7. März 2011

Bachelor-Klausur in Technischer Mechanik I

Nachname, Vorname	
MUSTERLÖSUNG	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 8 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung erst beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

C. Fischer
(Unterschrift)

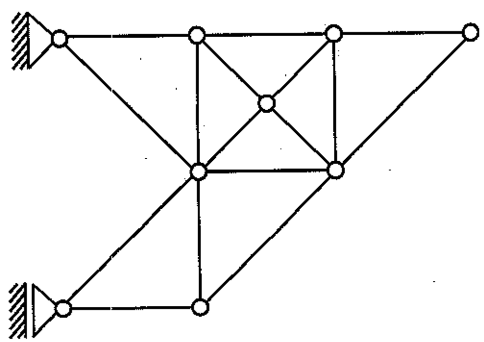
Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Bewerten Sie die folgenden Aussagen.

richtig	falsch	
☒	☐	die Haftreibungskraft ist eine Reaktionskraft
☒	☐	der Volumenmittelpunkt fällt mit dem Massenmittelpunkt zusammen, wenn die Dichte homogen ist
☐	☒	Kräfte sind freie Vektoren
☐	☒	die Streckenlast ist die erste Ableitung des Momentenverlaufs
☐	☒	bei verschwindender Streckenlast ist der Querkraftverlauf konstant
☒	☐	Kräfte an starren Körpern dürfen entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden

b) Klassifizieren Sie das gegebene ebene Fachwerk.



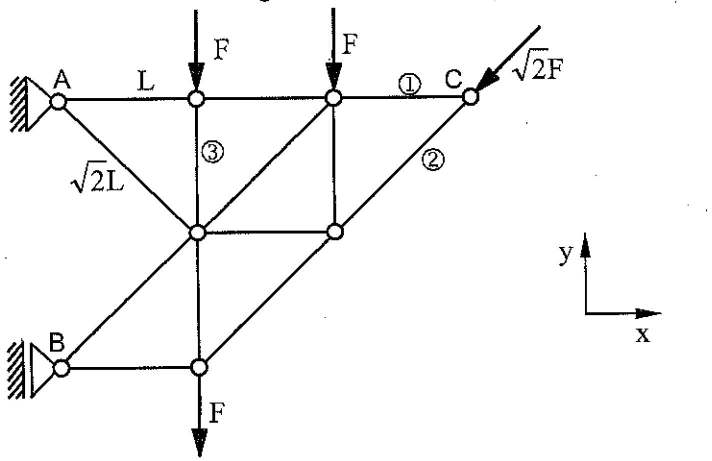
☐ abbrechbar ☒ nicht abbrechbar

c) Geben sie die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen p, Lagerwertigkeiten q und die Zahl der überzähligen Lagerreaktionen n für das Fachwerk an.

$p =$ 48, $q =$ 49 $n =$ 1

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Untersuchen Sie das dargestellte Fachwerk (Stablängen L bzw. $\sqrt{2}L$).



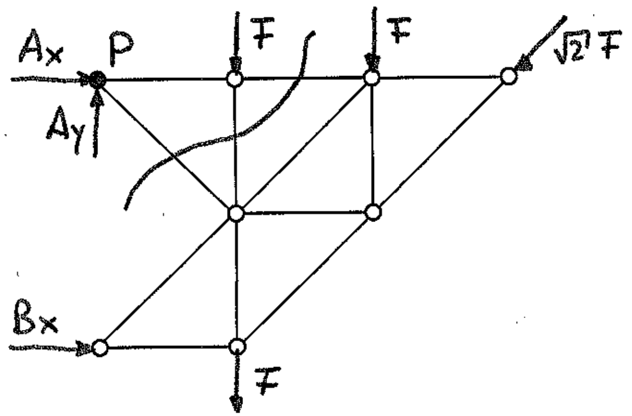
a) Klassifizieren Sie das Fachwerk.

☒ abbrechbar ☐ nicht abbrechbar

☒ einfach ☐ nicht einfach

☒ als Ganzes bestimmt gelagert ☐ als Ganzes unbestimmt gelagert

b) Schneiden Sie das Fachwerk frei, zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte ein und benennen Sie diese.



c) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für das Fachwerk als Ganzes auf.

$\sum F_{xi}: \quad A_x + B_x - F = 0$

$\sum F_{yi}: \quad A_y - 4F = 0$

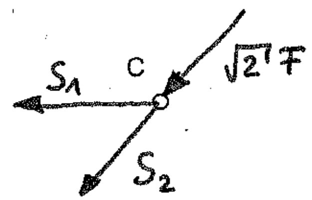
$\sum M_{Ai}: \quad 2LB_x - 7LF = 0$

d) Berechnen Sie die Lagerkräfte.

