Institut für Technische und Num. Mechanik
Profs. P. Eberhard / M. Hanss / J. Fehr

28. August 2017

Bachelorprüfung in Technische Mechanik I

Nachname, Vorname	
MUSTERLOESUNG	
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

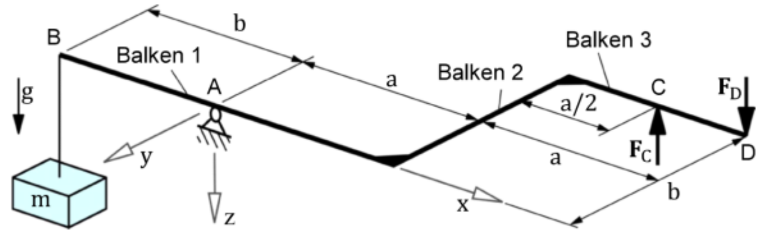
1. Die Prüfung umfasst 9 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

J. Störkle
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Ein gebogener Hebel besteht aus den Balken 1, 2, 3 und stützt sich auf einem Kugelgelenk im Punkt A ab. Am Punkt B hängt ein Gewicht mit der Masse m. Am Balken 3 greifen die Kräfte $\mathbf{F}_C$ und $\mathbf{F}_D$ an mit $|\mathbf{F}_C| = |\mathbf{F}_D| = F$. Die Balken können als masselos betrachtet werden.



a) Geben Sie die Ortsvektoren zu den Punkten B, C und D an.

$$\mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AC} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}a \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AD} = \begin{bmatrix} 2a \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet der den Kräften $\mathbf{F}_C$, $\mathbf{F}_D$ und der Wirkung der Masse m äquivalente Kraftwinder für den Punkt A?

$$(\mathbf{F}, \mathbf{M}^{(A)}) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ mgb - \frac{1}{2}Fa \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

c) Berechnen Sie die Lagerreaktionen im Punkt A auf den Balken 1.

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \text{ oder } +mg, \quad \mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Bestimmen Sie F so, dass das System im Gleichgewicht ist.

$$F = 2\,mg\,\frac{b}{a}$$

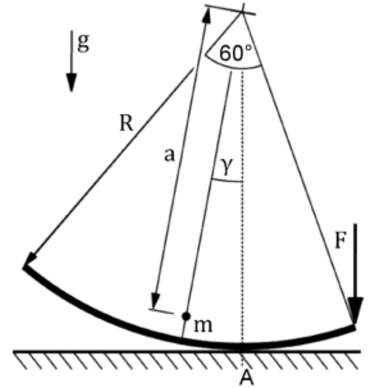
Aufgabe 2 (7 Punkte)

Bewerten Sie folgende Aussagen.

wahr	falsch	
☒	☐	Zwei Systeme von gebundenen Vektoren heißen äquivalent, wenn sie für jeden beliebigen Bezugspunkt dasselbe Moment ergeben.
☐	☒	Die Kinematik ist die Lehre vom Zusammenspiel von Kräften am bewegten Körper.
☐	☒	Das Verschieben von Vektoren senkrecht zu ihrer Wirkungslinie ist eine Invarianzoperation.
☒	☐	Kräfte können nicht unmittelbar, sondern nur durch ihre Wirkung auf Körper beobachtet oder gemessen werden.
☒	☐	Zur Bestimmung eines Linienschwerpunkts kann die Guldinsche Regel verwendet werden.
☒	☐	Zur Bestimmung eines Flächenschwerpunkts kann die Guldinsche Regel verwendet werden.
☐	☒	Ein mechanisches System heißt bestimmt gelagert, wenn es kinematisch oder statisch bestimmt ist.

Aufgabe 3 (Punkte)

Ein ebenes Modell besteht aus einem Kreisbogen mit einem Winkel von 60° mit dem Radius R und der Masse m. Der Abstand zwischen dem Bogenschwerpunkt und dem Kreismittelpunkt wird mit a bezeichnet. Am rechten Ende des Bogens wirkt die Vertikalkraft F, so dass das System im Punkt A aufliegt und sich bei dem Neigungswinkel γ im Gleichgewicht befindet.



a) Wie groß ist der Betrag der Reaktionskraft an der Kontaktstelle A in Abhängigkeit von F?

$$F_A = |mg + F|$$

b) Berechnen Sie die Vertikalkraft mit Hilfe des Momentengleichgewichts um A.

