Institut für Technische und Num. Mechanik
Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. P. Eberhard

29. August 2011

Bachelorprüfung in Technischer Mechanik 1

Nachname, Vorname	
MUSTERLÖSUNG	
Matr.-Nummer	Fachrichtung

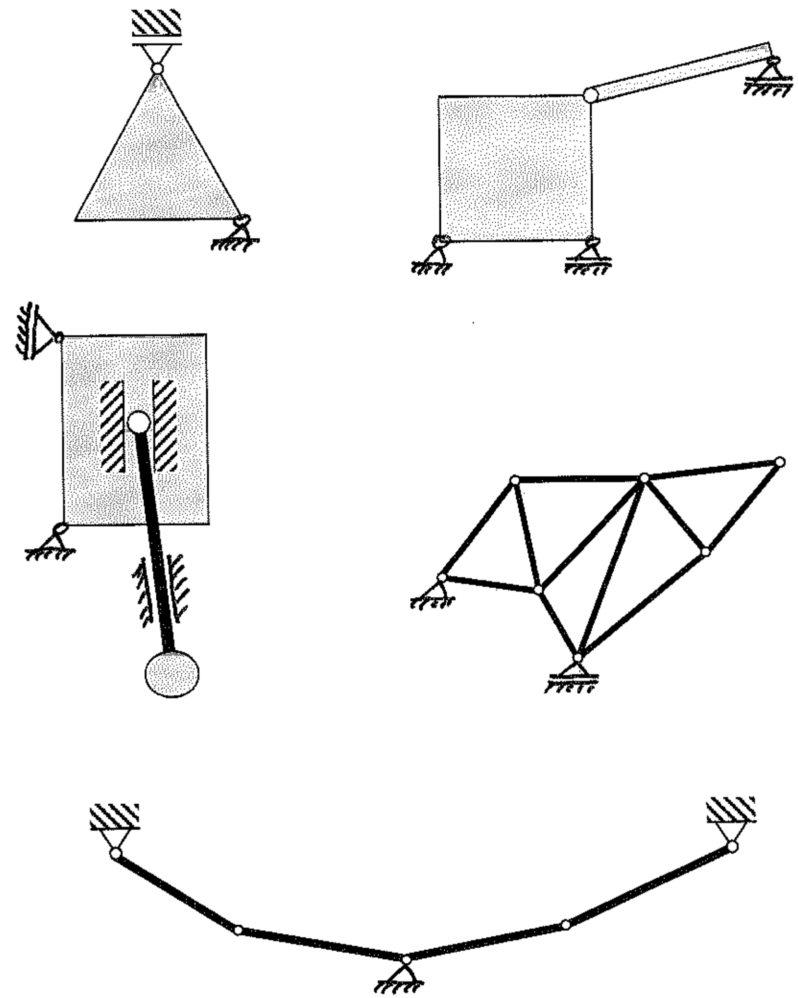
1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

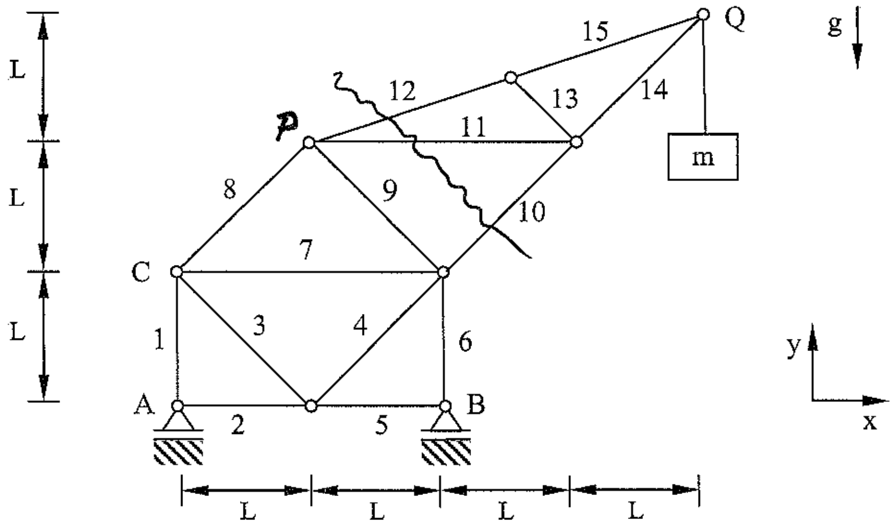
Aufgabe 1 (7 Punkte)

Vervollständigen Sie für die dargestellten ebenen Systeme aus Starrkörpern die Lagerungen so, dass sich eine bestimmte Lagerung des jeweiligen Gesamtsystems ergibt.



