18. Februar 2013

Bachelorprüfung in Technische Mechanik I

Nachname, Vorname	
Email-Adresse (Angabe freiwillig)	
Matr.-Nummer	Fachrichtung Musterlösung

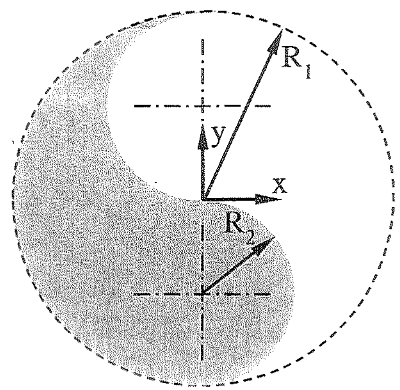
1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

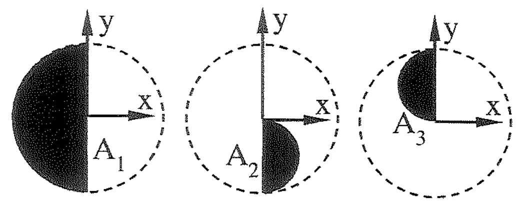
....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Der Gesamtschwerpunkt der dargestellten grauen Flächenanteile soll untersucht werden. Die Ränder der Flächen bestehen ausschließlich aus Kreisbögen mit den Radien $R_1 = 2R$, $R_2 = R$. Die grauen Flächenanteile sind zu den weißen Anteilen kongruent. Die graue Fläche kann aus den daneben dargestellten schwarzen Teilflächen durch positive und negative Gewichtung zusammengesetzt werden.





a) Wie setzt sich der Gesamtflächeninhalt der grauen Fläche aus den Flächeninhalten der schwarzen Teilflächen zusammen?

$A(A_i) = A_1 + A_2 - A_3$

b) Berechnen Sie die Flächeninhalte der schwarzen Teilflächen.

$A_1 = 2R^2\pi$, $A_2 = \frac{1}{2}R^2\pi$, $A_3 = \frac{1}{2}R^2\pi$

c) Berechnen Sie den Inhalt der grauen Gesamtfläche.

$A = 2R^2\pi$

d) Geben Sie die Schwerpunktkoordinaten der Teilflächen an.

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{8R}{3\pi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4R}{3\pi} \\ -R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{4R}{3\pi} \\ R \end{pmatrix}$$

e) Wie setzt sich der Gesamtschwerpunkt aus den Schwerpunkten der drei Teilflächen zusammen?

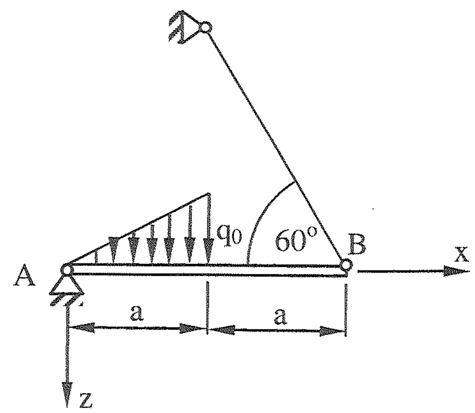
$$\mathbf{S}(\mathbf{S}_i, A_i) = \frac{1}{A}\left(S_1 A_1 + S_2 A_2 - S_3 A_3\right)$$

f) Berechnen Sie die Koordinaten des Gesamtschwerpunkts.

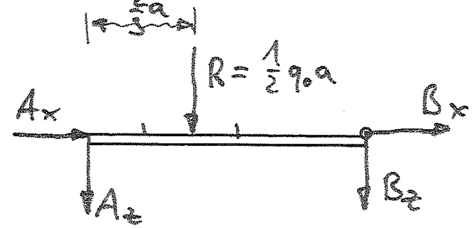
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{2R}{\pi} \\ -\frac{R}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (19 Punkte)

Ein masseloser Balken (Länge $2a$) ist im Punkt A gelenkig gelagert und im Punkt B an einem undehnbaren Seil aufgehängt. Der Balken ist wie skizziert durch eine linear anwachsende Streckenlast (Maximalwert q_0) belastet.



a) Schneiden Sie zur Berechnung der Lagerreaktionen den Balken frei, zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte ein und bezeichnen Sie diese.



b) Berechnen Sie die Kräfte auf den Balken in den Punkten A und B.

$$\mathbf{F}_A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{18} a q_0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} a q_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{18} a q_0 \\ 0 \\ -\frac{1}{6} a q_0 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie unter Verwendung der Föppl-Funktionen (Klammerfunktionen) den Normalkraftverlauf $N(x)$, die kontinuierliche Belastung $q(x)$ sowie den Querkraft- und Biegemomentverlauf $Q(x)$ und $M(x)$ an.