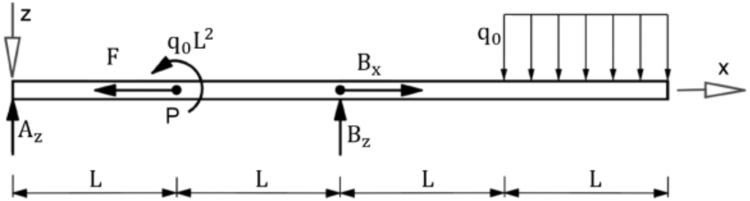
$$F = mg\,\frac{a}{R}\,\frac{\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\gamma\right)}$$

c) Die Kraft F wird nun durch eine Punktmasse m_P ersetzt. Wie lautet das Verhältnis $\frac{m_P}{m}$, wenn $a = \frac{3R}{\pi}$ beträgt und sich das System bei $\gamma = 15°$ im Gleichgewicht befindet?

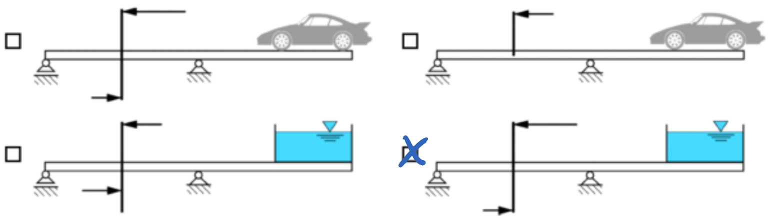
$$\frac{m_P}{m} = \frac{3}{\pi}$$

Aufgabe 4 (14 Punkte)

Ein masseloser und bestimmt gelagerter Balken (Länge $4L$) ist wie in der Freischnittzeichnung skizziert an der Stelle P durch eine Normalkraft F und ein Moment q_0L^2 sowie durch eine stetig verteilte Streckenlast q_0 beansprucht.



a) Kreuzen Sie an, wie das zugehörige System aussehen könnte.



b) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Lagerreaktionen auf.

$\sum F_{xi} = 0: \quad -F + B_x = 0$

$\sum F_{zi} = 0: \quad -A_z - B_z + q_0 L = 0$

$\sum M_{yi}^{(B)} = 0: \quad -A_z 2L + q_0 L^2 - \frac{3}{2} q_0 L^2 = 0$

c) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen.

$A_z = -\frac{1}{4} q_0 L$

$B_x = F$

$B_z = \frac{5}{4} q_0 L$

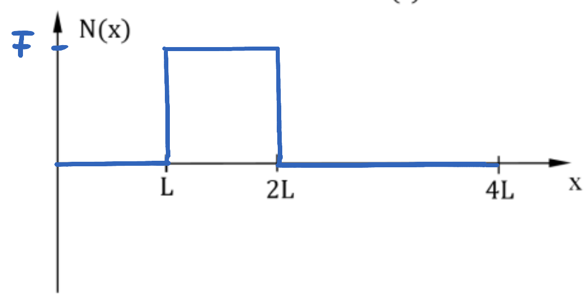
d) Geben Sie unter Verwendung der Klammerfunktionen (Föppl-Klammern) den Normalkraftverlauf $N(x)$, den Querkraftverlauf $Q(x)$ sowie den Biegemomentenverlauf $M(x)$ an.

$N(x) = F\{x-L\}^0 - F\{x-2L\}^0$

$Q(x) = -q_0\{x-3L\}^1 - \frac{1}{4} q_0 L \{x-0\}^0 + \frac{5}{4} q_0 L \{x-2L\}^0$