$A_x = -\frac{5}{2}F \qquad B_x = \frac{7}{2}F$

$A_y = 4F$

e) Zeichnen Sie alle am Knoten C angreifenden Kräfte in die folgende Skizze ein und benennen Sie diese.



f) Bestimmen Sie die Stabkräfte S_1 und S_2.

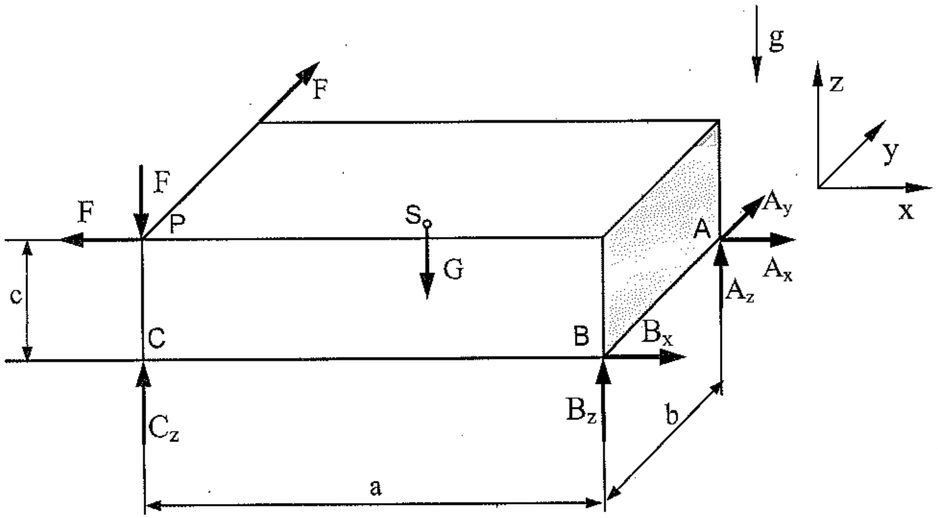
$S_1 =$ 0, $S_2 = -\sqrt{2}F$

g) Zeichnen Sie in die Freischnitt-Skizze des Fachwerks einen geeigneten Ritterschnitt und Bezugspunkt zur Berechnung von Stabkraft S_3 ein.

$S_3 = -F$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Eine homogene Platte mit Gewicht G ist freigeschnitten.



a) Geben Sie die folgenden Vektoren an.

$$\mathbf{r}_{AA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AS} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie die Schnittkräfte in den Punkten A und B, sowie die Gewichtskraft an.

$$\mathbf{F}_{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgenden Momente.

$$\mathbf{r}_{AS} \times \mathbf{F}_S = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} G \\ -\frac{a}{2} G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B = \begin{pmatrix} -b B_z \\ 0 \\ b B_x \end{pmatrix}$$

d) Wie lautet die Beziehung zur Berechnung des Kraftwinders $(\mathbf{A}, \mathbf{M}_A)$?

☐ $(\mathbf{A}, \mathbf{M}_A) = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \, , \, \sum_i (\mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_{O_i S}) \right)$

☐ $(\mathbf{A}, \mathbf{M}_A) = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \, , \, \sum_i (\mathbf{r}_{AO_i} \times \mathbf{A}) \right)$

☒ $(\mathbf{A}, \mathbf{M}_A) = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \, , \, \sum_i (\mathbf{r}_{AO_i} \times \mathbf{F}_i) \right)$

e) Wie lautet die Transformationsbeziehung für einen Wechsel des Bezugspunkts von A nach B?

