Institut für Technische und Num. Mechanik
Profs. P. Eberhard / M. Hanss

24. August 2015

Bachelorprüfung in Technische Mechanik I

Nachname, Vorname	
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig): Musterlösung	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 8 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich **nicht** zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
Σ 78	

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sind die beiden Kraftvektoren $\mathbf{F}_\mathrm{A}$ und $\mathbf{F}_\mathrm{B}$ mit dem gemeinsamen Angriffspunkt P.

$$\mathbf{F}_\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) Geben Sie den Kraftwinder $\left(\mathbf{F}, \mathbf{M}_\mathrm{F}^{(\mathrm{P})}\right)$ bezüglich P an.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_\mathrm{F}^{(\mathrm{P})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet die Rechenvorschrift für den Wechsel des Bezugspunktes von P nach Q für obigen Kraftwinder?

$$\left(\mathbf{F}, \mathbf{M}_\mathrm{F}^{(\mathrm{Q})}\right) = \left(\underline{F} \; , \; \left(\underline{M}_{\underline{F}}^{(P)}\right) + \underline{r}_{QP} \times \underline{F} \right)$$

Es ist ein weiterer Kraftwinder $\left(\mathbf{G}, \mathbf{M}_\mathrm{G}^{(\mathrm{Q})}\right)$ gegeben.

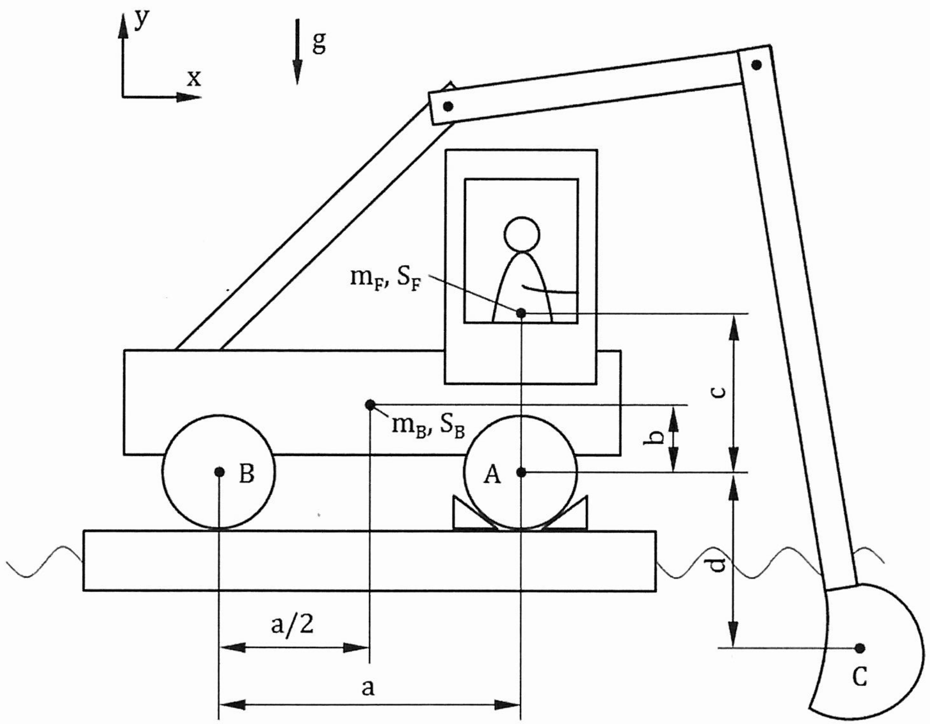
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(\mathrm{Q})} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_\mathrm{QP} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c) Sind die beiden Systeme gebundener Vektoren $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ äquivalent?