Aufgabe 2 (15 Punkte)

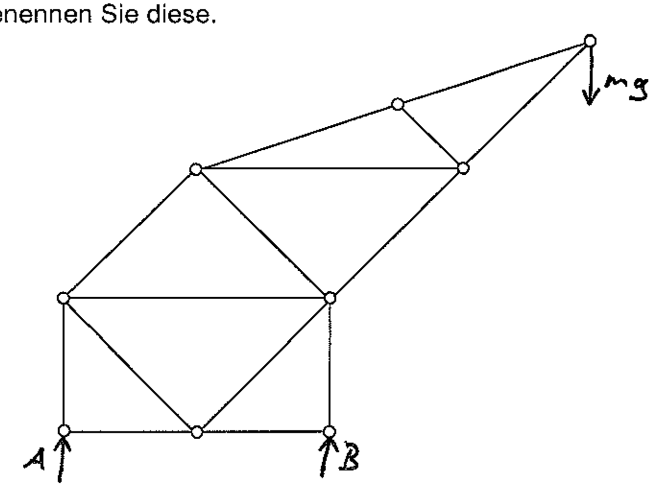
Untersuchen Sie das dargestellte ebene Fachwerk. Im Punkt Q ist das Fachwerk durch ein Gewicht der Masse m belastet.



a) Welche Aussagen treffen zu?

- ☐ das Fachwerk ist als Ganzes bestimmt gelagert
- ☐ die Stäbe sind durch Biegemomente belastet
- ☒ das Fachwerk ist abbrechbar
- ☐ das Fachwerk ist kinematisch bestimmt gelagert
- ☒ mit Starrkörpermechanik sind alle Stabkräfte bestimmbar
- ☒ das Fachwerk ist einfach

b) Schneiden Sie das Fachwerk frei, zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte ein und benennen Sie diese.



c) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Lagerkräfte für das Fachwerk als Ganzes auf.

$A + B = mg$

$2AL = -2mgL$

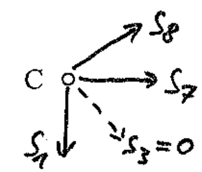
d) Berechnen Sie die Lagerkräfte.

$A = -mg$ $\qquad$ $B = 2mg$

e) Geben Sie die Indizes der weiteren Nullstäbe an.

3, 2, 4, 5, 11, 13

f) Zeichnen Sie alle am Knoten C angreifenden Kräfte in die Skizze ein und benennen Sie diese.



g) Berechnen Sie die in den Stäben 7 und 8 wirkenden Kräfte.

$S_7 = -mg$, $S_8 = \sqrt{2}\,mg$

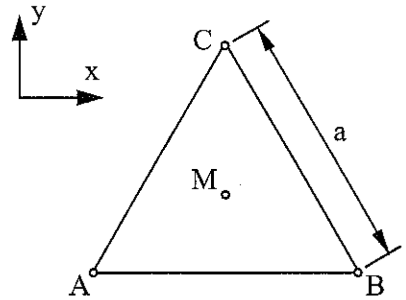
h) Zeichnen Sie einen zur Berechnung der Stabkraft S_{10} geeigneten Ritter-Schnitt und einen geeigneten Bezugspunkt P in die Aufgabenskizze ein.

i) Berechnen Sie die Stabkraft S_{10}.

$S_{10} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}\,mg$

Aufgabe 3 (11 Punkte)

An einer dreieckigen Platte greifen an den Ecken die eingeprägten Kräfte $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ und $\mathbf{F}_C$ an. Bei der Platte handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge a. Der Punkt M bezeichnet den Flächenmittelpunkt des Dreiecks.



