

Systeme gebundener Vektoren

Definition

Ein gebundener Vektor \mathbf{a} besitzt einen festen Anfangspunkt O . Seine mathematische Beschreibung kann durch einen Vektor \mathbf{a} und einen Ortsvektor \mathbf{r}_{PO} mit dem Anfangs- oder Bezugspunkt P erfolgen

$$\{\mathbf{r}_{PO}, \mathbf{a}\}.$$

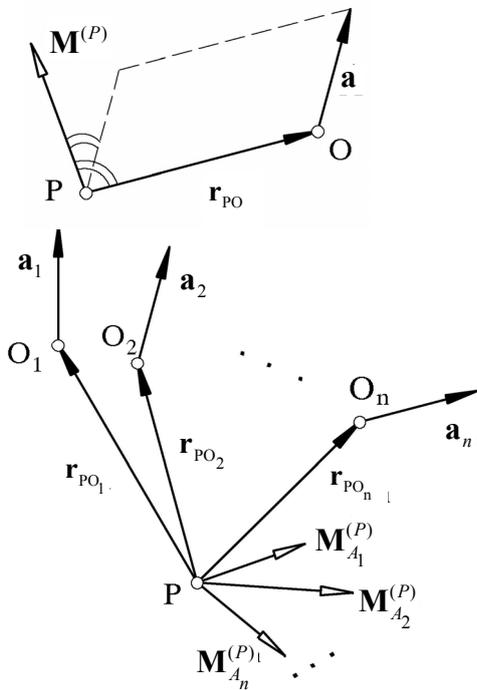
Die Wirkung eines gebundenen Vektors wird durch das Moment

$$\mathbf{M}^{(P)} = \mathbf{r}_{PO} \times \mathbf{a}$$

definiert.

Ein System A , das durch die gebundenen Vektoren \mathbf{a}_i , $i = 1(1)n$, mit den festen Anfangspunkten O_i gebildet wird, kann nicht nach den Regeln der Vektoralgebra durch Addition zusammengefasst werden, da die Parallelverschiebung der Vektoren \mathbf{a}_i nicht erlaubt ist. Jedoch können die Momente mit dem gemeinsamen Bezugspunkt P addiert werden

$$\mathbf{M}_A^{(P)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{A_i}^{(P)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{PO_i} \times \mathbf{a}_i.$$



Äquivalenz

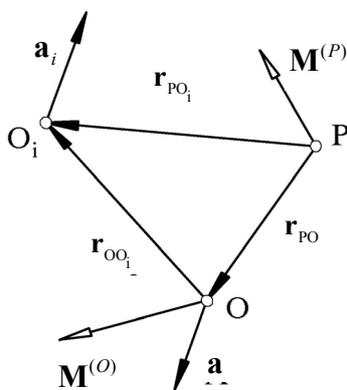
Zwei Systeme A und B von gebundenen Vektoren heißen äquivalent, wenn sie für jeden beliebigen Bezugspunkt P dasselbe Moment ergeben (Äquivalenzaxiom)

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \sim (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m), \text{ falls } \mathbf{M}_A^{(P)} = \mathbf{M}_B^{(P)}, \text{ P beliebig.}$$

Für die praktische Anwendung ist das Äquivalenzaxiom wenig geeignet, da die Momentengleichheit für *jeden beliebigen* Bezugspunkt erfüllt sein muss.

Reduktion

Jedes System gebundener Vektoren kann auf einen äquivalenten Vektorwinder reduziert werden, der sich für *einen festen* Bezugspunkt O berechnen lässt. Der Vektorwinder entspricht den Anforderungen der Praxis.



Das Moment

$$\mathbf{M}^{(P)} = \mathbf{r}_{PO} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{OO_i} \times \mathbf{a}_i = \mathbf{r}_{PO} \times \mathbf{a} + \mathbf{M}^{(O)}$$

für den beliebigen Punkt P wird durch den von Punkt P abhängigen Ortsvektor \mathbf{r}_{PO} und die von P unabhängigen Vektoren

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{M}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{OO_i} \times \mathbf{a}_i$$

bestimmt. Damit ist der äquivalente Vektorwinder gefunden

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \sim (\mathbf{a}, \mathbf{M}^{(O)}) \sim (\mathbf{a}, \mathbf{M}^{(P)})$$

Die Elemente des Vektorwinders, der gebundene resultierende Vektor \mathbf{a} und das freie resultierende Moment $\mathbf{M}^{(O)}$, werden nach den Regeln der Vektoralgebra gebildet.