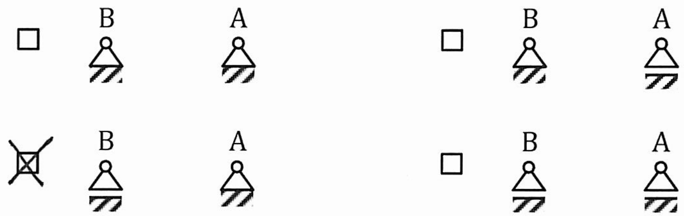
☐ ja ☒ nein

Aufgabe 2 (14 Punkte)

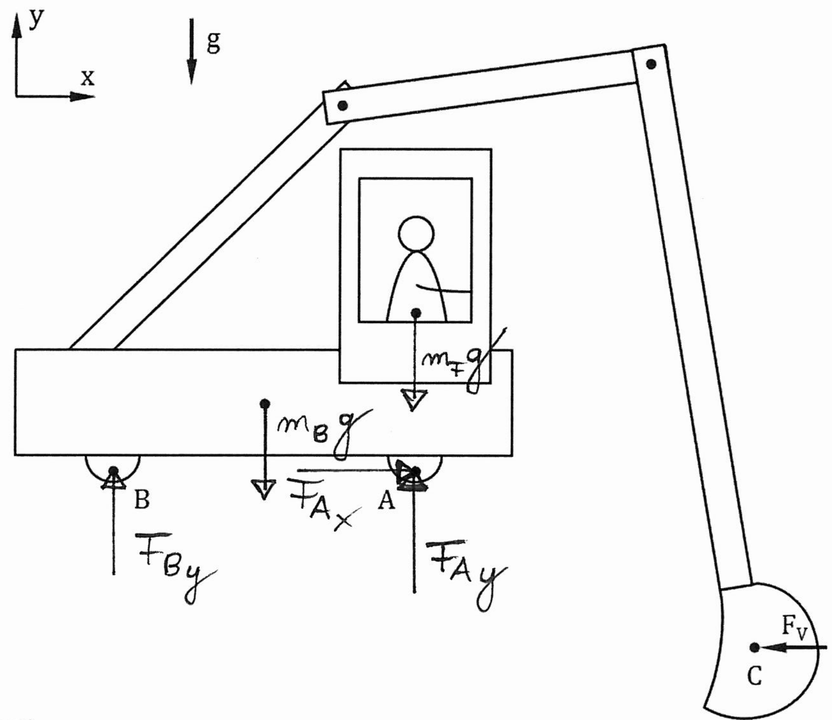
Der Kandidat einer ehemaligen Unterhaltungssendung im deutschen Fernsehen ging folgende Wette ein. Er wettete, dass er einen Bagger (Masse m_B, Schwerpunkt S_B), welcher auf einer schwimmenden Plattform steht, allein durch mit dem Bagger ausgeführte Ruderbewegungen am Heck der Plattform bewegen könne. Damit der Bagger während der Wette nicht von der Plattform rollt, ist das Rad A zusätzlich mittels zweier Bremsklötze fixiert. Der Baggerführer hat die Masse m_F und den Schwerpunkt S_F. Die durch die Ruderbewegung erzeugte momentane Vorschubkraft auf die Baggerschaufel (Angriffspunkt C) wirke lediglich horizontal und ihr Betrag sei F_V. Das ebene System bestehend aus Bagger und Baggerführer kann als im Gleichgewicht angesehen werden.



a) Welche Lagerung liegt an den Aufstandspunkten der beiden Räder A und B vor? Kreuzen Sie die entsprechende Lagerpaarung an.



b) Schneiden Sie den Bagger inklusive Baggerführer frei, zeichnen Sie in die unten abgebildete Skizze alle angreifenden Kräfte und Momente ein und benennen Sie diese.