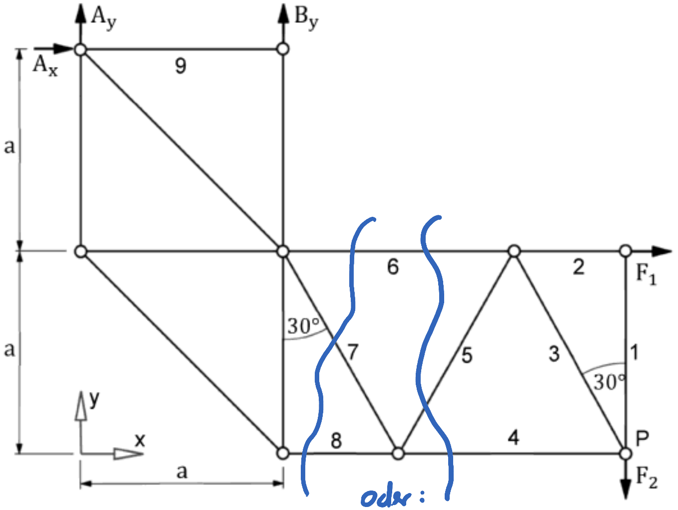
$M(x) = -\frac{1}{2} q_0 \{x-3L\}^2 - \frac{1}{4} q_0 L \{x-0\}^1 + \frac{5}{4} q_0 L \{x-2L\}^1 - q_0 L^2 \{x-L\}^0$

e) Skizzieren Sie den Verlauf der Normalkraft $N(x)$.



Aufgabe 5 (Punkte)

Eine Traverse ist an einer Bühnendecke in den Punkten A und B befestigt. Sie wird zusätzlich durch ein horizontales Drahtseil mit der Kraft F_1 gehalten und durch einen Scheinwerfer mit der Kraft F_2 vertikal belastet. Das bereits freigeschnittene dargestellte System wird als ebenes Fachwerk betrachtet und ist kinematisch bestimmt.



a) Geben Sie die Anzahl der Knoten k, die Anzahl der Stäbe s und die Zahl der unabhängigen Lagerreaktionen q an.

$k =$ 9 , $s =$ 15 , $q =$ 3

b) Ist die notwendige Bedingung erfüllt, sodass alle Stabkräfte berechnet werden können?

☒ ja ☐ nein

c) Bestimmen Sie die Längen von Stab 8 und Stab 4.

$l_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} a$, $l_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} a$

d) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Lagerkräfte an.

$\sum F_{ix} = 0: \; A_x + F_1 = 0$

$\sum F_{iy} = 0: \; A_y + B_y - F_2 = 0$

$\sum M_{iz}^{(A)} = 0: \; B_y a + F_1 a - F_2 a (1+\sqrt{3}) = 0$

(oder bzgl. einem anderen Punkt)

e) Bestimmen Sie die Lagerkräfte.

$A_x = -F_1$

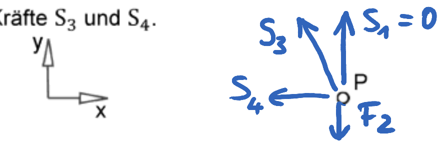
$A_y = F_1 - \sqrt{3} F_2$

$B_y = (1+\sqrt{3}) F_2 - F_1$

f) Klassifizieren Sie die folgenden Stäbe für $F_1, F_2 > 0$.

	Stab 1	Stab 2	Stab 8	Stab 9
Zugstab		X		
Nullstab	X			X
Druckstab			X	

g) Schneiden Sie den Knoten P frei und bestimmen Sie die in Stab 3 und Stab 4 wirkenden Kräfte S_3 und S_4.



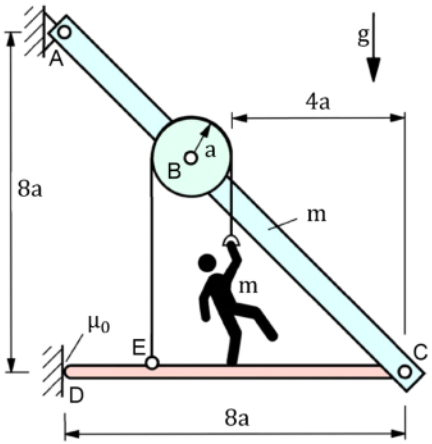
$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} F_2$, $S_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} F_2$

h) Zeichnen Sie einen geeigneten Ritter-Schnitt zur Ermittlung der Stabkraft S_6 in die obige Skizze ein und bestimmen Sie die Stabkraft S_6.

