Technische Schwingungslehre

Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Hanss

Aufgabensammlung mit Kurzlösungen

Sommersemester 2024

Aufgabe 1: Nach welchen Kriterien können Schwingungen unterteilt werden?

- Anzahl der Freiheitsgrade
- Typ der beschreibenden Differentialgleichung
- Entstehungsmechanismus der Schwingung

Aufgabe 2: Wie werden Schwinger bei einer Unterscheidung nach der Anzahl der Freiheitsgrade kategorisiert?

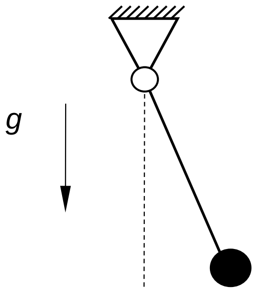
- Schwinger mit 1 Freiheitsgrad / einläufiger Schwinger
- Schwinger mit n Freiheitsgraden / mehrläufiger Schwinger
- Schwinger mit ∞ Freiheitsgraden / kontinuierliche Systeme

Aufgabe 3: Wie können Schwingungssysteme nach dem Entstehungsmechanismus eingeteilt werden?

- Eigenschwingungen oder freie Schwingungen
- Selbsterregte Schwingungen
- Parametererregte Schwingungen
- Erzwungene Schwingungen

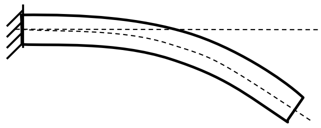
Aufgabe 4: Kategorisieren Sie die folgenden Schwingungsbeispiele nach der Anzahl der Freiheitsgrade und geben Sie diese an.

a)



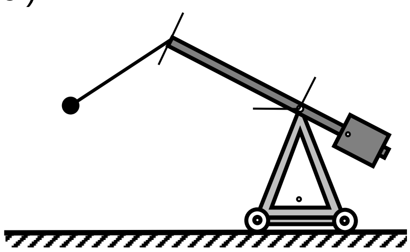
einläufiger Schwinger
1 Freiheitsgrad

b)



kontinuierliche Systeme
∞ Freiheitsgrade

c)



mehrläufiger Schwinger
3 Freiheitsgrade

Aufgabe 5: Welche Beziehung gilt für die Zustandsgröße $x(t)$ bei einer periodischen Schwingung mit der Periodendauer T?

$$x(t) = x(t+T)$$

Aufgabe 6: Zur Beschreibung von Schwingungen wird unter anderem die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde herangezogen. In welcher Einheit wird dieser Wert angegeben und in welchem Verhältnis steht diese Kennzahl zur Schwingungszeit T?

$$[f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

Aufgabe 7: In welchem Verhältnis steht die Kreisfrequenz ω zur Frequenz f und zur Periode T?

$$\omega = 2\pi f\,,\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Aufgabe 8: Geben Sie die Gleichung für die Amplitude A und die Mittellage x_m in Abhängigkeit des Kleinst- und Größtwertes x_max und x_min einer Schwingung an.

$$A = \frac{x_\mathrm{max} - x_\mathrm{min}}{2}$$

$$x_\mathrm{m} = \frac{x_\mathrm{max} + x_\mathrm{min}}{2}$$

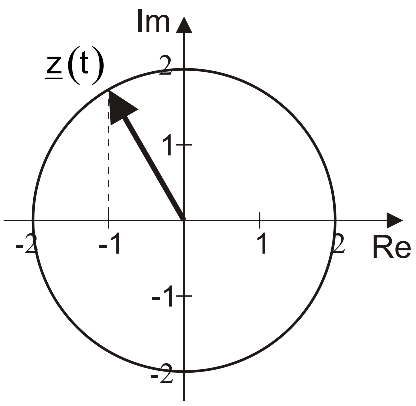
Aufgabe 9: Eine ungedämpfte Eigenschwingung werde beschrieben durch $x(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$. Zur Zeit $t = \frac{\pi}{\omega}$ gelte: $\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -a$ und $\ddot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -a\omega$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie die Amplitude A und den Phasenwinkel φ der Schwingung in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω und der Konstanten a.