F_{Ax}, F_{Ay} und/oder F_{By} wahlweise in umgekehrte Richtung zeigend
↳ angepasste Vorzeichen in c) + d) + e)

c) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Bagger an.

$$\sum_i F_{x_i} = 0: \quad F_{Ax} - F_V = 0$$

$$\sum_i F_{y_i} = 0: \quad F_{Ay} - (m_B + m_F)g + F_{By} = 0$$

$$\sum_i M_{z_i}^{(A)} = 0: \quad m_B g \frac{a}{2} - F_V d - F_{By} a = 0$$

d) Bestimmen Sie alle Lagerkräfte.

$$F_{Ax} = F_V$$

$$F_{Ay} = \left(\frac{1}{2} m_B + m_F\right) g + \frac{d}{a} F_V$$

$$F_{By} = \frac{1}{2} m_B g - \frac{d}{a} F_V$$

e) Welche Bedingung muss die vertikale Lagerkraft am Rad B erfüllen, damit es **nicht** zum Umkippen des Baggers und damit zum Kentern der Plattform kommt?

$$F_{By} \geq 0$$

f) Wie groß muss die Masse des Baggers m_B mindestens sein, damit dieser nicht umkippt?

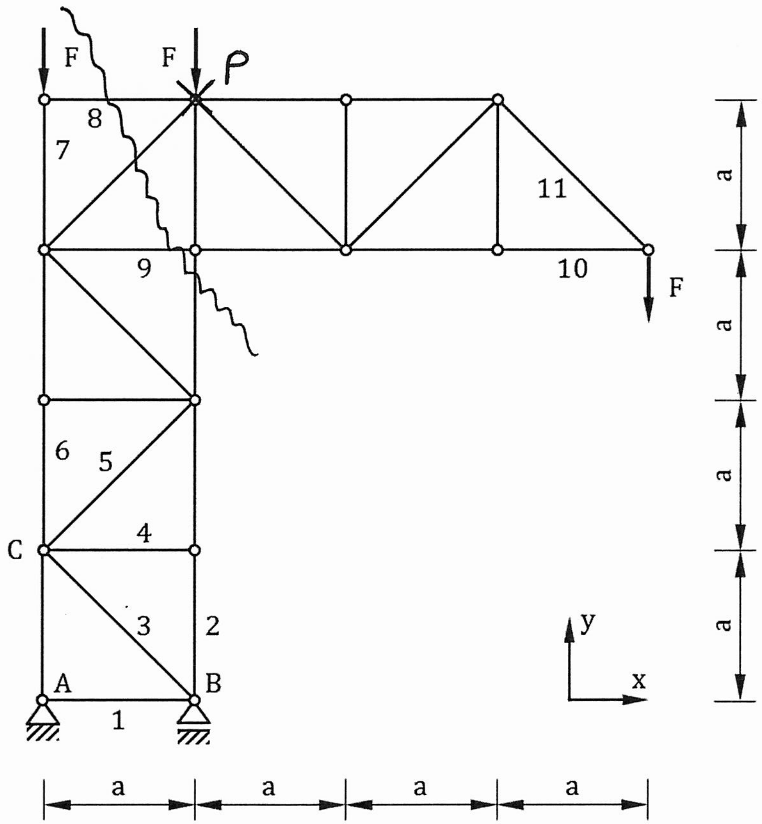
$$m_B \geq 2 \frac{d}{a} \frac{F_V}{g}$$

g) Markieren Sie diejenigen Änderungen am Wettaufbau, die die Gefahr des Umkippens vergrößern.

- ☐ Bremsklötze am Rad B anstatt am Rad A positionieren
- ☐ Radius der Räder vergrößern (b, c und d unverändert)
- ☐ Abstand der Lager a vergrößern bei unveränderter Distanz zwischen Rad A und S_B
- ☒ Abstand der Lager a verringern und Schwerpunkt S_B mittig zwischen Rad A und Rad B
- ☐ Sitzposition des Baggerführers (Abstand c) erhöhen
- ☐ Masse des Baggerführers m_F erhöhen
- ☒ Eintauchtiefe der Baggerschaufel (Abstand d) erhöhen
- ☒ Masse des Baggers m_B verringern

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Ein Kran kann als ebenes Fachwerk bestehend aus 27 masselosen Stäben betrachtet werden, an dessen rechtem Ende die Hubkraft F angreift. Weiterhin wird das Fachwerk an zwei Knoten am oberen Ende jeweils mit der Kraft F belastet.



a) Klassifizieren Sie das Fachwerk.