Gegeben sind die Größen

$$\mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AC} = \begin{bmatrix} a/2 \\ a\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2F/\sqrt{3} \\ F/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2F/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

a) Die Kraft $\mathbf{F}_B$ habe den Betrag F und die Richtung [-1 1 1]. Bestimmen Sie den dazugehörigen Kraftvektor sowie den relativen Ortsvektor $\mathbf{r}_{AM}$.

$$\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} -F/\sqrt{3} \\ F/\sqrt{3} \\ F/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AM} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet das Moment der Kraft $\mathbf{F}_C$ bezüglich des Punktes A?

$$\mathbf{M}_C^A = \begin{bmatrix} Fa \\ -Fa/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Wie lautet der resultierende Kraftwinder $(\mathbf{F}, \mathbf{M}^A)$ der Kräfte $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ und $\mathbf{F}_C$ bzgl. des Punktes A?

$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}F \\ \sqrt{3}F \\ \frac{4}{\sqrt{3}}F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Fa \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}Fa \\ \frac{1}{\sqrt{3}}Fa \end{bmatrix} \right)$$

d) Wie lautet die Beziehungen für die Transformation des Kraftwinders von Punkt A zu Punkt M?

- ☐ $(\mathbf{F},\ \mathbf{r}_{AM} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}^A)$
- ☒ $(\mathbf{F},\ \mathbf{r}_{MA} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}^A)$
- ☐ $(\mathbf{F},\ \mathbf{r}_{MA} \times \mathbf{M}^A + \mathbf{F})$
- ☐ $(\mathbf{M},\ \mathbf{r}_{MA} \times \mathbf{M}^A + \mathbf{F})$
- ☐ $(\mathbf{r}_{MA} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}^A,\ \mathbf{r}_{MA} \times \mathbf{M}^A)$
- ☐ $(\mathbf{F},\ \mathbf{F} \times \mathbf{r}_{MA} + \mathbf{M}^A)$

e) Berechnen Sie den äquivalenten Kraftwinder bzgl. des Punktes M.

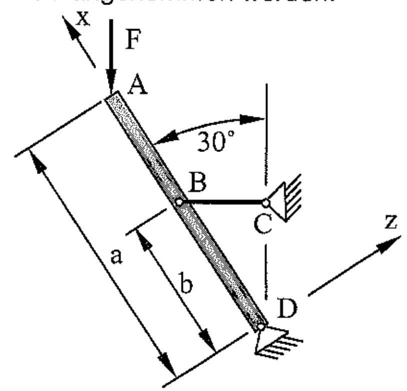
$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}F \\ \sqrt{3}F \\ \frac{4}{\sqrt{3}}F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Fa \\ 0 \\ -\frac{1}{6}(\sqrt{3}+1)Fa \end{bmatrix} \right)$$

f) Ist das System für F>0 im Gleichgewicht?

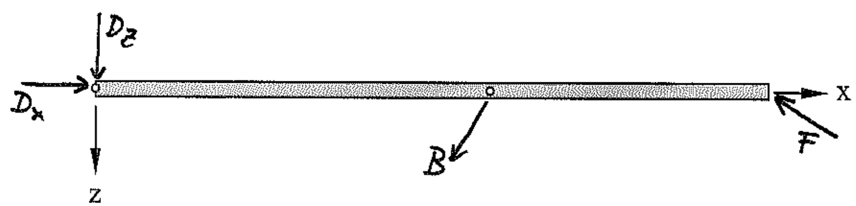
○ ja ☒ nein ○ keine Aussage möglich

Aufgabe 4 (Punkte)

Die Stütze einer Dachkonstruktion soll untersucht werden. Die Stütze wird hierzu als Balken (Länge a) modelliert, der am Punkt B über eine Pendelstütze mit dem Punkt C einer Wand verbunden ist. Die Last des Dachs soll vereinfachend als im Punkt A wirkende Einzelkraft F angenommen werden.



a) Schneiden Sie den Balken frei, zeichnen Sie alle angreifenden Kräfte und Momente in die Freischnittskizze ein und benennen Sie diese.



b) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Balken auf.