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\omega}a,\ \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

Aufgabe 10: Eine ungedämpfte Eigenschwingung werde beschrieben durch $x(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$. Zur Zeit $\mathrm{t} = 0$ gelte: $x(0) = \sqrt{3}\mathrm{a}$ und $\dot{x}(0) = a\omega$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie die Amplitude A und den Phasenwinkel φ der Schwingung in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω und der Konstanten a.

$$A = 2a,\ \varphi = \frac{1}{6}\pi$$

Aufgabe 11: Gegeben ist das Zeigerdiagramm für die komplexe Erweiterung $z(t)$ der harmonischen Schwingung $x(t) = \mathrm{Re}\big(z(t)\big)$ mit $x(t) = A\ \cos(\omega t - \varphi)$ für $t = \frac{\pi}{\omega}$. Bestimmen Sie aus dem gegebenen Zeigerdiagramm die Amplitude A und den Phasenwinkel φ.



Die Amplitude A der Schwingung ist der Radius des Zeigerdiagramms. Damit ergibt sich $A = 2$. Der Zeiger ist dargestellt für den Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{\omega}$. Daraus ergibt sich durch Einsetzen von t und Ablesen des Winkels zur reellen Achse aus der Zeichnung die Beziehung.

$$\omega t - \varphi = \omega\frac{\pi}{\omega} - \varphi = \frac{4}{6}\pi \Rightarrow \pi - \varphi = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 12: Eine ungedämpfte harmonische Schwingung werde beschrieben durch $x(t) = 3b\cos\left(\frac{40\pi}{\mathrm{s}}t\right) + 3\sqrt{3}b\sin\left(\frac{40\pi}{\mathrm{s}}t\right) - 1.25a$. Bestimmen Sie die folgenden charakteristischen Größen der Schwingung: T, f, ω, A, x_m, φ.

$$\omega = 40\pi\ 1/\mathrm{s}$$

$$f = 20\mathrm{Hz}$$

$$T = 0.05\mathrm{s}$$

$$A = 6b$$

$$x_\mathrm{m} = -1.25a$$

$$\varphi = \frac{1}{3}\pi$$

Aufgabe 13: Gegeben seien zwei Schwingungen gleicher Frequenz ω durch $x_1(t) = \sqrt{3}A\sin(\omega t) + 3A\cos(\omega t)$ und $x_2(t)$ mit der komplexen Erweiterung $\underline{z}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

a) Berechnen Sie die komplexe Erweiterung $\underline{z}(t)$ der resultierenden Schwingung $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

$$x_1(t) = 2\sqrt{3}A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

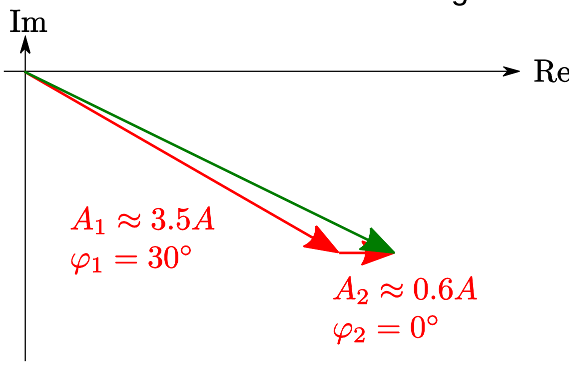
Komplexe Erweiterung $\underline{z}_1(t)$ der ersten Schwingung:

$$\underline{z}_1(t) = 2\sqrt{3}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)}$$

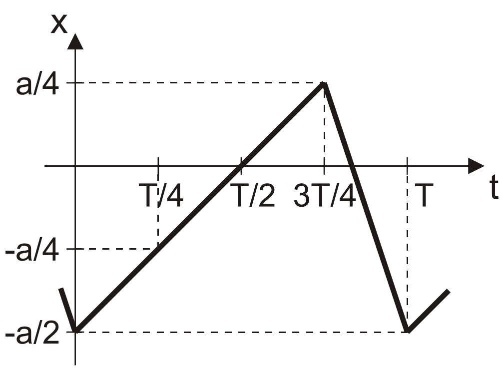
Addition der harmonischen Schwingungen durch Addition der komplexen Zeiger:

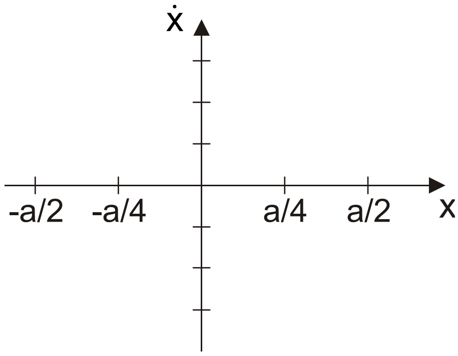
$$\underline{z}(t) = \underline{z}_1(t) + \underline{z}_2(t) = \left(2\sqrt{3}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} + A/\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