- ☐ als Ganzes kinematisch unbestimmt gelagert
- ☒ als Ganzes bestimmt gelagert
- ☐ Belastung der Stäbe durch Biegemomente
- ☒ alle Stabkräfte sind bestimmbar

b) Geben Sie die Lagerreaktionskräfte in den Punkten A und B an.

$$\mathbf{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -2F \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5F \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Welche der nachfolgenden Stäbe sind Nullstäbe?

- ☒ Stab 1
- ☒ Stab 4
- ☐ Stab 7
- ☒ Stab 8
- ☐ Stab 10
- ☐ keiner der angegebenen Stäbe

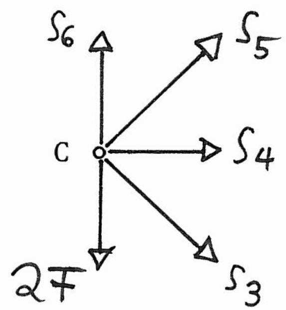
d) Wie werden die Stäbe 2 und 11 beansprucht?

Stab 2:	☐ Zug	☒ Druck	☐ Nullstab
Stab 11:	☒ Zug	☐ Druck	☐ Nullstab

e) Bestimmen Sie die Stabkraft S_2.

$S_2 =$ $-5F$

f) Zeichnen Sie in die Freischnittskizze alle am Knoten C angreifenden Kräfte und Momente (auch die eventueller Nullstäbe) ein und benennen Sie diese.



g) Bestimmen Sie die Stabkräfte S_5 und S_6.

$S_5 =$ 0 , $S_6 =$ 2F

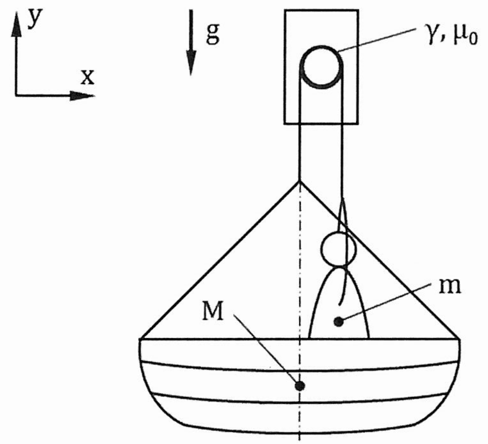
h) Zeichnen Sie einen geeigneten Ritter'schen Schnitt zur Berechnung der Stabkraft S_9 sowie den zugehörigen Momentenbezugspunkt P in die Aufgabenskizze (vorherige Seite) ein.

i) Bestimmen Sie die Stabkraft S_9.

