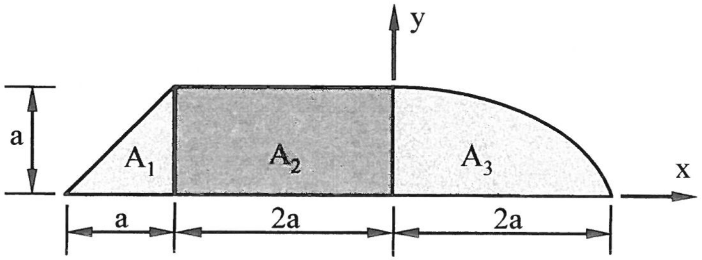
$F = \sqrt{2}\, a\, q_0$

h) Die Kraft F sei nun so gewählt, dass an der Balkeneinspannung keine Querkraft auftritt. Kreuzen Sie an, welche der gegebenen Querkraftverläufe $Q(x)$ und Biegemomentenverläufe $M(x)$ qualitativ möglich sind.



Aufgabe 5 (11 Punkte)

Die x-Koordinate des Flächenschwerpunkts der dargestellten Fläche soll bestimmt werden. Die Gesamtfläche ist aus drei Teilflächen A_1, A_2 und A_3 mit den zugehörigen Schwerpunktskoordinaten x_{S1}, x_{S2}, x_{S3} zusammengesetzt.



a) Wie lautet die Formel zur Berechnung der Schwerpunktskoordinate x_{SG} der Gesamtfläche aus den Schwerpunkten der Teilflächen?

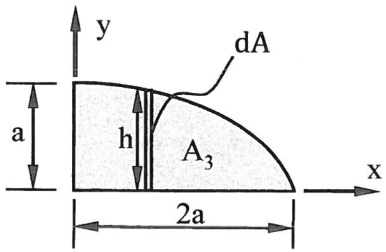
$x_{SG} = \dfrac{x_{S1} A_1 + x_{S2} A_2 + x_{S3} A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$ oder: $\dfrac{\sum_{i=1}^{3} x_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i}$

b) Geben Sie die Flächeninhalte sowie die Schwerpunktskoordinaten der ersten beiden Teiflächen an.

$A_1 = \frac{1}{2} a^2$, $x_{S1} = -\frac{7}{3} a$,

$A_2 = 2a^2$, $x_{S2} = -a$

c) In der Skizze ist in Teilfläche A_3 ein differentielles Flächenelement dA der Länge dx eingezeichnet. Die Höhe des Flächenelements kann durch die quadratische Gleichung $h = -\frac{1}{4a}x^2 + a$ beschrieben werden.



Geben Sie den Flächeninhalt des differentiellen Flächenelements an.

$dA = (-\frac{1}{4a} x^2 + a)\,dx$ oder $h\,dx$

d) Geben Sie den Flächeninhalt der Teilfläche A_3 an.

$A_3 = \frac{4}{3} a^2$

e) Wie lautet die Formel zur Bestimmung der Schwerpunktskoordinate x_{S3}?

$x_{S3} = \frac{1}{A_3} \int_0^{2a} x \left(-\frac{1}{4a} x^2 + a\right) dx$ oder: $\frac{1}{A_3} \int_A x\,dA$

oder: $\frac{1}{A_3} \int_0^{2a} x\,h\,dx$

f) Geben Sie die Schwerpunktskoordinate x_{S3} der Teilfläche A_3 an.

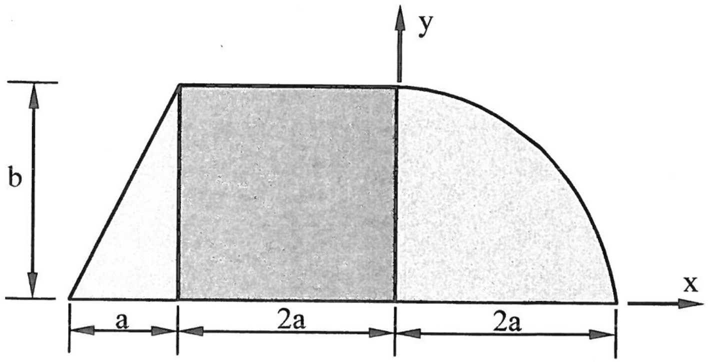
$x_{S3} = \frac{3}{4} a$

g) Geben Sie die Schwerpunktskoordinate x_{SG} der Gesamtfläche an.