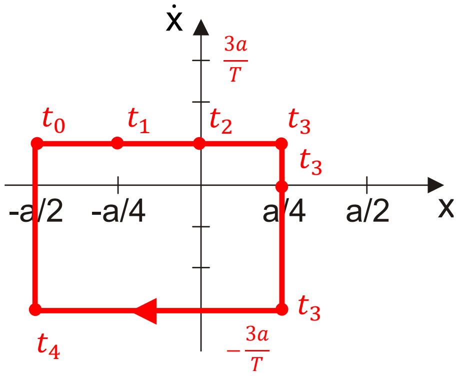
b) Geben Sie zeichnerisch die Addition der beiden Zeiger an.



Aufgabe 14: Skizzieren Sie die Phasenkurve $\dot{x}(x)$ der dargestellten Schwingung $x(t)$ und kennzeichnen Sie die Richtung der Phasenkurve für wachsendes t. Bemaßen Sie außerdem die $\dot{x}$-Achse und zeichnen Sie in der Phasenkurve die Zeitpunkte $t_0 = 0$; $t_1 = T/4$; $t_2 = T/2$: $t_3 = 3T/4$ und $t_4 = T$ ein.







Aufgabe 15: Die Differentialgleichung eines Feder-Masse-Schwingers mit Dämpfung lautet $m\ddot{z} + d\dot{z} + cz = 0$.

a) Geben Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung an.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

b) Bringen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe der Zeittransformation $\tau = \omega_0 t$ auf die normierte Form $z'' + 2Dz' + z = 0$ und geben Sie den Dämpfungsgrad D (= Lehr`sches Dämpfungsmaß) als Funktion von m, d und c an.

Mit

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \omega_0 z'$$

und

$$\ddot{z} = \omega_0^2 z''$$

folgt für die Differentialgleichung

$$m\omega_0^2 z'' + d\omega_0 z' + cz = 0$$

$$z'' + \frac{d}{m\omega_0}z' + \frac{c}{m\omega_0^2}z = 0$$

$$z'' + 2\frac{d}{2m\sqrt{\frac{c}{m}}}z' + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}z = 0$$

somit folgt für das Lehr`sches Dämpfungsmaß

$$D = \frac{d}{2m\sqrt{\frac{c}{m}}} = \frac{d}{2\sqrt{cm}}$$

c) Geben Sie die Kreisfrequenz ω des Schwingers für den Fall schwacher Dämpfung an.

$$\omega = \sqrt{1 - D^2}\,\omega_0$$

d) Wie muss die Federsteifigkeit c gewählt werden, damit die Kreisfrequenz ω gerade 80% von ω_0 beträgt?

$$\sqrt{1 - D^2} = 0.8 \rightarrow c = \frac{25d^2}{36m}$$

Aufgabe 16: Der Amplitudenfrequenzgang $V(\eta)$ und der Phasenfrequenzgang $\Psi(\eta)$ einer erzwungenen Schwingung mit dem Dämpfungsgrad D und der dimensionslos gemachten Erregerfrequenz $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ ist gegeben durch

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}} \text{ und } \Psi(\eta) = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right).$$

a) Bestimmen Sie $V(\eta)$ und $\Psi(\eta)$ für die Fälle $\Omega \ll \omega_0$, $\Omega = \omega_0$ und $\Omega \gg \omega_0$.

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

Fall $\Omega = \omega_0$

$\eta = 1 \Rightarrow V(\eta = 1) = \frac{1}{2D}$ und $\Psi(\eta = 1) = \frac{\pi}{2}$

Fall $\Omega \ll \omega_0$

$\eta \to 0 \Rightarrow V(\eta \to 0) \to 1$ und $\Psi(\eta \to 0) \to 0$

Fall $\Omega \gg \omega_0$

$\eta \to \infty \Rightarrow V(\eta \to \infty) \to 0$ und $\Psi(\eta \to \infty) \to 0$

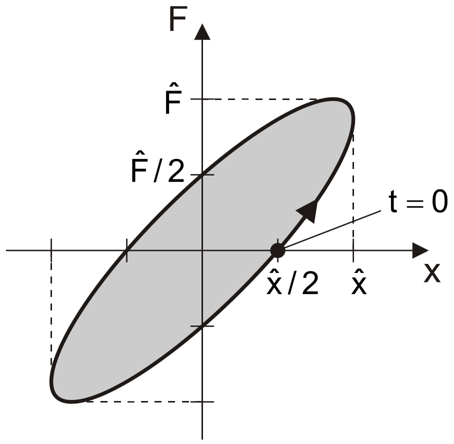
b) In welchen Frequenzbereichen muss die Erregerfrequenz Ω bei gegebener Eigenfrequenz ω_0 liegen, damit der Amplitudenfrequenzgang bei einem Dämpfungsgrad von $D = 0.1$ den Wert $V = 2$ nicht überschreitet?