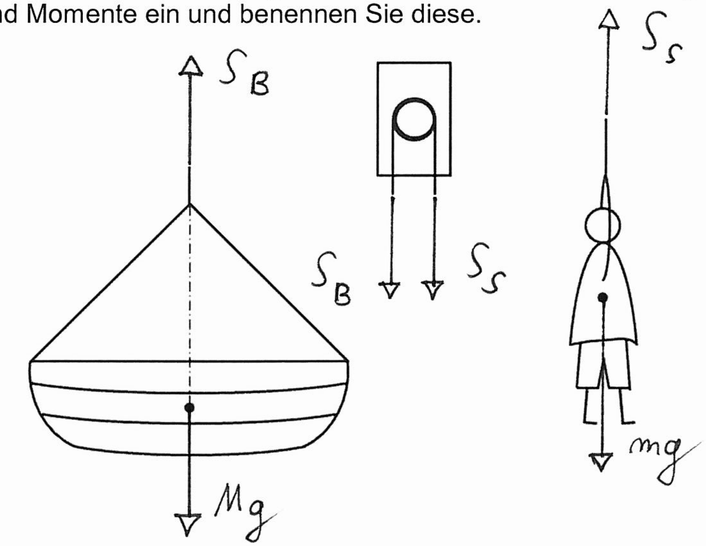
$S_9 =$ -3F

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Ein Seemann (Masse m) ist in Seenot und versucht, sich und sein Rettungsboot (Masse $M > m$) zu Wasser zu lassen. Hierzu führt er ein masseloses Seil mehrmals um einen fest installierten Ausleger mit kreisförmigem Querschnitt. Das Seil umschlingt den Ausleger insgesamt mit dem Winkel γ. Zwischen Seil und Ausleger tritt Reibung auf (Haftreibungskoeffizient μ_0). Das ebene System kann als im Gleichgewicht angesehen werden und der Seemann berührt das Rettungsboot nicht.



a) Zeichnen Sie in die unten abgebildete Freischnittskizze alle angreifenden Kräfte und Momente ein und benennen Sie diese.



S_B ~~und~~ oder S_S wahlweise im umgekehrte Richtung zeigend
↳ angepasste Vorzeichen im b)

b) Geben Sie die vertikalen Gleichgewichtsbedingungen für das Boot und den Seemann an.

Boot: $\sum_i F_{y_i} = 0: \; S_B - Mg = 0$

Seemann: $\sum_i F_{y_i} = 0: \; S_S - mg = 0$

c) Wie lautet die Haftbedingung am Ausleger, damit das Seil nicht rutscht?

$\left(e^{-\mu_0 \gamma} \leq\right) \frac{M}{m} \leq e^{\mu_0 \gamma}$

d) Wie groß muss der Umschlingungswinkel γ demnach sein, damit ein Rutschen des Seils gerade so noch verhindert wird?

$\gamma = \frac{1}{\mu_0} \ln\left(\frac{M}{m}\right)$

e) Wie viele Halbdrehungen muss der Seemann somit für $ln(\mathrm{M/m}) = 2{,}3$ und $\mu_0 = 0{,}23$ das Seil mindestens um den Ausleger führen?

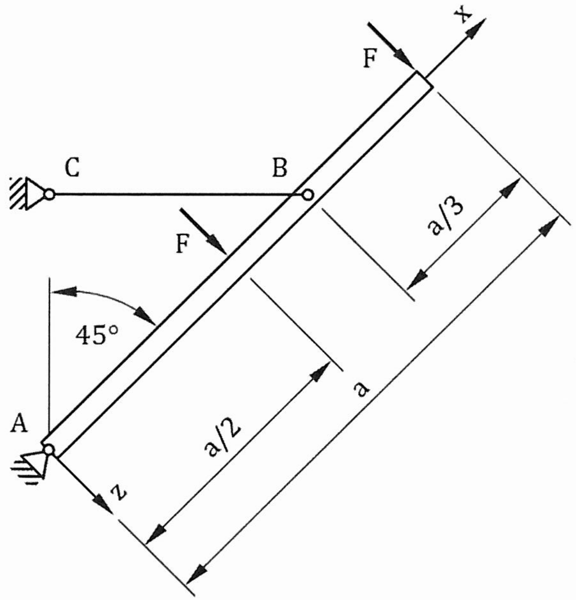
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