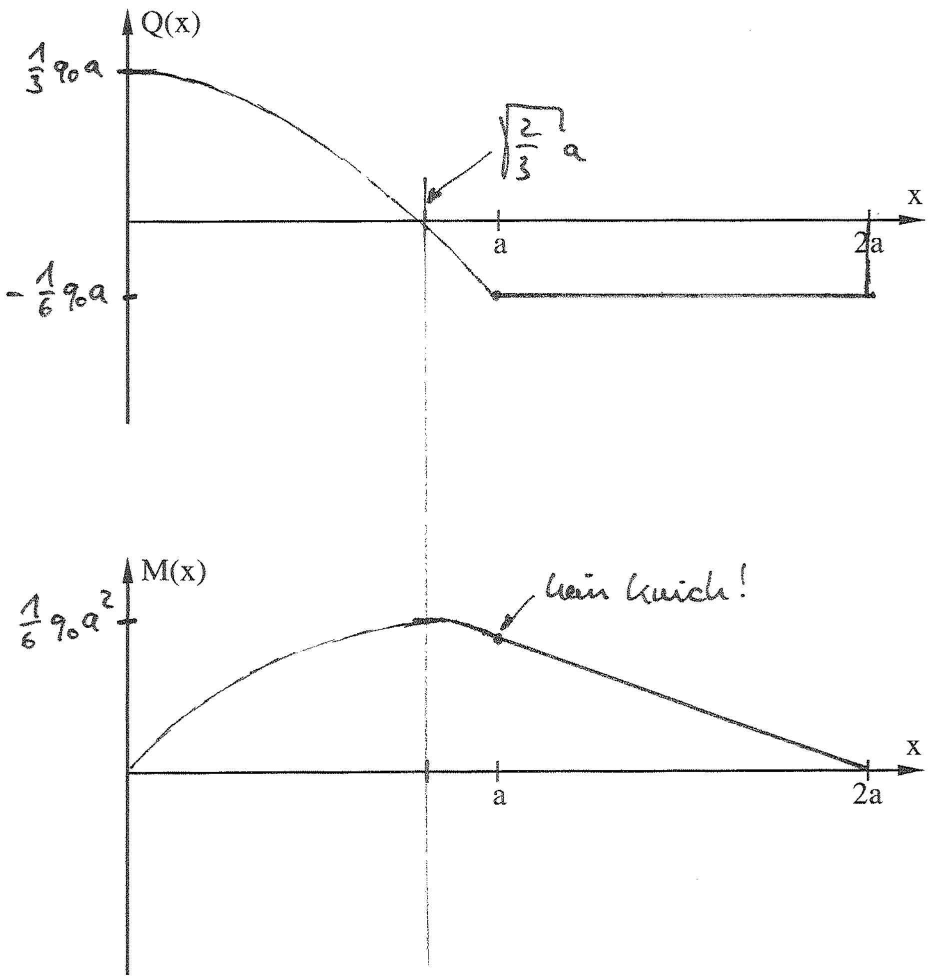
$$N(x) = -\frac{\sqrt{3}}{18} a q_0 + \frac{\sqrt{3}}{18} a q_0 \{x-2a\}^0$$

$$q(x) = \frac{q_0}{a} x - \frac{q_0}{a}\{x-a\}^1 - q_0\{x-a\}^0$$

$$Q(x) = \frac{1}{3} a q_0 - \frac{q_0}{2a} x^2 + \frac{q_0}{2a}\{x-a\}^2$$
$$+ q_0\{x-a\}^1 + \frac{1}{6} a q_0 \{x-2a\}^0$$