D und V einsetzen:

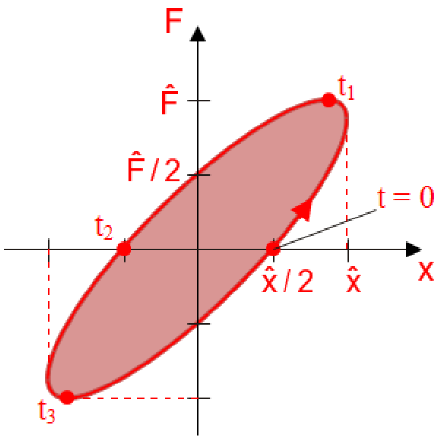
$$V(\eta) = 2 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4 \cdot 0.1^2 \cdot \eta^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \eta \leq 0.722 \\ \eta \geq 1.199 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega \leq 0.722 \cdot \omega_0 \\ \Omega \geq 1.199 \cdot \omega_0 \end{cases}$$

Aufgabe 17: Ein mit der periodischen Kraft $F(t) = \hat{F}\sin(\Omega t)$ zwangserregter gedämpfter Schwinger antwortet mit der Auslenkung $x(t) = \hat{x}\cos(\Omega t - \psi)$. Im nebenstehenden Diagramm ist die Kraft *F* über der Auslenkung x dargestellt.



a) Tragen Sie die Zeitpunkte $t_1 = \frac{T}{4}$, $t_2 = \frac{T}{2}$ und $t_3 = \frac{3T}{4}$ in das Diagramm ein bei $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

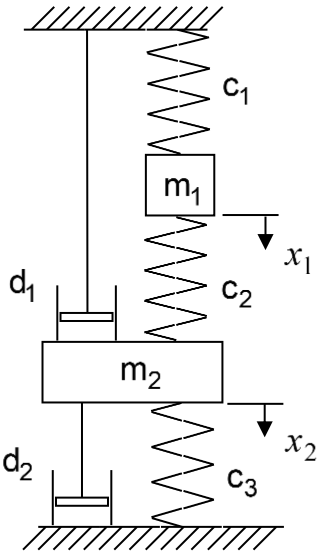


b) Bestimmen Sie den Phasenwinkel ψ.

$\psi = \frac{\pi}{3}$ Bedingung: $x(t=0) = \frac{\hat{x}}{2} \Rightarrow \cos(\psi) = \frac{1}{2}$

c) Welche Bedeutung hat die graue Fläche?

Der Flächeninhalt entspricht der Dämpfungskraft pro Schwingung
der Arbeit der Erregerkraft pro Schwingung



Aufgabe 18: Gegeben ist das nebenstehende Schwingungssystem. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das Schwingungssystem in der Form

$$m_1\ddot{x}_1 = \cdots$$
$$m_2\ddot{x}_2 = \cdots$$

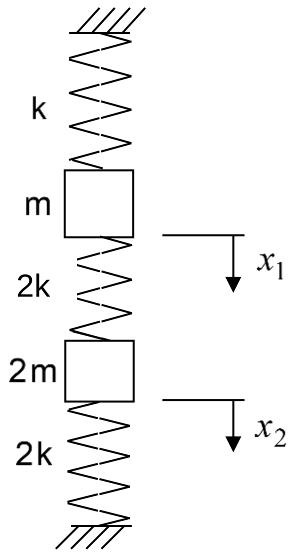
auf. Die Bewegungsgleichungen sollen in der Matrixform $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}} + \underline{\underline{D}}\,\underline{\dot{x}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{x} = \underline{0}$ mit $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ geschrieben werden. Geben Sie die Massenmatrix $\underline{\underline{M}}$, die Dämpfungsmatrix $\underline{\underline{D}}$ und die Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$ an.

a) Massen freischneiden
b) Bewegungsgleichungen
c) Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\cdot x_1 + (-c_2)x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (d_1 + d_2)\dot{x}_2 + (-c_2)x_1 + (c_2 + c_3)x_2 = 0$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 19: Für das nebenstehende Schwingungssystem, welches aus zwei Körpern (Massen m und $2m$) und drei Federn (Federkonstanten k, $2k$, $2k$) besteht, lauten die Massenmatrix $\underline{\underline{M}}$ und die Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$:



$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 4k \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 aus der charakteristischen Gleichung $\left|\underline{\underline{K}} - \omega_j{}^2 \underline{\underline{M}}\right| = 0$ (mit j = 1,2).

