**26. August 2013**

**Bachelorprüfung in Technische Mechanik I**

| Nachname, Vorname | |
|---|---|
| E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig) | |
| Matr.-Nummer | Fachrichtung<br>Musterlösung |

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

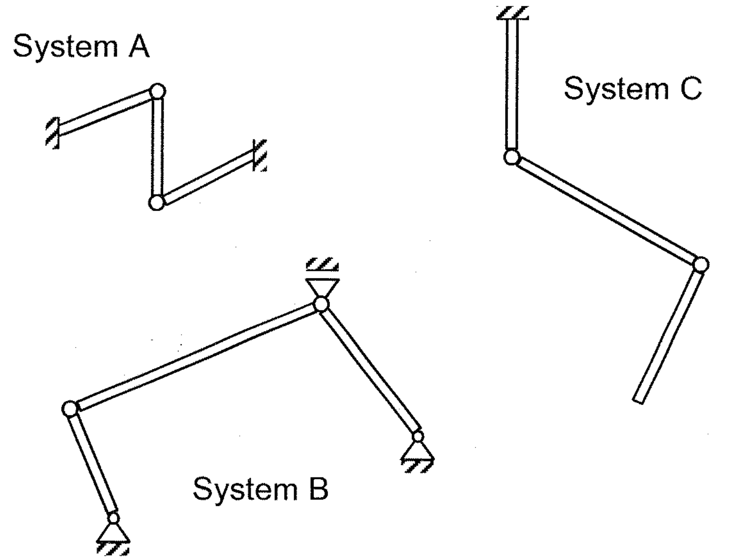
............................................

(Unterschrift)

| Punkte | Korrektur |
|---|---|
| $\sum$ 75 | |

**Aufgabe 1** (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden ebenen Systeme starrer Stäbe die Anzahl der Freiheitsgrade f und die Anzahl der überzähligen Lagerreaktionen n. Klassifizieren Sie die Lagerung.

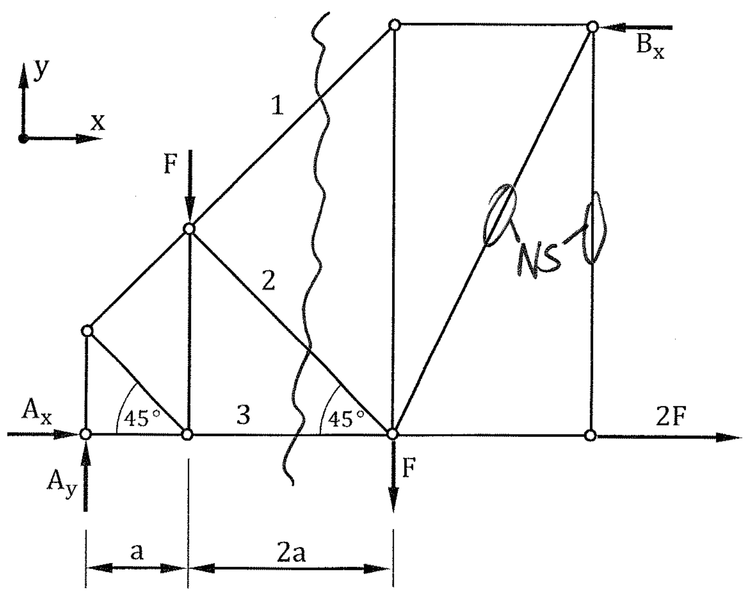



| System | f | n | statisch bestimmt | kinematisch bestimmt |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | ☐ | ☒ |
| B | 0 | 0 | ☒ | ☒ |
| C | 2 | 0 | ☒ | ☐ |

6

**Aufgabe 2** (15 Punkte)

Das dargestellte freigeschnittene Fachwerk aus masselosen Stäben soll untersucht werden. Es befindet sich im Gleichgewicht. $F$ ist bekannt und $A_x$, $A_y$ sowie $B_x$ sind Lagerkräfte.




a) Bestimmen Sie die Anzahl der Knoten und Stäbe.

$k =$ 8, $s =$ 13

b) Geben Sie die notwendige Bedingung für ebene Fachwerke an, die erfüllt sein muss, damit die Stab- und Lagerkräfte ermittelt werden können.

$2k = s + q$

c) Bestimmen Sie die Anzahl der überzähligen Lagerwertigkeiten $n$ sowie die der Freiheitsgrade $f$ des Fachwerks.

$n =$ 0, $f =$ 0

d) Markieren Sie die Nullstäbe des Fachwerks in der Skizze.

e) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der Lagerkräfte auf.