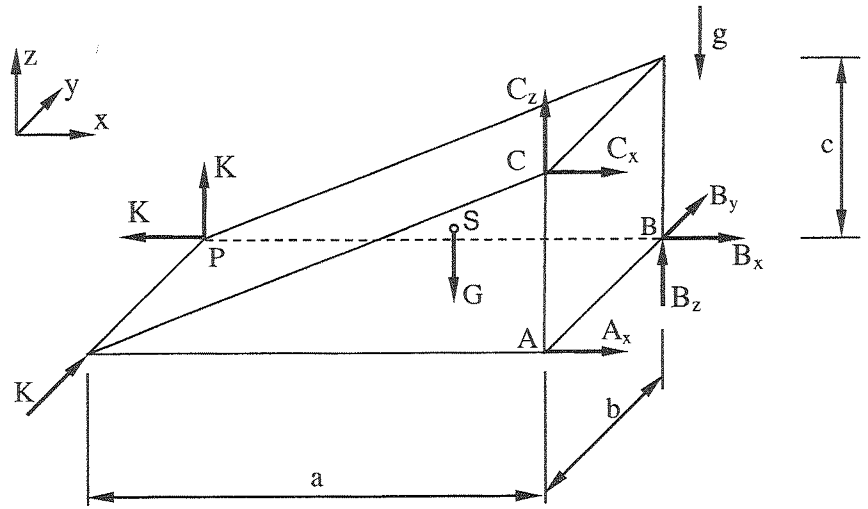
$$M(x) = \frac{1}{3} a q_0 x - \frac{q_0}{6a} x^3 + \frac{q_0}{6a}\{x-a\}^3$$
$$+ \frac{q_0}{2}\{x-a\}^2 + \frac{1}{6} a q_0 \{x-2a\}^1$$

d) Skizzieren Sie den Querkraft- und den Biegemomentverlauf.



Aufgabe 3 (13 Punkte)

Ein homogener prismatischer Körper mit Gewicht G ist freigeschnitten.



a) Geben Sie die folgenden Ortsvektoren an.

$$\mathbf{r}_{BP} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{BS} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{3} \\ -\frac{b}{2} \\ \frac{c}{3} \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie die Schnittkräfte in den Punkten B und C, sowie die Gewichtskraft an.

$$\mathbf{F}_B = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_C = \begin{pmatrix} C_x \\ 0 \\ C_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgenden Momente.

$$\mathbf{r}_{BS} \times \mathbf{F}_S = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} G \\ -\frac{a}{3} G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{F}_C = \begin{pmatrix} -b C_z \\ c C_x \\ b C_x \end{pmatrix}$$

d) Geben Sie die Beziehung zur Berechnung des Kraftwinders $(\mathbf{F}, \mathbf{M}^{(B)})$ an.

$$(\underline{F}, \underline{M}^{(B)}) = \left(\sum_i \underline{F}_i, \sum_i \underline{r}_{Bi} \times \underline{F}_i\right)$$

e) Berechnen Sie den Kraftwinder.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -K + B_x + A_x + C_x \\ K + B_y \\ K + B_z + C_z - G \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(B)} = \begin{pmatrix} -b C_z + \frac{b}{2} G \\ aK + c C_x - \frac{a}{3} G \\ -aK + bA_x + b C_x \end{pmatrix}$$

f) Wie lautet die Transformationsbeziehung für einen Wechsel des Bezugspunkts von B nach A?

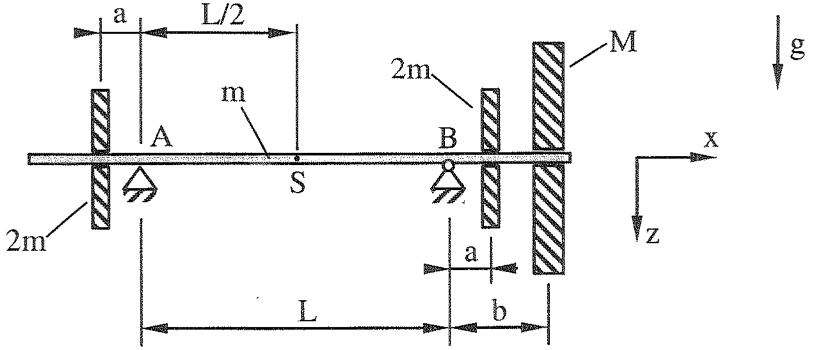
$$\mathbf{M}^{(A)} = \underline{M}^{(B)} + \underline{r}_{AB} \times \underline{F}$$

g) Unter welcher Bedingung für den Kraftwinder ist das System im Gleichgewicht?