☐ 4 ☒ 5 ☐ 6

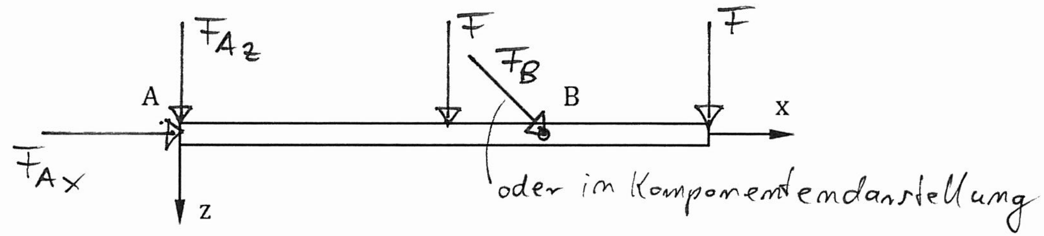
da nur ungerade Anzahlen an Halbdrehungen gemäß Aufgabenstellung sinnvoll

Aufgabe 5 (23 Punkte)

Zu Dekorationszwecken sind im Eingangsbereich einer Veranstaltungshalle Fahnen an Fahnenstangen angebracht. Eine solche Fahnenstange kann als Balken der Länge a betrachtet werden, der im Punkt A drehbar an der Wand gelagert ist. Weiterhin ist der Balken am Punkt B über einen masselosen Pendelstab mit der Hallenwand (Punkt C) verbunden. Das Eigengewicht des Balkens soll vernachlässigt werden. Die auf den Balken wirkende Last infolge des Gewichts der Fahne sowie des daran angreifenden Winds wird vereinfachend über zwei Einzelkräfte F modelliert. Das System ist im Gleichgewicht.



a) Schneiden Sie den Balken frei, zeichnen Sie in die Freischnittskizze alle angreifenden Kräfte und Momente ein und benennen Sie diese.



F_{Ax}, F_{Az} und/oder F_B wahlweise in umgekehrte Richtung zeigend → angepasste Vorzeichen in b) + c)

b) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Balken an.

$$\sum_i F_{x_i} = 0 : \; F_{Ax} + \frac{1}{\sqrt{2}} F_B = 0$$

$$\sum_i F_{z_i} = 0 : \; F_{Az} + 2F + \frac{1}{\sqrt{2}} F_B = 0$$

$$\sum_i M_{z_i}^{(A)} = 0 : \; -F\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} F_B \frac{2}{3} a - F a = 0$$

c) Bestimmen Sie die Lagerkraft F_A sowie die Stabkraft F_B.

$F_{Ax} = \frac{9}{4} F$, $F_{Az} = \frac{1}{4} F$

$F_B = -\frac{9}{4} F \sqrt{2}$

d) Bestimmen Sie unter Verwendung von Klammerfunktionen die Verläufe der Normalkraft, der kontinuierlichen Belastung, der Querkraft und des Biegemoments.

$N(x) = -\frac{9}{4} F \left(\langle x-0\rangle^0\right) + \frac{9}{4} F \langle x - \frac{2}{3} a\rangle^0$

$q(x) = 0$

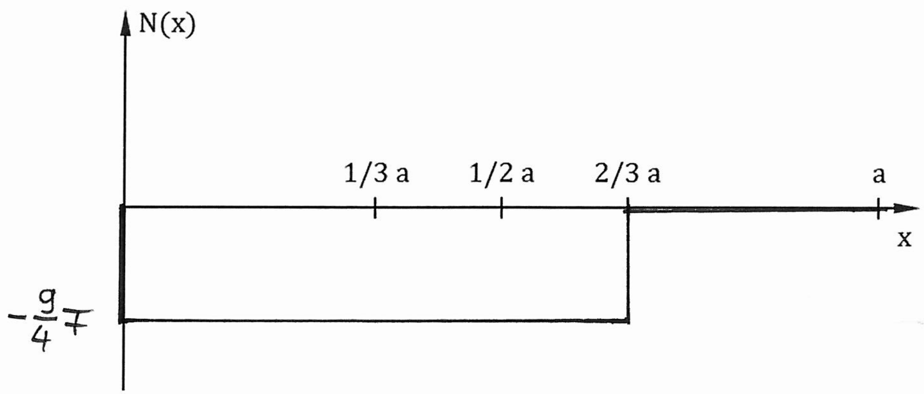
$Q(x) = -\frac{1}{4} F\left(\langle x-0\rangle^0\right) - F\langle x-\frac{a}{2}\rangle^0 + \frac{9}{4} F \langle x-\frac{2}{3}a\rangle^0$