$D_x - \frac{1}{2} B - \frac{\sqrt{3}}{2} F = 0$

$D_z + \frac{\sqrt{3}}{2} B - \frac{1}{2} F = 0$

$b D_z + \frac{1}{2}(a-b) F = 0$

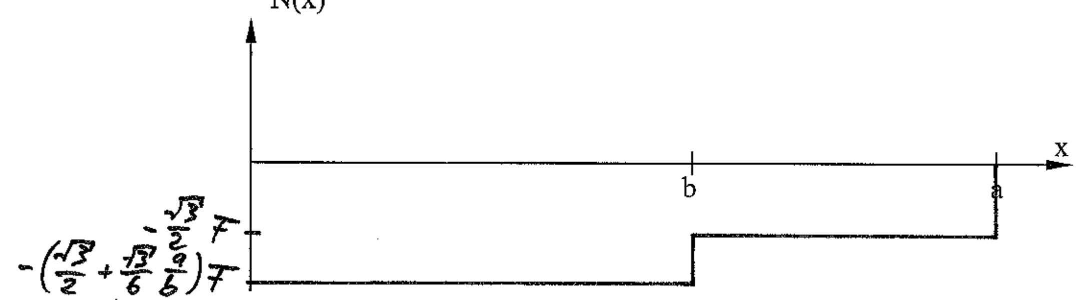
c) Bestimmen Sie die Verläufe der Normalkraft, der Querkraft und des Biegemoments im Balken.

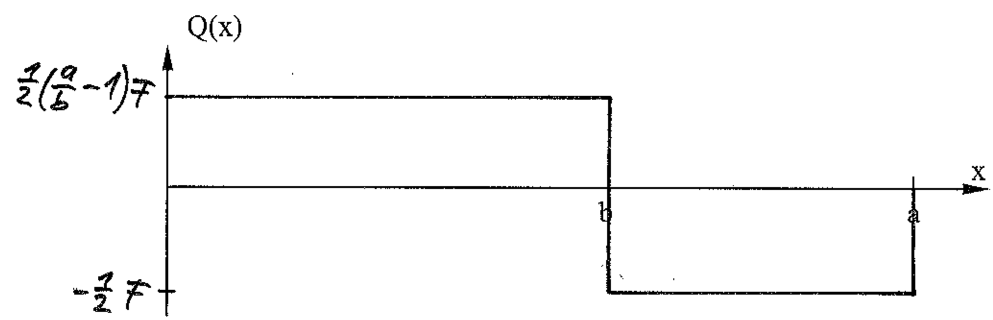
$N(x) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{a}{b}\right) F \{x\}^0 + \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{a}{b} F \{x-b\}^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} F \{x-a\}^0$

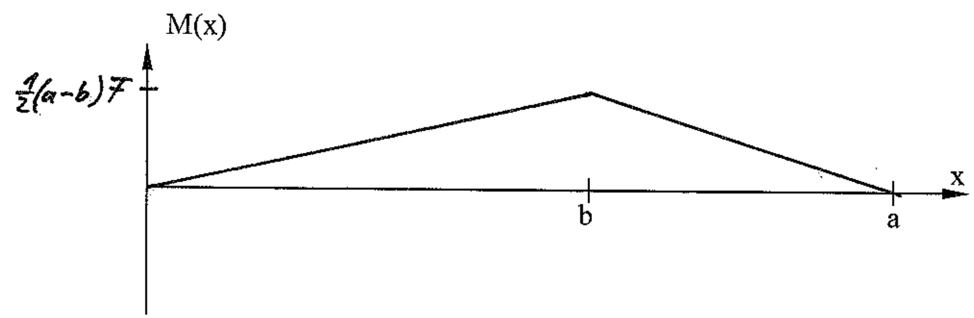
$Q(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 1\right) F \{x\}^0 - \frac{a}{2b} F \{x-b\}^0 + \frac{1}{2} F \{x-a\}^0$

$M(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 1\right) F \{x\}^1 - \frac{a}{2b} F \{x-b\}^1 + \frac{1}{2} F \{x-a\}^1$

d) Skizzieren Sie den Normalkraftverlauf, den Querkraftverlauf und den Biegemomentenverlauf im Balken in den folgenden Abbildungen. Beschriften Sie die zugehörigen Achsen.







e) Bestimmen Sie das betragsmäßige Maximum des Biegemoments.

$|M_{MAX}| = \frac{1}{2}(a-b)F$

f) Wie muss die Länge b gewählt werden, damit die Biegemomentenbelastung im Balken minimal wird?