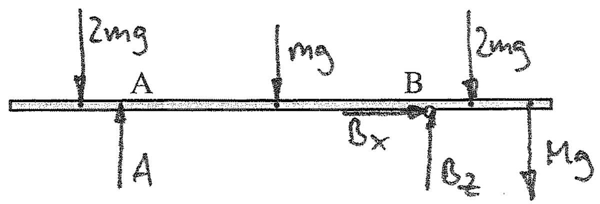
$$(\mathbf{F}, \mathbf{M}^{(B)}) = (0, 0)$$

Aufgabe 4 (12 Punkte)

In einem Fitnesscenter ist ein Sportler dabei, eine Hantel mit Gewichten zu bestücken. Die Hantelstange (Masse m, Schwerpunkt S) ist bereits rechts und links mit jeweils einem Gewicht der Masse $2m$ bestückt. Als er dabei ist, am rechten Ende ein weiteres Gewicht, der Masse M, aufzulegen, beginnt die Hantel zu kippen. Er kann sie jedoch gerade noch abfangen. Zuhause nach dem Training freut sich der Sportler darüber, die kürzlich in der Vorlesung Technische Mechanik I erworbenen Kenntnisse sinnvoll einsetzen zu können. Das System ist eben. Die Stange liegt im Punkt A reibungsfrei auf.



a) Schneiden Sie das System frei, zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte in die Skizze ein und benennen Sie diese.



b) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen an.

$\sum_i F_{z_i} = 0: \quad 2mg - A + mg - B_z + 2mg + Mg = 0$

$\sum_i F_{x_i} = 0: \quad B_x = 0$

$\sum_i M_i^{(A)} = 0: \quad 2mga - \frac{L}{2}mg + LB_z - (L+a)2mg - (L+b)Mg = 0$

c) Bestimmen Sie die Lagerkräfte.

$A = \frac{5}{2}mg - \frac{b}{L}Mg$

$B_x = 0$

$B_z = \frac{5}{2}mg + \frac{L+b}{L}Mg$

d) Welche Bedingung muss gelten, damit ein Kippen nach rechts verhindert wird?

$0 < A$

e) Bestimmen Sie den maximalen Abstand b_{max} für welchen die Hantel noch nicht nach rechts kippt.

$b_{max} = \frac{5}{2}\frac{mL}{M}$

f) Welchen Einfluss hat eine Vergrößerung des Abstands L der Auflagerpunkte? (mehrfaches Ankreuzen möglich)

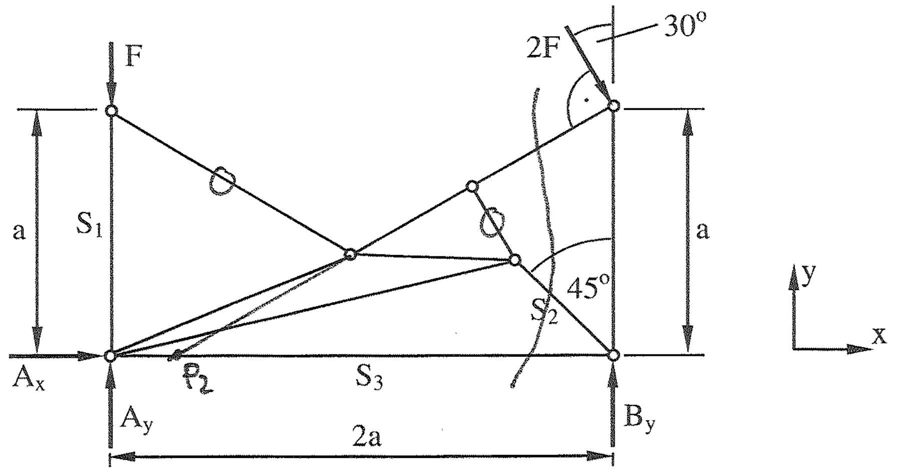
- ☒ die Hantel kippt erst bei größerer Zusatzlast M nach rechts
- ☒ die Zusatzlast M kann weiter in Richtung des rechten Endes der Hantelstange verschoben werden ohne dass Kippen erfolgt
- ☐ die Hantel kippt bereits bei niedrigerer Zusatzlast M nach rechts
- ☐ hat keinen Einfluss

g) Lässt sich die gleiche Fragestellung auch über eine reine Schwerpunktsbetrachtung ohne Ermittlung der wirkenden Kräfte klären?

☒ ja   O nein

Aufgabe 5 (18 Punkte)

Das dargestellte freigeschnittene Fachwerk soll untersucht werden.



a) Geben Sie die Anzahl der Knoten k und die der Stäbe s an.