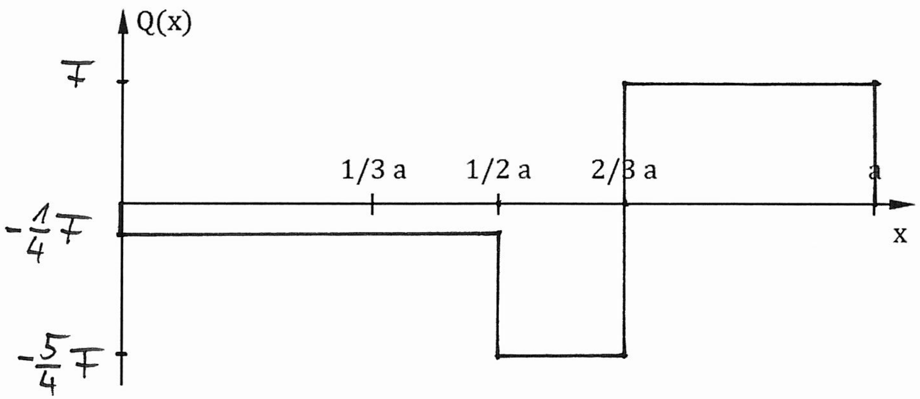
$\left(-F\langle x-a\rangle^0\right)$

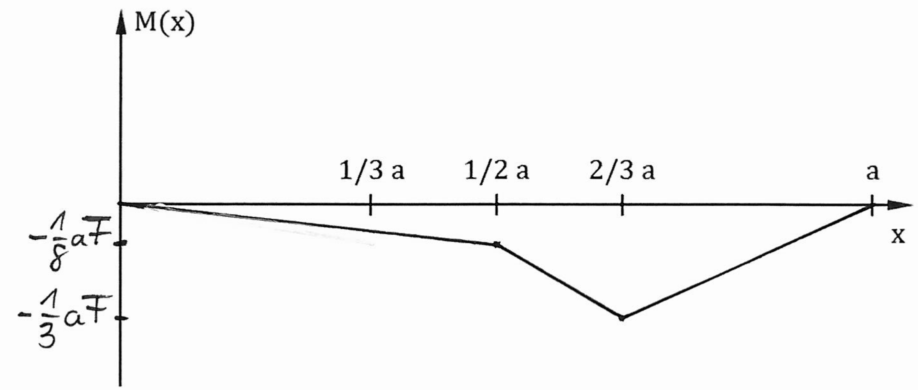
$M(x) = -\frac{1}{4} F \langle x-0\rangle^1 - F\langle x - \frac{a}{2}\rangle^1 + \frac{9}{4} F\langle x-\frac{2}{3}a\rangle^1$

$\left(-F\langle x-a\rangle^1\right)$

e) Skizzieren Sie die Verläufe der Normalkraft, der Querkraft und des Biegemoments im Balken. Bemaßen Sie die vertikalen Achsen.