$x_{SG} = -\frac{13}{23} a$

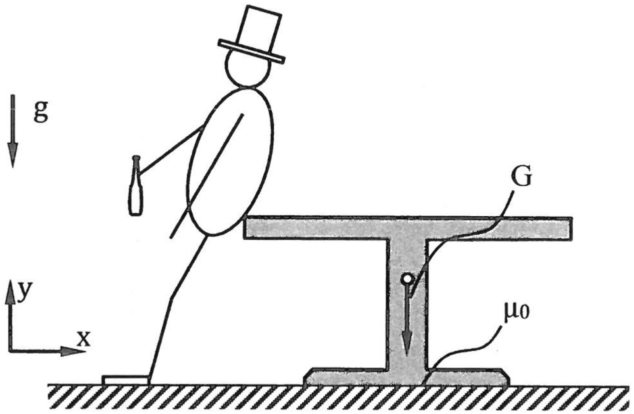
h) Für eine Parameterstudie wird die Höhe des Profils auf die Höhe $b > a$ vergrößert. Die Breite des Profils bleibt unverändert. Wie ändert sich die Lage des Gesamtschwerpunkts?

x - Koordinate	☐ wird größer	☐ wird kleiner	☒ bleibt gleich
y - Koordinate	☒ wird größer	☐ wird kleiner	☐ bleibt gleich

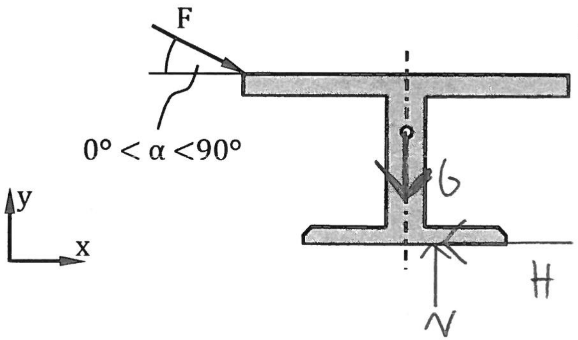


Aufgabe 6 (9 Punkte)

Peter ist auf einer WG-Party. Wie immer ist die Stimmung in der Küche am besten und so hält Peter sich gerade dort auf. Da es schon spät ist, hat sich Peter zur Entspannung entsprechend der Skizze am Küchentisch angelehnt. Der Küchentisch kann als symmetrischer, homogener Körper mit der Gewichtskraft G angesehen werden. Zwischen Fußboden und Tisch herrscht Haftreibung (Haftreibungskoeffizient μ_0). Das System ist im Gleichgewicht und ein Kippen des Tisches kann ausgeschlossen werden.



a) Schneiden Sie das System frei, zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte in die Skizze ein und benennen Sie diese. Die Kraft, die Peter auf den Tisch ausübt, ist in der Freischnittskizze bereits durch die Kraft F berücksichtigt. Für den Winkel α gilt $0° < \alpha < 90°$.



N und H können
an beliebigen Punkten
am Fuß des Tisches
angreifen.
Richtung auch beliebig

b) Geben Sie Gleichgewichtsbedingungen in x- und y-Richtung an.

$\sum F_{x_1} = 0: \cos\alpha\, F - H = 0$

$\sum F_{y_1} = 0: N - \sin\alpha\, F - G = 0$

c) Bestimmen Sie die Reaktionskräfte. VZ entspr. Skizze

$N = G + \sin\alpha\, F$

$H = \cos\alpha\, F$

d) Was muss für das Verhältnis von G zu F gelten, damit der Tisch nicht anfängt zu rutschen?

$$\frac{G}{F} \geq \frac{\cos\alpha - \mu_0 \sin\alpha}{\mu_0}$$

e) Was muss für den Winkel α gelten, dass unabhängig von den Beträgen von G und F Rutschen prinzipiell nicht auftreten kann?

$\cos\alpha - \mu_0 \sin\alpha \leq 0$

oder z.B. $\cos\alpha \leq \mu_0 \sin\alpha$

oder $\frac{1}{\mu_0} \leq \tan\alpha$

oder $\arctan\left(\frac{1}{\mu_0}\right) \leq \alpha$

ENDE