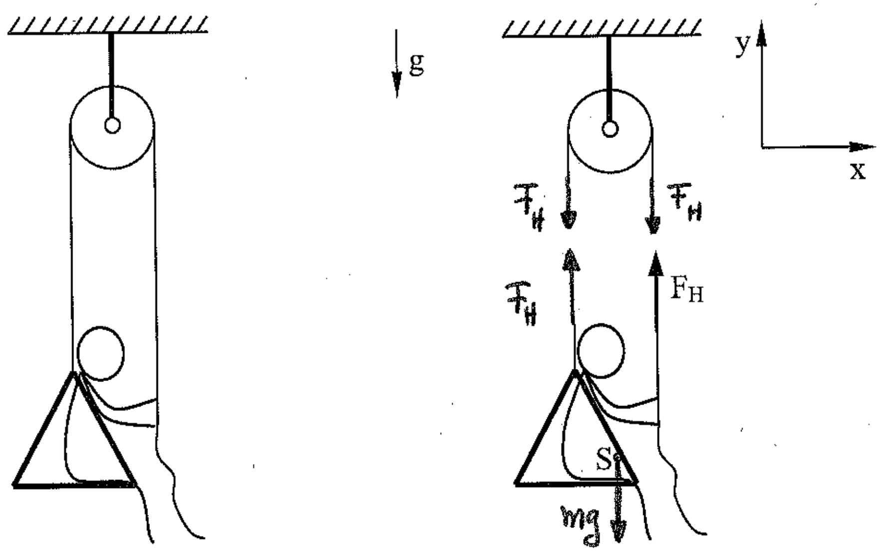
$$\mathbf{M}_B = \underline{M_A} + \underline{r_{BA}} \times \underline{A}$$

f) Welche Bedingung muss für den Kraftwinder gelten, damit sich die Platte im Gleichgewichtszustand befindet?

$$(\mathbf{A}, \mathbf{M}_A) = \underline{(0, 0)}$$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Eine Person sitzt in einer Schaukel und hält sich an einem Seil fest. Das Seil ist über eine reibungsfrei gelagerte Rolle geführt. Die Masse von Schaukel und Person zusammen ist m.



a) Vervollständigen Sie die Freischnittskizze und tragen Sie alle angreifenden Kräfte ein und benennen Sie diese.

b) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen in y-Richtung für die Person mit Schaukel auf.

$\sum F_{y_i}: \; 2F_H - mg = 0$

c) Wie groß ist die Kraft, mit der die Person das Seil festhalten muss, damit das System im Gleichgewicht ist?

$F_H = \frac{1}{2} mg$

Nun verklemmt sich die Rolle und kann sich nicht mehr drehen. Der Reibkoeffizient zwischen Seil und Rolle ist $\mu_0 > 0$. Daher sind die Kräfte in den beiden Seilstücken nun unterschiedlich.

d) Geben Sie den Umschlingungswinkel des Seils um die Rolle an.

$\varphi = \pi$

e) Berechnen Sie die mindestens benötigte Kraft, mit der die Person halten muss, um in Ruhe zu bleiben.

$F_{H\mu} = \dfrac{mg}{e^{\mu_0 \pi} + 1}$

f) Wie hat sich die Haltekraft durch die klemmende Rolle verändert?

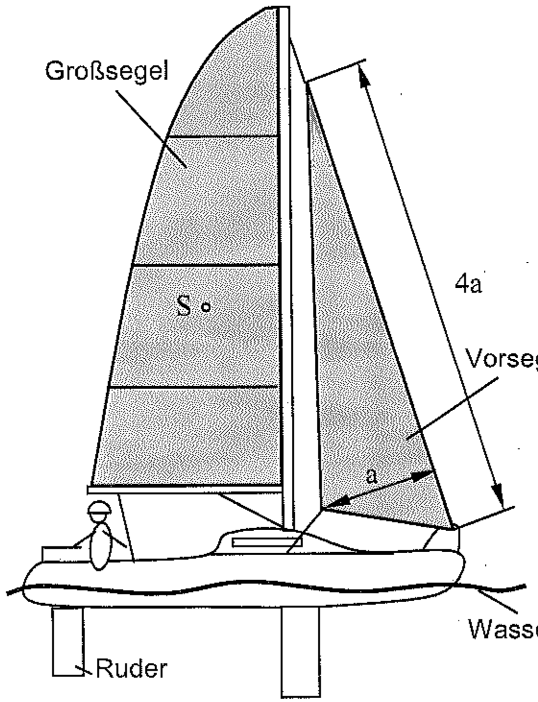
- ☐ sie ist größer
- ☒ sie ist kleiner
- ☐ Aussage abhängig von μ_0

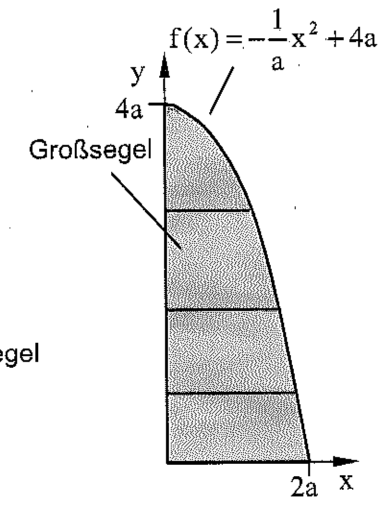
g) Nun versucht die Person sich am Seil hochzuziehen. Welchen Einfluss hat jetzt die klemmende Rolle?