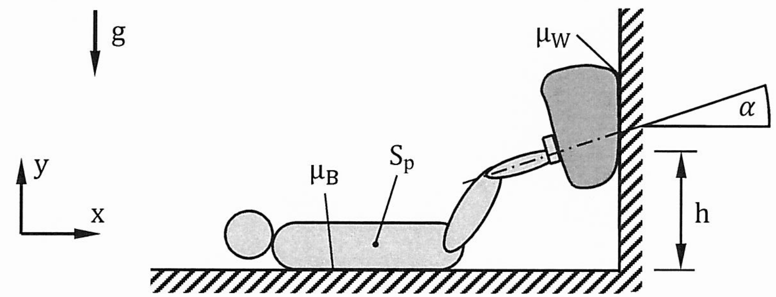




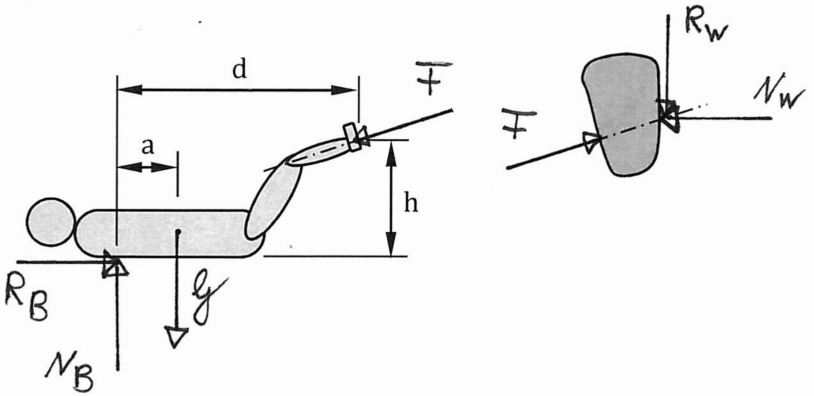


Aufgabe 6 (12 Punkte)

Ein Patient (Gewichtskraft G, Schwerpunkt S_p) muss in der Physiotherapie liegend ein masseloses Kissen gegen die Wand drücken. Der Patient bringt hierfür senkrecht zur Kissenoberfläche (Winkel α gegenüber der Horizontalen) die Kraft F in der Höhe h auf. Zwischen dem Kissen und der Wand liegt der Haftreibungskoeffizient μ_W und zwischen dem Patienten und dem Boden der Haftreibungskoeffizient μ_B vor. Die Fläche zwischen den Füßen des Patienten und dem Kissen ist glatt. Das System befindet sich in Ruhe.



a) Zeichnen Sie in die unten abgebildete Freischnittskizze des Patienten und des Kissens die wirkenden Kräfte und Momente ein und benennen Sie diese. Die Wirkungslinien der Normalkraft am Kontaktpunkt mit dem Boden und der Gewichtskraft des Patienten haben den horizontalen Abstand a voneinander.



R_B, N_B, R_W, N_W und/oder F wahlweise in umgekehrte Richtung zeigend
↳ angepasste Vorzeichen in b) + d) + e)

b) Bestimmen Sie die Normal- und die Reibungskraft zwischen dem Kissen und der Wand.

$N_W = F\cos\alpha$, $R_W = F\sin\alpha$

c) Welche Bedingung muss für den Haftreibungskoeffizienten μ_W gelten, damit das Kissen an der Wand haftet? Zwischen dem Patienten und dem Boden liegt dabei Haftreibung vor.

$$\mu_W \geq \frac{|R_W|}{|N_W|} = \tan\alpha$$

d) Geben Sie eine zur Bestimmung des horizontalen Abstandes a geeignete Gleichgewichtsbedingung an.

$$\sum_i M_{z_i}^{(B)} = 0: \; -Ga + F(h\cos\alpha - d\sin\alpha) = 0$$

e) Bestimmen Sie den horizontalen Abstand a zwischen der Normalkraft am Kontaktpunkt mit dem Boden und der Gewichtskraft des Patienten.

$$a = \frac{F}{G}(h\cos\alpha - d\sin\alpha)$$

f) Wie groß muss der Haftreibungskoeffizient μ_B mindestens sein, damit der Patient bei Belastung des Kissens nicht auf dem Boden wegrutscht?

$$\mu_B \geq \frac{|R_B|}{|N_B|} = \frac{F\cos\alpha}{G + F\sin\alpha}$$

ENDE