$\sum_i F_{x_i} = A_x - B_x + 2F = 0$

$\sum_i F_{y_i} = A_y - 2F = 0$

$\sum_i M_{z_i}^{(A)} = -4aF + 4aB_x = 0$

f) Bestimmen Sie die Lagerkräfte.

$A_x = -F$

$A_y = 2F$

$B_x = F$

g) Bestimmen Sie einen geeigneten Ritter-Schnitt, um die Stabkräfte $S_1$, $S_2$ und $S_3$ zu ermitteln. Zeichnen Sie den Schnitt in die Skizze ein.

h) Bestimmen Sie die Stabkräfte $S_1$, $S_2$ und $S_3$.

$S_1 = -\sqrt{2}F$

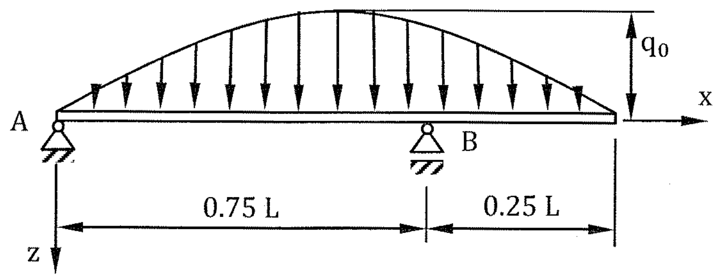
$S_2 = 0$

$S_3 = 2F$

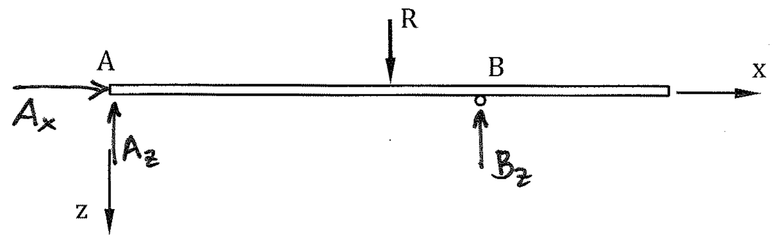
15

**Aufgabe 3** (13 Punkte)

Ein masseloser Balken der Länge $L$ ist in den Punkten $A$ und $B$ gelagert und befindet sich im Gleichgewicht. Der Balken ist mit einer Streckenlast belastet, deren Verlauf einer quadratischen Parabel (Maximalwert $q(0.5L) = q_0$) entspricht. An den Balkenenden ist der Wert der Streckenlast null.




a) Ergänzen Sie die folgende Freischnittskizze um die Lagerkräfte und benennen Sie diese. Die Streckenlast wird durch die Resultierende $R$ berücksichtigt.




b) Bestimmen Sie die Lagerkräfte in Abhängigkeit von $R$.

$A_x = 0$

$A_z = \frac{1}{3} R$

$B_z = \frac{2}{3} R$

c) Die Streckenlast kann dargestellt werden als $q(x) = ax^2 + bx + c$. Bestimmen Sie die Koeffizienten in Abhängigkeit von $q_0$ und $L$.

$a = -\frac{4q_0}{L^2}$, $b = \frac{4q_0}{L}$, $c = 0$

d) Bestimmen Sie die Resultierende $R$ der Streckenlast in Abhängigkeit von $q_0$ und $L$.

$R = \frac{2}{3} q_0 L$

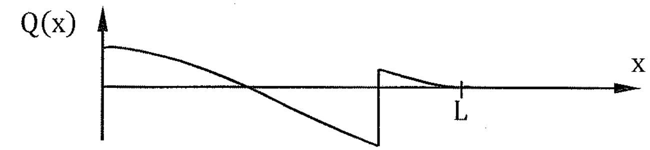
e) Bestimmen Sie den Querkraftverlauf $Q(x)$ mit Hilfe der Klammerfunktion in Abhängigkeit von $q_0$ und $L$.