- ☐ es ist mit klemmender Rolle eine geringere Kraft nötig
- ☒ es ist mit klemmender Rolle eine höhere Kraft nötig
- ☐ keine Aussage möglich

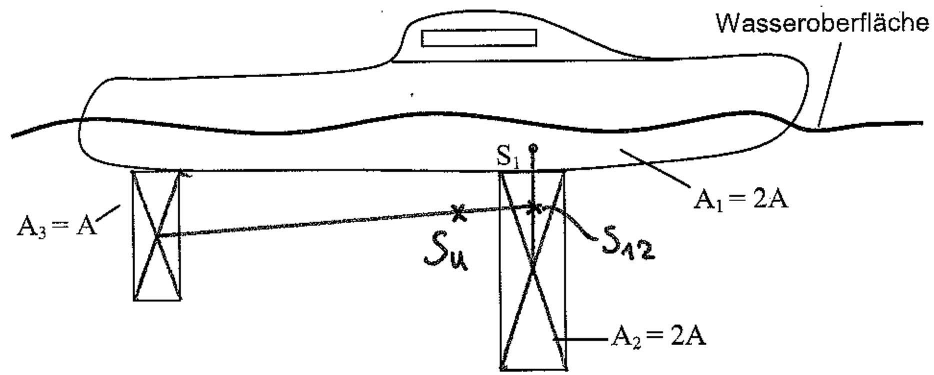
Aufgabe 5 (**10** Punkte)

Ein Segelboot soll untersucht werden. Vereinfachend soll das Segelboot als eben betrachtet werden.





a) Tragen Sie in die folgende Skizze den Gesamtflächenmittelpunkt S_{12} der Flächen A_1 und A_2 ein.



b) Tragen Sie den Gesamtflächenmittelpunkt der 3 unter Wasser liegenden Flächen ein und bezeichnen Sie diesen mit S_U.

c) Geben Sie die Flächen des Vorsegels und des Großsegels an.

$A_V =$ $2a^2$, $A_G =$ $\frac{16}{3}a^2$

d) Geben Sie die allgemeine Integralgleichung zur Berechnung der x-Koordinate eines Flächenmittelpunkts an.

$x_s =$ $\frac{1}{A}\int x\,dA$

e) Berechnen Sie die x-Koordinate des Flächenmittelpunkts des Großsegels.

$x_{sG} =$ $\frac{3}{4}a$

f) Berechnen Sie die y-Koordinate des Flächenmittelpunkts des Großsegels.
Hinweis: Das Volumen des bei Rotation des Großsegels um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers ist $V_{Rx} = (256/15)\pi a^3$.

$y_{sG} =$ $\frac{8}{5}a$

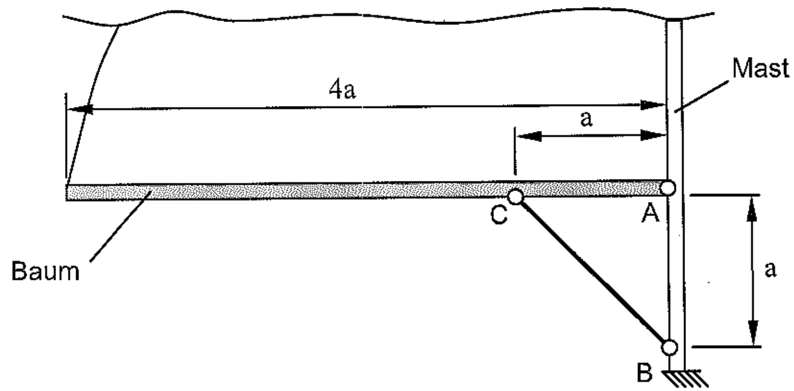
Im Folgenden wird angenommen, dass der Gesamtflächenmittelpunkt der Segel und der unter Wasser liegenden Flächen übereinander liegen. Der Wind bläst senkrecht in die Zeichenebene hinein. Die Wind- und Wasserkraft greifen in den entsprechenden Flächenmittelpunkten an.