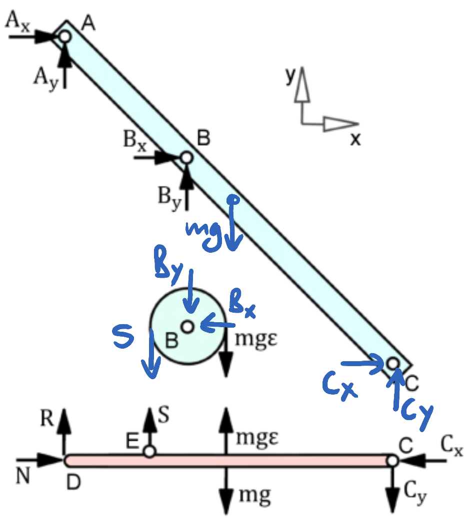
$S_6 = F_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} F_2$

Aufgabe 6 (Punkte)

Ein homogener Balken mit der Masse m stützt sich mit einem masselosen horizontalen Stützbalken gegen eine Wand.
Am oberen Balken ist eine reibungsfrei gelagerte masselose Rolle mit dem Radius a befestigt. Auf dem Stützbalken steht eine Person, die ebenfalls die Masse m hat. Über die Rolle führt ein Seil, dessen linkes Ende im Punkt E mit dem Stützbalken verbunden ist und an dessen rechtem Ende diese Person zieht. Zwischen Wand und Stützbalken tritt Haftreibung mit dem Koeffizient μ_0 auf.
Das Verhältnis ε beschreibt prozentual, wie stark sich die Person an das Seil hängt.



a) Schneiden Sie die Körper frei und ergänzen Sie in der Skizze die wirkenden Kräfte.



b) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen an.

Stützbalken:

$$\sum F_{xi} = 0: \quad N - C_x = 0$$

$$\sum F_{yi} = 0: \quad R + S - mg(1-\varepsilon) - C_y = 0$$

$$\sum M_{zi}^{(D)} = 0: \quad 2a\,S - 4a\,mg(1-\varepsilon) - 8a\,C_y = 0$$

Balken:

$$\sum F_{xi} = 0: \quad A_x + B_x + C_x = 0$$

$$\sum F_{yi} = 0: \quad A_y + B_y + C_y - mg = 0$$

$$\sum M_{zi}^{(A)} = 0: \quad B_x 3a + B_y 3a - mg 4a + C_x 8a + C_y 8a = 0$$

Rolle:

$$\sum F_{xi} = 0: \quad -B_x = 0$$

$$\sum F_{yi} = 0: \quad -S - B_y - mg\varepsilon = 0$$

$$\sum M_{zi}^{(B)} = 0: \quad S a - mg\varepsilon a = 0$$

c) Ermitteln Sie die Kräfte in den Punkten A, B, C, D und E.

$A_x = -mg$ $\qquad$ $A_y = mg\left(\frac{5}{4}\varepsilon + \frac{3}{2}\right)$

$B_x = 0$ $\qquad$ $B_y = -2mg\varepsilon$

$C_x = mg$ $\qquad$ $C_y = mg\left(\frac{3}{4}\varepsilon - \frac{1}{2}\right)$

$N = mg$ $\qquad$ $R = mg\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\varepsilon\right)$

$S = mg\varepsilon$

d) Wie groß muss für $\varepsilon = 0$ der Haftreibungskoeffizient μ_0 sein, damit das System im Gleichgewicht ist?

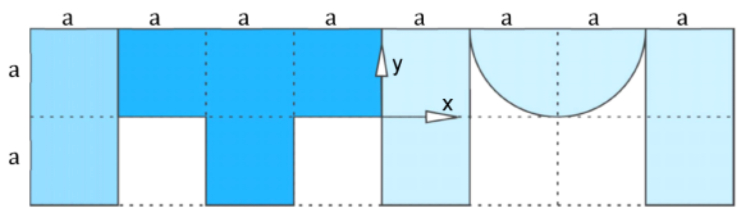
$\mu_0 \geq \frac{1}{2}$

e) Bestimmen Sie ε für $\mu_0 = 0$ so, dass das System im Gleichgewicht ist.

$\varepsilon = \frac{2}{5}$

Aufgabe 7 (Punkte)

Die Position des Flächenschwerpunkts der dargestellten Fläche soll bestimmt werden. Die Gesamtfläche setzt sich aus mehreren Quadraten mit der Kantenlänge a und einem Halbkreis mit dem Radius a zusammen.



a) Bestimmen Sie aus der Anschauung, in welchem Bereich die Gesamtschwerpunktskoordinaten liegen.

- [x] $-a < x_{SG} < 0$
- [ ] $-a < y_{SG} < 0$
- [ ] $0 \leq x_{SG} < a$
- [x] $0 \leq y_{SG} < a$

b) Geben Sie den Flächeninhalt der Gesamtfläche an.