$k =$ 7 , $s =$ 11

b) Wie lautet die notwendige Bedingung für ebene Fachwerke, die erfüllt sein muss, damit die Stab- und Lagerkräfte ermittelt werden können.

$2k = s + q$

c) Bestimmen Sie aus der Anschauung die Anzahl der überzähligen Lagerwertigkeiten n sowie die der Freiheitsgrade f des Fachwerks.

$n =$ 0 , $f =$ 0

d) Kennzeichnen Sie alle Nullstäbe des Fachwerks in obiger Skizze.

e) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Lagerkräfte an.

$\sum_i F_{x_i} = 0: \quad A_x + \frac{1}{2} 2F = 0$

$\sum_i F_{y_i} = 0: \quad A_y - F + B_y - \frac{\sqrt{3}}{2} 2F = 0$

$\sum_i M_i^{(A)} = 0: \quad 2a B_y - \frac{\sqrt{3}}{2} 2F 2a - \frac{1}{2} 2Fa = 0$

f) Bestimmen Sie die Lagerkräfte.

$A_x = -F$

$A_y = \frac{1}{2} F$

$B_y = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) F$

g) Zeichnen Sie einen geeigneten Ritterschnitt zur Berechung der Stabkraft S_2 sowie den zugehörigen Momentenbezugspunkt P_2 in obige Skizze ein.

h) Bestimmen Sie die in den Stäben 1 bis 3 wirkenden Stabkräfte.

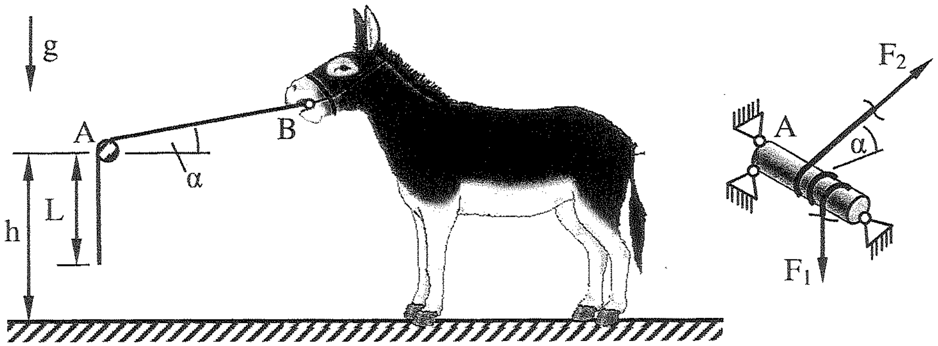
$S_1 = -F$, $S_2 = \frac{\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{6} F$, $S_3 = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}} F$

i) Klassifizieren Sie die Stäbe durch Ankreuzen in der folgenden Tabelle.

	Stab 1	Stab 2	Stab 3
Zugstab		X	
Nullstab			
Druckstab	X		X

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Sancho P. hat seinen Esel lässig vor der Taverne angebunden. Als Sancho in der Taverne verschwunden ist, versucht sich das listige Grautier natürlich sofort loszureißen. Das Seil zwischen den Punkten A und B bleibt dabei stets gespannt. Der Esel zerrt an dem Holm (Punkt A), um welchen Sancho den Zügel mehrfach gewickelt hat (Seilreibung, Haftreibungskoeffizient μ_0). Der frei hängende Rest des Zügels hat die spezifische Masse (Masse pro Länge) k.



a) Bestimmen Sie den Umschlingungswinkel des Zügels um den Holm in Abhängigkeit des Winkels α.

$\varphi(\alpha) = \frac{9\pi}{2} - \alpha$

b) Geben Sie die Gewichtskraft F_1 des frei hängenden Seilstücks an.

$F_1 = Lkg$

c) Geben Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen den beiden Kräften F_1 und F_2 ($F_2 > F_1$) unter Berücksichtigung der Seilreibung an.

$F_2 \leq F_1 e^{\mu_0 \varphi}$

d) Geben Sie die minimale Länge L_{min} des frei hängenden Seilstücks an, die erforderlich ist, damit sich der Esel nicht losreißen kann.

$L_{min} = \frac{F_2}{kg\, e^{\mu_0 \varphi}}$

e) Der Holm ist so angebracht, dass $h < L_{min}$ gilt. Kann sich der Esel befreien?

ja

ENDE