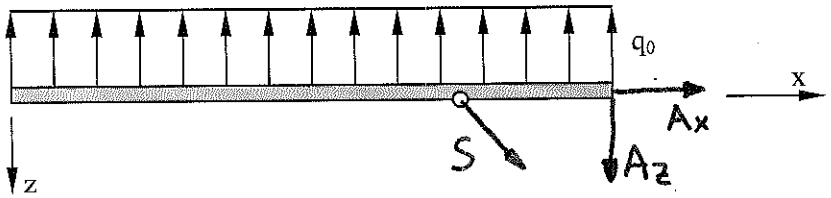
g) Nun bricht das Ruder ab. In welche Richtung dreht das Boot bei Vorwärtsfahrt?

- ☐ dreht in Fahrtrichtung nach links
- ☒ dreht in Fahrtrichtung nach rechts
- ☐ fährt gerade aus

Aufgabe 6 (16 Punkte)

Die innere Belastung im Baum soll bestimmt werden. Dazu wird der Baum als Balken modelliert. Die Belastung durch das Segel und die Gewichtskraft werden als Streckenlast q_0 angenommen. Die Abstützung zum Mast wird vereinfacht durch einen Stab modelliert.





a) Schneiden Sie den Baum frei und zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte ein und benennen Sie diese.

b) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Baum auf.

$\sum F_{xi}: \; A_x + \frac{\sqrt{2}}{2} S = 0$

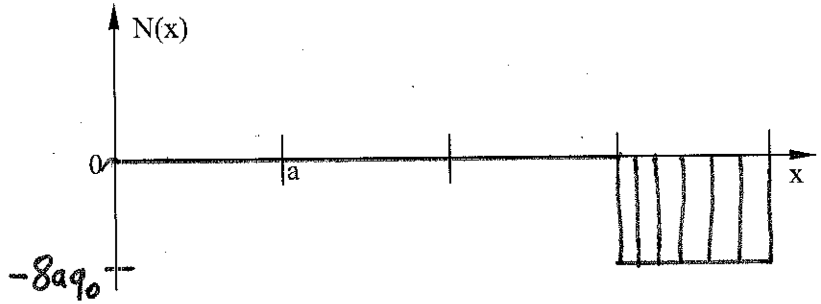
$\sum F_{zi}: \; A_z + \frac{\sqrt{2}}{2} S - 4aq_0 = 0$

$\sum M_{Ai}: \; \frac{\sqrt{2}}{2} aS - 8a^2 q_0 = 0$

c) Bestimmen Sie den Verlauf der im Balken auftretenden Normalkraft.

$N(x) = -8aq_0 \{x - 3a\}^0$

d) Zeichnen Sie den Normalkraftverlauf.



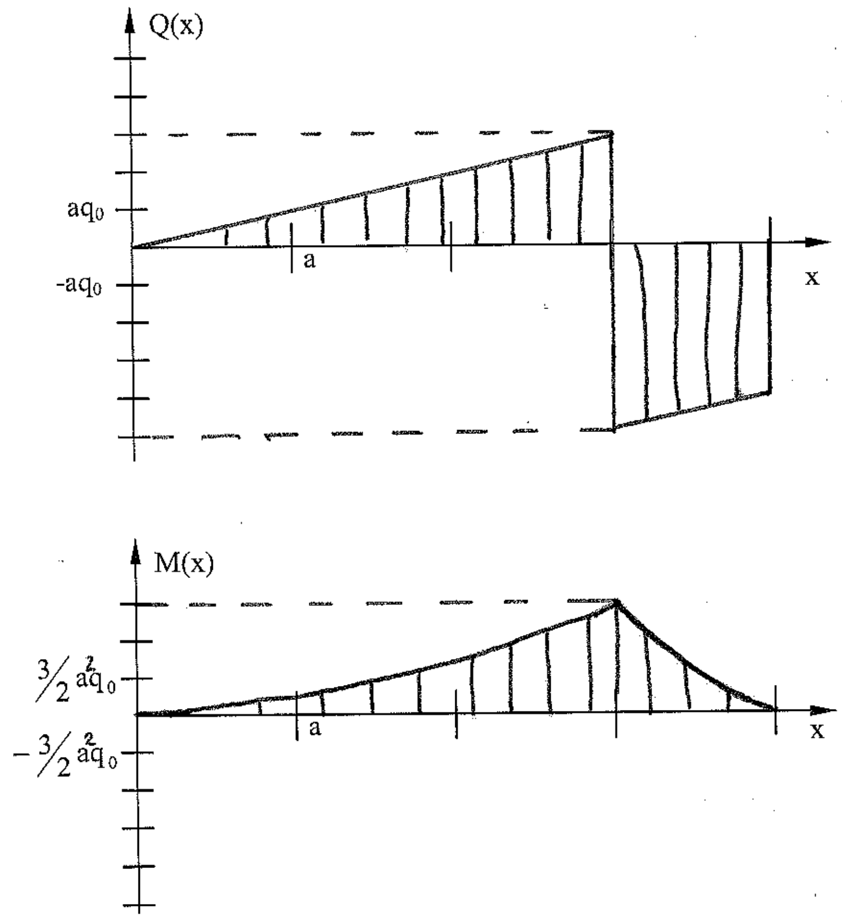
e) Geben Sie die Verläufe, der kontinuierlichen Belastung q(x), der Querkraft Q(x) und des Biegemoments M(x) für den Balken an.