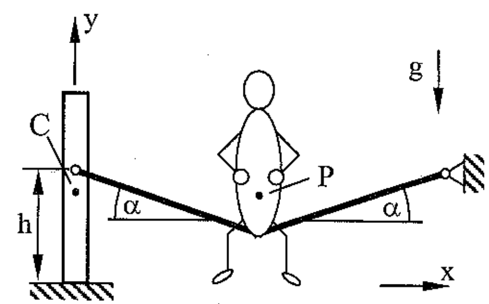
$b = a$

g) Wie groß ist für die in Teilaufgabe f) bestimmte Länge b die Kraft in der Pendelstütze?

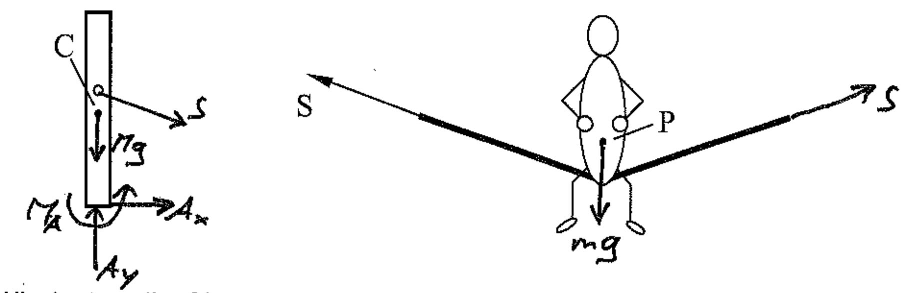
$B = F/\sqrt{3}$

Aufgabe 5 (Punkte)

In einer Hängematte sitzt mittig eine Person (Masse m, Schwerpunkt P). Die Hängematte ist links an einem Pfosten (Masse M, Schwerpunkt C) und rechts an einer Wand, jeweils in der Höhe h befestigt. Das Eigengewicht der Hängematte kann vernachlässigt werden.



a) Schneiden Sie die Körper frei. Zeichnen Sie alle auftretenden Kräfte und Momente in die Freischnittskizze ein und bezeichnen Sie diese.



b) Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Person mit Hängematte sowie für den Pfosten?

Person mit Hängematte (Gleichgewichtsbedingung in vertikaler Richtung):

$mg - 2S\sin\alpha = 0$

Pfosten:

$A_x + S\cos\alpha = 0$

$A_y - S\sin\alpha - Mg = 0$

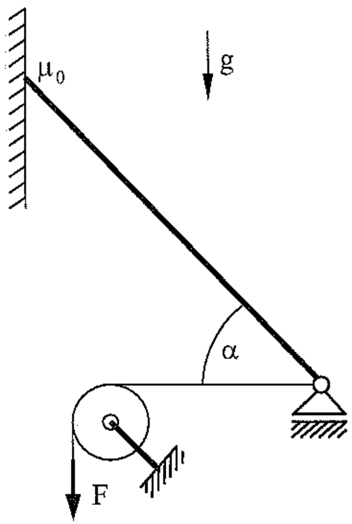
$M_A - Sh\cos\alpha = 0$

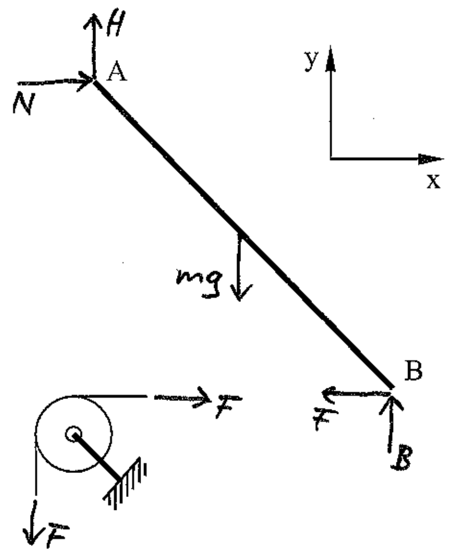
c) Berechnen Sie den Betrag der Seilkraft S.

$S = \frac{mg}{2\sin\alpha}$

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Ein homogener Stab (Länge L, Masse m) lehnt an einer Wand (Haftreibungskoeffizient μ_0). An seinem unteren Ende wird er durch ein mit der Kraft F gespanntes Seil gehalten. Das Seil läuft über eine reibungsfreie Rolle.





a) Vervollständigen Sie die Freischnittskizze, tragen Sie alle angreifenden Kräfte ein und benennen Sie diese.

b) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den Stab auf.