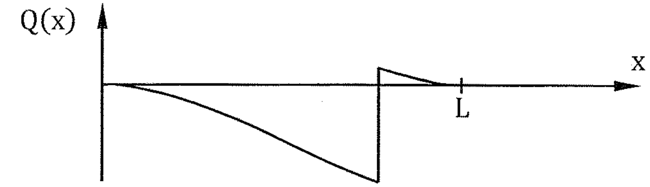
$Q(x) = \frac{4q_0}{3L^2} x^3 - \frac{2q_0}{L} x^2 + \frac{2}{9} q_0 L + \frac{4}{9} q_0 L \langle x - \frac{3}{4}L \rangle^0$

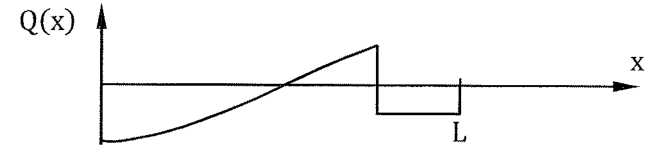
f) Bestimmen Sie den Biegemomentenverlauf $M(x)$ mit Hilfe der Klammerfunktion in Abhängigkeit von $q_0$ und $L$.

$M(x) = \frac{q_0}{3L^2} x^4 - \frac{2q_0}{3L} x^3 + \frac{2}{9} q_0 L x + \frac{4}{9} q_0 L \langle x - \frac{3}{4}L \rangle$

g) Kreuzen Sie den qualitativ passenden Querkraftverlauf an.

☒


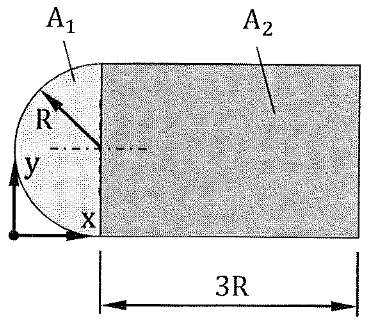

☐



☐



13

**Aufgabe 4** (16 Punkte)

Der Gesamtschwerpunkt der dargestellten Fläche soll untersucht werden. Die Fläche setzt sich aus den Teilflächen $A_1$ und $A_2$ zusammen.




a) Berechnen Sie die Flächeninhalte der Teilflächen.

$A_1 = \frac{1}{2}\pi R^2$, $A_2 = 6R^2$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der zusammengesetzten Fläche.

$A_{ges} = \left(\frac{1}{2}\pi + 6\right) R^2$

c) Berechnen Sie die Flächenschwerpunkte der Teilflächen im dargestellten Koordinatensystem.

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} R - \frac{4R}{3\pi} \\ R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}R \\ R \\ 0 \end{bmatrix}$$

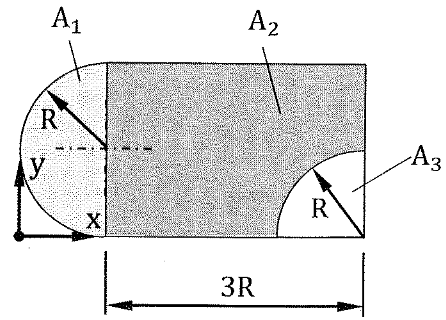
d) Wie lässt sich der Gesamtschwerpunkt der Fläche aus den Teilflächen berechnen?

$$\mathbf{S}_{ges}(\mathbf{S}_i, A_i, A_{ges}) = \frac{1}{A_{ges}} \sum_{i=1}^{2} \mathbf{S}_i A_i$$

e) Berechnen Sie den Gesamtschwerpunkt der Fläche.

$$\mathbf{S}_{ges} = \begin{bmatrix} \frac{3\pi + 86}{3\pi + 36} R \\ R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Im Folgenden wird aus der Fläche der Viertelkreis $A_3$ herausgestanzt, wie in der Skizze dargestellt.




f) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Fläche $A_3$ im dargestellten Koordinatensystem.

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 4R - \frac{4R}{3\pi} \\ \frac{4R}{3\pi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

g) Wie ändern sich die Koordinaten des Gesamtschwerpunkts im gegebenen Koordinatensystem durch Entfernen der Fläche $A_3$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| x - Koordinate | ☐ wird größer | ☒ wird kleiner | ☐ bleibt gleich |
| y - Koordinate | ☒ wird größer | ☐ wird kleiner | ☐ bleibt gleich |

16

**Aufgabe 5** (9 Punkte)

Im Koordinatensystem K mit Ursprung O sind die dimensionslosen Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{OB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{OC} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

zu den Punkten A, B, C eines starren Körpers bekannt. An den Punkten greifen die dimensionslosen Kräfte

$$\mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}$$

an. Über die Kraft $\mathbf{F}_C$ ist bekannt, dass Sie senkrecht auf $\mathbf{F}_A$ und senkrecht auf $\mathbf{F}_B$ steht und den Betrag $|\mathbf{F}_C| = 6$ hat. Des Weiteren gilt $C_y < 0$.

a) Bestimmen Sie den Kraftvektor $\mathbf{F}_C$.