$q(x) = -q_0$

$Q(x) = q_0 x - 8aq_0 \{x - 3a\}^0$

$M(x) = \frac{1}{2} q_0 x^2 - 8aq_0 \{x - 3a\}$

f) Zeichnen Sie den Querkraft- und Biegemomentenverlauf.

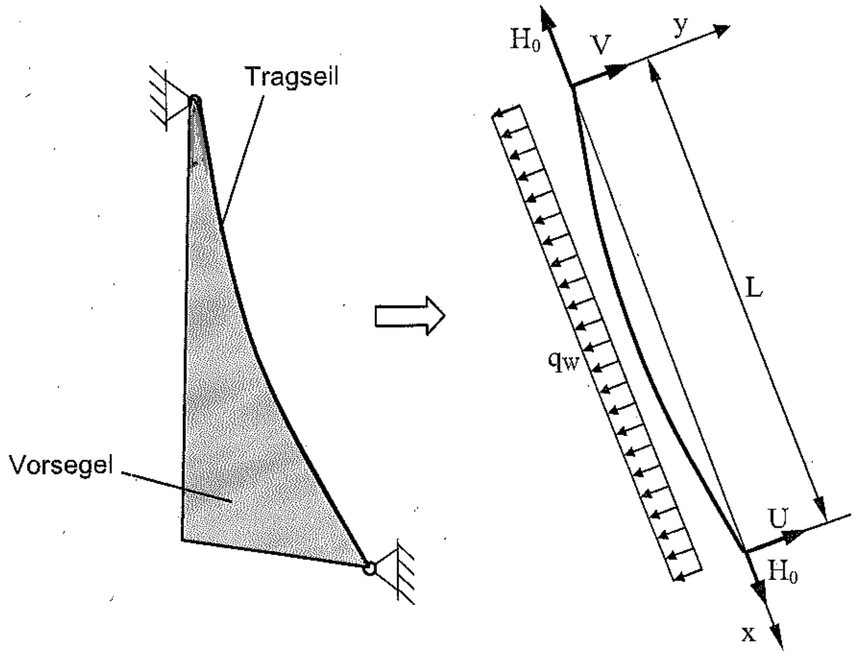


g) Bestimmen Sie das maximale Biegemoment.

$M_{max} = \frac{9}{2}a^2q_0$

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Das Vorsegel eines Segelboots wird von einem Tragseil gehalten. Die Windlast resultiert in einer Streckenlast q_w. Das Tragseil ist mit der Kraft H_0 gespannt. Im Folgenden soll die Seilkurve des Tragseils untersucht werden. Dabei kann das Gewicht des Segels und des Tragseils vernachlässigt werden.



a) Wie lautet die allgemeine Differentialgleichung der Seilkurve y(x)?

$y'' = \frac{q(x)}{H_0}$

b) Wie lautet die Gleichung der Seilkurve mit den noch unbekannten Integrationskonstanten C_1 und C_2?

- ☐ $y(x) = -\frac{q_W}{2H_0}x^2 + C_1 x + C_2$
- ☐ $y(x) = \frac{H_0}{q_W}\cosh(\frac{q_W}{H_0}x) + C_1 x + C_2$
- ☒ $y(x) = \frac{q_W}{2H_0}x^2 + C_1 x + C_2$
- ☐ $y(x) = -\frac{q_W}{3LH_0}x^3 + \frac{q_W}{H_0}x^2 + C_1 x + C_2$

c) Geben Sie die Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten an.

$y(0) = 0$

$y(L) = 0$

d) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten.

$C_1 = -\frac{q_w}{2H_0}L$

$C_2 = 0$

e) Geben Sie die notwendige Kraft H_0 an, so dass für den Durchhang $|y(x = L/2)| < f$ gilt.

$H_0 > \frac{q_w L^2}{8f}$

ENDE