$2m^2\omega_j^4 - 10mk\omega_j^2 + (8k^2) = 0$

Diese Gleichung kann ähnlich wie eine quadratische gelöst werden:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

somit gilt hier:

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{10km \pm \sqrt{100k^2m^2 - 64k^2m^2}}{4m^2}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) Ermitteln Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{c}^{(j)}$ aus der Gleichung $\left(\underline{\underline{K}} - \omega_j{}^2 \underline{\underline{M}}\right) \underline{c}^{(j)} = \underline{0}$.

$$\begin{pmatrix} 3k - \omega_j^2 m & -2k \\ -2k & 4k - \omega_j^2 \cdot 2m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1^{(j)} \\ c_2^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für ***j*=1** wird durch Multiplikation folgendes Gleichungssystem aufgestellt:

$(3k - m\omega_1^2)c_1^{(1)} - 2kc_2^{(1)} = 0$

$-2kc_1^{(1)} + (4k - 2m\omega_1^2)c_2^{(1)} = 0$

mit $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$\left(3k - \frac{k}{m}m\right)c_1^{(1)} - 2kc_2^{(1)} = 0$ (1)

$-2kc_1^{(1)} + \left(4k - 2m\frac{k}{m}\right)c_2^{(1)} = 0$ (2)

aus (1):

$c_1^{(1)} - c_2^{(1)} = 0 \rightarrow c_1^{(1)} = c_2^{(1)}$ (3)

(2) ist ein Vielfaches von (1), d.h. es gibt unendlich viele Lösungen. Es wird beispielsweise $c_2^{(1)} = 1$ gewählt. Dann ist der Eigenvektor

$\Rightarrow \underline{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für ***j*=2** gilt:

$(3k - m\omega_2^2)c_1^{(2)} - 2kc_2^{(2)} = 0$

$-2kc_1^{(2)} + (4k - 2m\omega_2^2)c_2^{(2)} = 0$

mit $\omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$:

$\left(3k - 4\frac{k}{m}m\right)c_1^{(2)} - 2kc_2^{(2)} = 0$ (4)

$-2kc_1^{(2)} + \left(4k - 2m \cdot 4\frac{k}{m}\right)c_2^{(2)} = 0$ (5)

aus (4):

$c_1^{(2)} + 2c_2^{(2)} = 0 \rightarrow c_1^{(2)} = -2c_2^{(2)}$ (6)

(5) ist ein Vielfaches von (4), d.h. es gibt unendlich viele Lösungen. Es wird beispielsweise $c_2^{(2)} = 1$ gewählt. Dann ist der Eigenvektor

$\Rightarrow \underline{c}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 20: Durch welche der unten genannten Transformationen lässt sich eine entkoppelte Darstellungsform der Bewegungsgleichungen eines mehrdimensionalen Schwingungssystems erreichen?

a) von Hauptkoordinaten auf normale Koordinaten

b) von normalen Koordinaten auf Hauptkoordinaten

c) von Zustandskoordinaten auf verallgemeinerte Koordinaten

d) von verallgemeinerten Koordinaten auf Zustandskoordinaten

❖ von normalen Koordinaten auf Hauptkoordinaten

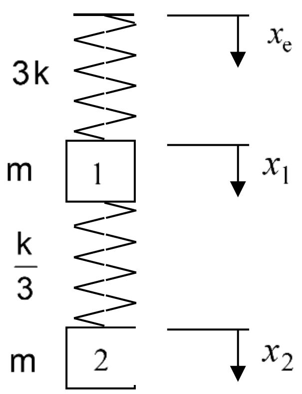
Aufgabe 21: Wodurch werden die Eigenschwingungsformen eines Balkens bestimmt?

a) durch seine Lagerung (Randbedingungen)

b) durch seine Anfangsauslenkungen (Anfangsbedingungen)

❖ durch seine Lagerung (Randbedingungen)

Aufgabe 22: Bei dem dargestellten System (Massen jeweils m, Federkonstanten $3k$ und $\frac{k}{3}$) mit periodischer Bewegung $x_e(t) = \hat{x}_e \cos \Omega t$ des Aufhängepunkts wird die (stationäre) Bewegung des Körpers 1 bei einer bestimmten Erregerfrequenz $\Omega = \Omega^*$ getilgt. Bestimmen Sie Ω^* in Abhängigkeit von m und k.