$N - F = 0$

$H - mg + B = 0$

$mg \frac{L}{2} \cos\alpha - HL\cos\alpha - NL\sin\alpha = 0$

c) Berechnen Sie die Reaktionskräfte im Punkt A.

$N = F$ $\quad$ $H = \frac{mg}{2} - F\tan\alpha$

d) Geben Sie die Haftreibungsbedingung an.

$\left|\frac{mg}{2} - F\tan\alpha\right| \le \mu_0 F$

e) Geben sie den zulässigen Bereich für die Kraft F an, in dem der Stab nicht rutscht.

$2(-\mu_0 + \tan\alpha) \le \frac{mg}{F} \le 2(\mu_0 + \tan\alpha)$

f) Was bedeutet der Spezialfall $\tan\alpha = \mu_0$?

- ☐ F darf beliebig klein werden
- ☒ F darf beliebig groß werden
- ☐ keine Aussage möglich
- ☐ m darf beliebig groß werden

Nun verklemmt sich die Rolle. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Rolle und Seil ist μ_R.

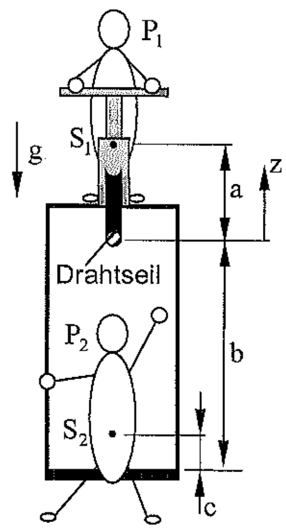
g) In welchem Bereich muss die Kraft F in Abhängigkeit von F^* (Kraft im Seil zwischen Rolle und Stab) liegen, damit das Seil nicht rutscht?

$F^* e^{-\frac{\pi}{2}\mu_R} \le F \le F^* e^{\frac{\pi}{2}\mu_R}$

h) Welche Auswirkung hat die klemmende Rolle auf die Grenzen der Kraft F aus Teilaufgabe e) ?

- ☒ Bereich wird größer
- ○ Bereich wird kleiner
- ○ bleibt gleich

Aufgabe 7 (Punkte)



Die griechischen Zwillingsbrüder Ellipsos sind als Artisten weltberühmt für ihre waghalsige Drahtseilnummer. Janis (P_1) fährt auf dem Drahtseil ein Motorrad, an dessen Vorderachse unter dem Drahtseil hängend ein Rahmen montiert ist. Auf diesem Rahmen vollführt Filippos (P_2) waghalsige akrobatische Kunststücke. Beim Design der Rahmenkonstruktion muss die Sicherheit bei der Durchführung der artistischen Nummer berücksichtigt werden.

Bei der Auslegung werden P_1, das Motorrad und der Rahmen vereinfachend als ein starrer Körper (Masse m_1, Schwerpunkt S_1) betrachtet. Der Schwerpunkt von P_2 (Masse m_2) ist mit S_2 gegeben.

a) Bestimmen Sie die vertikale Schwerpunktslage von P_2 während des Auftritts.

$z_{S_2} = -b + c$

b) Bestimmen sie die vertikale Lage des Gesamtschwerpunkts von m_1 und m_2.

$z_S = ((-b+c)m_2 + a m_1)/(m_1 + m_2)$

c) Welches Kriterium muss gelten, damit die beiden Artisten nicht vom Seil herunterkippen?

$z_S < 0$

d) Berechnen Sie den vertikalen Mindestabstand zwischen der Sitzstange am unteren Ende des Rahmens und dem Drahtseil, der nötig ist, damit P_2 sicher auf der Sitzstange aufstehen kann. Im Stehen liegt der Schwerpunkt S_2 auf der Höhe c=h über der Sitzstange.

$b > a \frac{m_1}{m_2} + h$

e) P_1 steht nun auf dem Motorrad auf. Was kann P_2 machen, um die Sicherheit gegen das Herunterkippen vom Drahtseil zu erhöhen?

- ○ nach oben klettern
- ☒ sich an die Sitzstange hängen
- ○ winken

ENDE