$A = 10a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2$

c) Wie lautet die allgemeine Formel zur Bestimmung der Gesamtschwerpunktskoordinaten $\mathbf{r}_{SG}$ von n zusammengesetzten Teilflächen A_i mit den zugehörigen Schwerpunktskoordinaten $\mathbf{r}_{Si}$?

$$\mathbf{r}_{SG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

d) Geben Sie die Schwerpunktskoordinate $y_{S,HK}$ der Halbkreisfläche an.

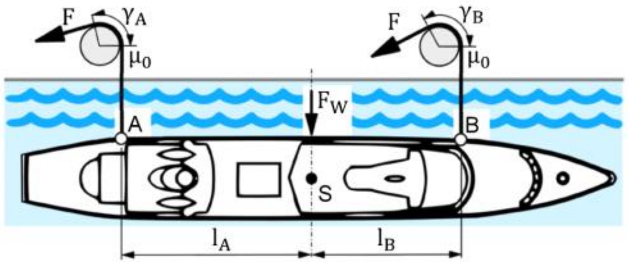
$y_{S,HK} = a\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)$

e) Geben Sie die Schwerpunktskoordinate x_{SG} der Gesamtfläche an.

$x_{SG} = \frac{\pi - 5}{10 + \frac{\pi}{2}} a$

Aufgabe 8 (Punkte)

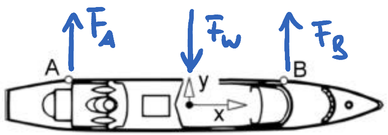
Ein Schiff ist an den Punkten A und B mit jeweils einem masselosen Seil mit den Seilkräften F_A und F_B am Ufer befestigt und wird durch eine auf den Schwerpunkt S wirkende Kraft F_W vom Ufer weggedrückt. Das linke Seil umschlingt einen Poller mit dem Winkel γ_A und beim rechten Seil beträgt der Winkel γ_B. Die Haltekraft F ist beidseitig identisch. Die Abstände von A und B zum Schiffsschwerpunkt betragen l_A und l_B. Die beiden Poller haben den Seilreibungskoeffizient μ_0. Das ebene Modell ist in der Draufsicht dargestellt.



a) Wie lauten die Haftbedingungen an den Pollern für $F_A > F$ und $F_B > F$?

$\frac{F_A}{F} \leq e^{\mu_0 \gamma_A}$, $\frac{F_B}{F} \leq e^{\mu_0 \gamma_B}$

b) Schneiden Sie das Schiff frei und zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte in die Skizze ein.



c) Formulieren Sie das Momentengleichgewicht für das Schiff bzgl. A.

$\sum M_{zi}^{(A)} = 0 : F_B (l_A + l_B) - F_W l_A = 0$

d) Bestimmen Sie die Reaktionskräfte an den Punkten A und B.

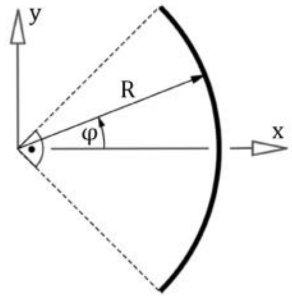
$F_A = F_W \frac{l_B}{l_A + l_B}$, $F_B = F_W \frac{l_A}{l_A + l_B}$

e) Wie groß muss die Winkeldifferenz $\gamma_B - \gamma_A$ für $\ln\frac{l_A}{l_B} = 1$ und für eine beliebige Kraft F_W sein, sodass die Haftbedingungen an den beiden Pollern gerade noch erfüllt sind?

$\gamma_B - \gamma_A = \frac{1}{\mu_0}$

Aufgabe 9 (Punkte)

Ein Viertelkreisbogen mit dem Radius R ist symmetrisch zur x-Achse angeordnet.



a) Wie lautet der Ortsvektor, der den Kreisbogen in Abhängigkeit von dem Winkel φ in der Ebene beschreibt?

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{bmatrix}$$

b) Wie groß ist die Gesamtbogenlänge L_B?

$L_B = R\frac{\pi}{2}$

c) Berechnen Sie die Position des Linienschwerpunktes auf der x-Achse.

Hinweis: $\mathbf{r}_{SL} = \frac{1}{L_B}\int_L \mathbf{r}\, dL$

$r_{SL,x} = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}$

ENDE