Aus der Aufgabenstellung:

$m1 = m2 = m$ (Massen jeweils m)

$c_1 = 3k$ und $c_2 = \frac{k}{3}$

Periodische Bewegung des Aufhängepunktes: $x_e(t) = \hat{x}_e \cos \Omega t$

Die Abkürzungen über der Gleichung 4.93 im Abschnitt 4.4.2.1 im Skript lauten:

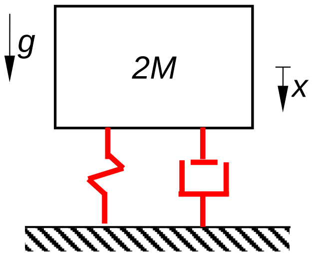
$\omega_1^2 = \frac{c_1+c_2}{m_1}, \omega_2^2 = \frac{c_2}{m_2}$, usw.

Mit der Herleitung im Skript wird Ω so bestimmt, dass die Bewegung des Aufhängepunktes durch c_2 und m_2 getilgt wird. Die Masse m_1 bleibt in Ruhe. Damit kann Ω^* mit m_2 und c_2 nach Gleichung 4.95 bestimmt werden:

$$\Omega^* = \omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{k}{3m}}$$

Aufgabe 23: Das vertikale Schwingverhalten eines Sprungbrettes soll untersucht werden. Hierzu wird das Sprungbrett als Feder-Masse-Schwinger modelliert. Die Masse des Brettes ist zu vernachlässigen. Die Feder ist vor dem Sprung entspannt und wird um die Länge l zusammengedrückt, wenn ein schwerer Sportler (Masse $2M$) ruhig auf dem Brett steht. Zusätzlich wird die Feder mit einem Dämpfer d parallelgeschaltet.

a) Zeichnen Sie das Ersatzmodell des Schwingers und berechnen Sie die Federkonstante c.



$$cl = 2Mg$$

$$c = \frac{2Mg}{l}$$

b) Die Kraftanregung durch den Sportler kann mit $F(t) = h(t)M\,g/2$ beschrieben werden. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Schwingungssystems der erzwungenen Schwingung auf in Abhängigkeit von M, l, g und d. Die Koordinate x kennzeichnet die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage.

$$2M\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + \frac{2Mg}{l}x = \frac{Mg}{2}h(t)$$

bzw.

$$\ddot{x} + \frac{d}{2M}\,\dot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{4}h(t)$$

c) Geben Sie die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0 und die Abklingkonstante δ in Abhängigkeit gegebener Größen an.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ und $\delta = \frac{d}{4M}$

d) Geben Sie für die Anregung mit $h(t) = (1 - 2\sin^2(\Omega^* t))$ die zeitnormierte Form der Differentialgleichung mit $\tau = \omega_0 t$ und $x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$ an.

- Weg 1:
  mit

$$\dot{x} = \omega_0 x', \ddot{x} = \omega_0^2\, x'' \text{ und } t = \frac{\tau}{\omega_0} = \sqrt{\frac{l}{g}}\tau$$

folgt für die Differentialgleichung

$$\frac{g}{l}\, x'' + \frac{d}{2M}\sqrt{\frac{g}{l}}\, x' + \frac{g}{l} x = \frac{g}{4}\left(1 - 2\sin^2(\sqrt{\frac{l}{g}}\Omega^*\tau)\right)$$

$$x'' + \frac{d}{2M}\sqrt{\frac{l}{g}}\, x' + x = \frac{l}{4}\left(1 - 2\sin^2(\sqrt{\frac{l}{g}}\Omega^*\tau)\right)$$