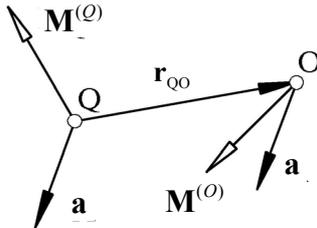
Zwei Systeme A und B von gebundenen Vektoren sind damit äquivalent, wenn ihre Winder übereinstimmen

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \sim (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m) \text{ , falls } \mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ und } \mathbf{M}_A^{(O)} = \mathbf{M}_B^{(O)} \text{ , } O \text{ fest.}$$

Transformation

Wird der feste Bezugspunkt O des Vektorwinders z.B. durch eine Koordinatentransformation in den ebenfalls festen Bezugspunkt Q verschoben, so ändert sich nur das zweite Element des Vektorwinders entsprechend dem Transformationsgesetz

$$\mathbf{M}^{(Q)} = \mathbf{r}_{QO} \times \mathbf{a} + \mathbf{M}^{(O)} \text{ .}$$



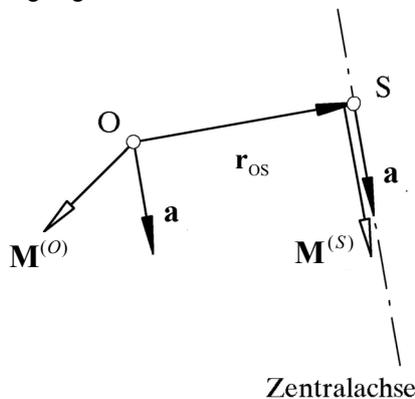
Die Vektorwinder eines Systems von gebundenen Vektoren bezüglich der Punkte O und Q sind äquivalent, wenn sich ihre Momente nach dem Transformationsgesetz ändern

$$(\mathbf{a}, \mathbf{M}^{(O)}) \sim (\mathbf{a}, \mathbf{M}^{(Q)}) \text{ ,}$$

$$\text{falls } \mathbf{M}^{(Q)} = \mathbf{r}_{QO} \times \mathbf{a} + \mathbf{M}^{(O)} \text{ , } O, Q \text{ fest.}$$

Vektorschraube - Normalform des Vektorwinders

Jeder Vektorwinder lässt sich durch Wechsel des Bezugspunktes von O nach S auf seine Normalform transformieren, in welcher der resultierende Vektor \mathbf{a} und das resultierende Moment $\mathbf{M}^{(S)} = p \mathbf{a}$ dieselbe Richtung besitzen. Man bezeichnet die Normalform des Vektorwinders als Vektorschraube und p als die Steigung der Schraube. Durch den Bezugspunkt S und die Richtung von \mathbf{a} wird die Zentralachse festgelegt



$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_{OS} + \lambda \mathbf{a} \text{ , } \lambda \text{ Parameter.}$$

Im Einzelnen gelten die Beziehungen

$$p = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{M}^{(O)}}{a^2} \text{ , } \mathbf{r}_{OS} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}^{(O)}}{a^2} \text{ ,}$$

wobei r_{OS} den kürzesten Abstand zwischen O und der Zentralachse beschreibt und a der Betrag des Vektors \mathbf{a} ist.

Die Vektorschraube besitzt keine große praktische Bedeutung.



Schritte bei der Untersuchung von Vektorsystemen

1) Skizze des Vektorsystems ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$)

2) Wahl eines geeigneten Koordinatensystems $\left\{ \underbrace{\mathbf{O}}_{\text{Ursprung}}, \underbrace{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z}_{\text{Achsenrichtungen}} \right\}$

3) Koordinatendarstellung der Ortsvektoren und Vektoren $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{a}_i\}$, $i=1(1)n$

4) Berechnung des Vektorwinders (\mathbf{a} , \mathbf{M})

- Vektorsystem ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$)

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{M}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i$$

- System mit Vektorpaaren (freie Momente)

$$\left(\underbrace{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n}_{\text{Vektoren}}, \underbrace{\mathbf{a}_{n+1}, -\mathbf{a}_{n+1}, \dots}_{\text{freies Moment}} \right)$$

$$\sim (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{M}_1, \dots)$$

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{M}^{(O)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^l \mathbf{M}_j$$