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Momente.

$$\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \\ -16 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie den Kraftwinder $(\mathbf{F}, \mathbf{M}^{(O)})$ bezüglich des Ursprungs O des Koordinatensystems.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(O)} = \begin{bmatrix} 18 \\ -11 \\ -18 \end{bmatrix}$$

Ein weiterer Punkt D des Körpers wird durch den Ortsvektor $\mathbf{r}_{OD}$ beschrieben.

d) Wie lautet die Transformationsbeziehung für das Moment für einen Wechsel des Bezugspunktes von O nach D?

$\mathbf{M}^{(D)} = \underline{M}^{(o)} + \underline{r}_{DO} \times \underline{F}$

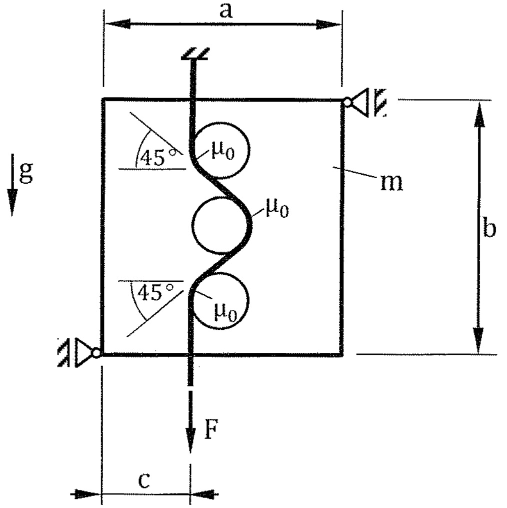
e) Ist das System im Gleichgewicht?

☐ ja ☒ nein ☐ keine Aussage möglich

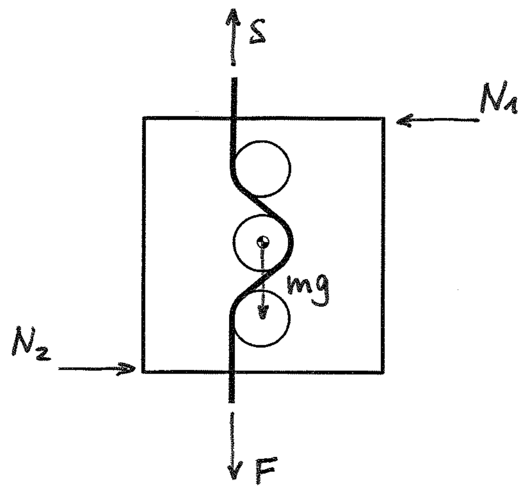
9

**Aufgabe 6** (16 Punkte)

Um sich beim Klettern sicher abseilen zu können, werden Abseilgeräte verwendet, welche die Seilreibung ausnutzen. Ein mechanisches Ersatzsystem kann wie folgt modelliert werden.
Ein Körper der Masse $m$ wird von zwei Lagern so gehalten, dass er sich nicht horizontal verschieben und nicht verdrehen kann. Um die vertikale Bewegungsmöglichkeit einzuschränken, wird ein Mechanismus verwendet, der auf Seilreibung basiert. Ein an der Decke befestigtes masseloses Seil wird, wie in der Skizze dargestellt, um drei raue Bolzen geführt (Reibkoeffizient $\mu_0$). Am unteren Ende des Seils wirkt die Kraft $F$.




a) Schneiden Sie das System, bestehend aus Block und Bolzen und Seil, frei.




b) Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen an.

$N_2 - N_1 = 0$

$S - mg - F = 0$

$c(S - F) - \frac{a}{2} mg + b N_1 = 0$

c) Bestimmen Sie die Seilkraft zwischen der oberen Einspannung und dem obersten Bolzen.

$S = F + mg$

d) Bestimmen Sie die Lagerkräfte.

$N_1 = \frac{a - 2c}{2b} mg$

$N_2 = \frac{a - 2c}{2b} mg$

e) Geben Sie den Gesamtumschlingungswinkel $\varphi$ an.

$\varphi = 180° \quad (\pi)$

f) Geben Sie die Haftbedingung der Seilreibung für zwei Kräfte $F_1$ und $F_2$ ($F_1 > F_2$) bei einem Umschlingungswinkel $\varphi$ an.

$\frac{F_1}{F_2} \leq e^{\mu_0 \varphi}$

g) Was muss für die Kraft $F$ gelten, damit die Haftbedingung erfüllt ist?

$F \geq \frac{mg}{e^{\mu_0 \pi} - 1}$

**ENDE**

16