- Weg 2:
  mit

$$F = \hat{F}\cos(\Omega t) = \frac{Mg}{2} f(t) = \frac{Mg}{2}(1 - 2\sin^2(\Omega^* t)) = \frac{Mg}{2}\cos(2\Omega^* t)$$

$$\Rightarrow \hat{F} = \frac{Mg}{2} \text{ und } \Rightarrow \Omega = 2\Omega^*$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{4M}\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ und } \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = 2\Omega^*\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\hat{x}_e = \frac{\hat{F}}{c} = \frac{Mg}{2}\frac{l}{2Mg} = \frac{l}{4}$$

aus

$$x'' + 2D\, x' + x = \frac{\hat{F}}{c}\cos(\eta\tau)$$

folgt somit

$$x'' + \frac{d}{2M}\sqrt{\frac{l}{g}}\, x' + x = \frac{l}{4}\cos\left(2\Omega^*\sqrt{\frac{l}{g}}\tau\right) = \frac{l}{4}\left(1 - 2\sin^2(\sqrt{\frac{l}{g}}\Omega^*\tau)\right)$$

e) Bestimmen Sie die Amplitude $\hat{x}_\mathrm{e}$ und die Erregerfrequenz η der harmonischen Erregung. Tipp: $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u)$

$$\hat{x}_\mathrm{e} = \frac{\hat{F}}{c} = \frac{Mg}{2}\frac{l}{2Mg} = \frac{l}{4}, \qquad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = 2\Omega^*\sqrt{\frac{l}{g}}$$

f) Der Amplitudenfrequenzgang $V(\Omega^*)$ und der Phasenfrequenzgang $\Psi(\Omega^*)$ sind gegeben durch

$$V(\Omega^*) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - 4\Omega^{*2}\right)^2 + 16\delta^2\Omega^{*2}}} \quad \text{und} \quad \Psi(\Omega^*) = \arctan\left(\frac{4\Omega^*\delta}{\omega_0^2 - 4\Omega^{*2}}\right).$$

Berechnen Sie den Amplitudenfrequenzgang $V(\Omega^*)$ und den Phasenfrequenzgang $\Psi(\Omega^*)$ für die gegebenen Werte von Ω^* mit $\Omega^* = \frac{\omega_0}{2}$ und $\Omega^* \to 0$.

Fall $\Omega^* = \frac{\omega_0}{2}$

$V = \frac{\omega_0}{2\delta}$ und $\Psi = \frac{1}{2}\pi$

Fall $\Omega^* \to 0$

$V = 1$ und $\Psi = 0$

Aufgabe 24: Ein Feder-Masse-System schwingt ungedämpft und harmonisch. Welche Aussage ist zu dem Zeitpunkt richtig, bei dem die maximale Auslenkung aus der Ruhelage erreicht wird?

a) Die Beschleunigung ist null
b) Die Geschwindigkeit hat ein Maximum
c) Die kinetische Energie hat ein Maximum
d) Der Impuls hat ein Maximum
e) Keine davon

❖ Keine davon (Bei maximaler Auslenkung ist die Beschleunigung maximal, die Geschwindigkeit null und somit ebenfalls die kinetische Energie und Impuls)

Aufgabe 25: Welche der untenstehenden Beziehungen zwischen der Periodendauer T_0 und der Kreisfrequenz ω_0 bzw. der Frequenz f_0 einer ungedämpften harmonischen Schwingung ist zutreffend?

a) $T_0 = 2\pi\omega_0$
b) $T_0 = 2\pi f_0$
c) $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
d) $T_0 = \frac{2\pi}{f_0}$
e) Nichts davon

❖ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Aufgabe 26: Eine ungedämpfte harmonische Schwingung wird beschrieben durch $y(t) = 1{,}0\ \mathrm{m} \cdot \cos\left(2\pi\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$. Berechnen Sie die momentane Auslenkung zur Zeit $t = 1\ \mathrm{s}$.

❖ $y(1\mathrm{s}) = 1{,}0\ \mathrm{m} \cdot \cos\left(2\pi\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 1\ \mathrm{s} - \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}0\ \mathrm{m} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0\ \mathrm{m}$

Aufgabe 27: Die Differentialgleichung einer harmonischen ungedämpften Schwingung lautet: $\ddot{y} + \left(\frac{5}{\mathrm{s}^2}\right) y = 0$. Wie lautete eine zugehörige Lösung?

a) $y = \hat{y}\cos(25\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t - \varphi)$

b) $y = \hat{y}\cos(5\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t - \varphi)$

c) $y = \hat{y}\cos(\sqrt{5}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t - \varphi)$

d) $y = \hat{y}\cos\left(\frac{\mathrm{s}^2}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t - \varphi\right)$

e) Keine davon

❖ Die Standard-Differentialgleichung einer ungedämpften harmonischen Schwingung lautet $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ mit der Lösung $y = \hat{y}\cos(\omega_0\, t - \varphi)$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man: $\omega_0^2 = \frac{5}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{5}\ \mathrm{s}^{-1}$

$y = \hat{y}\cos(\sqrt{5}\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t - \varphi)$

Aufgabe 28: An die Masse m_1 eines ungedämpftes vertikal schwingenden Feder-Masse-Systems mit der Eigenfrequenz f_1 wird die Zusatzmasse $m_2 = 3m_1$ angehängt. Welche Eigenfrequenz f_2 besitzt das neue System?

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \Rightarrow c = m\omega^2 = 4\pi^2 m f^2$$

Die Federkonstante bleibt konstant:

$c = 4\pi^2 m_1 f_1^2$

$c = 4\pi^2 (m_1 + m_2) f_2^2 = 4\pi^2 4 m_1 f_2^2 = 16\pi^2 m_1 f_2^2$

Gleichsetzen liefert:

$f_2^2 = \frac{1}{4} f_2^2 \Rightarrow f_2 = \frac{1}{2} f_1$

Aufgabe 29: Ein Feder-Masse-System besteht aus einer Feder (Federkonstante $c = 500\ \mathrm{N\,m^{-1}}$) und einer Masse ($m = 0{,}2\ \mathrm{kg}$). Die Amplitude einer harmonischen Schwingung dieses Systems ist $y_{\max} = 0{,}3\ \mathrm{m}$. Bestimmen Sie den Betrag der maximalen Geschwindigkeit $v_{\max}$ dieses Systems.

$$v_{\max} = y_{\max}\omega_0 = y_{\max}\sqrt{\frac{c}{m}} = 15\ \mathrm{ms^{-1}}$$

Aufgabe 30: Eine ideale Feder wird gedehnt. Um sie aus der Ruhelage um $y_1 = 4\ \mathrm{cm}$ zu verlängern ist die Kraft $F_1 = 250\ \mathrm{N}$ notwendig. Welche Arbeit W_{12} ist notwendig, um sie von y_1 auf $y_2 = 8\ \mathrm{cm}$ zu dehnen?

Die Federkonstante beträgt

$$c = \frac{F_1}{y_1} = 6250\ \mathrm{Nm}^{-1}$$

Für die Verlängerung von y_1 auf y_2 wird folgende Arbeit benötigt

$$W_{12} = \frac{1}{2}c(y_2^2 - y_1^2) = \frac{1}{2}6250\ \mathrm{Nm}^{-1}((0{,}08\ \mathrm{m})^2 - (0{,}04\ \mathrm{m})^2) = 15{,}0\ \mathrm{J}$$

Aufgabe 31: Ein Körper ist an einer idealen Feder befestigt. Auf einer ebenen Unterlage kann er horizontale, ungedämpfte, harmonische Schwingungen ausführen. Die Gesamtenergie des Feder-Masse-Systems ist $E_{\mathrm{ges}} = 50{,}0\ \mathrm{J}$. Bestimmen Sie die potentielle Energie E_{pot} des Systems bei einer Auslenkung, die gerade gleich der halben Amplitude ist.

Die Gesamtenergie des Systems ist gleich der Federenergie bei maximaler Auslenkung

$$E_{\mathrm{ges}} = E_{\mathrm{pot,max}} = \frac{1}{2}c\hat{y}^2$$

Somit gilt für die potentielle Energie bei halber Auslenkung

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}cy^2 = \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}\hat{y}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}c\hat{y}^2 = \frac{1}{4}E_{\mathrm{ges}} = 12{,}5\ \mathrm{J}$$

Aufgabe 32: Welchen Maximalwert (Amplitude) y_{max} hat die Funktion $y(t) = \frac{1}{2}k\cos^2(\omega_0 t)$?

$$y_{\mathrm{max}} = \frac{k}{2}$$

Aufgabe 33: Ein Feder-Masse-System (Masse m und Federkonstante c) führt ungedämpfte harmonische Schwingungen mit der Amplitude $\hat{y}$ und der Frequenz f aus. Die Gesamtenergie des Systems ist W.Welche der folgenden Beziehungen für die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ des Systems ist richtig?

a) $\omega = \sqrt{\frac{2W}{m\hat{y}}}$

b) $\omega = \sqrt{\frac{m\hat{y}}{2W}}$

c) $\omega = \sqrt{\frac{2W}{m\hat{y}^2}}$

d) $\omega = \sqrt{\frac{2W^2}{m\hat{y}}}$

e) $\omega = \sqrt{\frac{m\hat{y}}{2W^2}}$