Eigenwertproblem

Das Eigenwertproblem
$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ oder $(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat nichttriviale Lösungen, falls

$$(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) singulär \Leftrightarrow p(\lambda) \coloneqq \det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

charakteristische Gleichung

Lösungen:	Eigenwerte	$\lambda_i \in \mathbb{C}$,	$i = 1(1)n$,
	(Rechts–)Eigenvektoren	$\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{C}^n$,	$i = 1(1)n$,
		$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$,	$i = 1(1)n$.

(Algebraische) Vielfachheit v_k: Sind λ_k, $k = 1(1)m \le n$, verschiedene Nullstellen und ist λ_k jeweils eine v_k–fache Nullstelle von $\boldsymbol{p}(\lambda)$, dann gilt:

$$\boldsymbol{p}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1}(\lambda - \lambda_2)^{v_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{v_m} = 0, \quad \sum_{k=1}^{m} v_k = n\,.$$

Defekt (geometrische Vielfachheit) d_k: Der Defekt einer Nullstelle λ_k ist definiert als Rangabfall der Matrix $(\lambda_k \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}})$:

$$d_k \coloneqq n - \mathrm{Rg}(\lambda_k \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}), \quad 1 \le d_k \le v_k, \quad k = 1(1)m.$$

Damit existieren zu jedem Eigenwert λ_k genau d_k linear unabhängige Eigenvektoren, die einen d_k–dimensionalen Eigenraum aufspannen:

$$\mathrm{L}(\lambda_k) \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | (\lambda_k \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}, \quad k = 1(1)m.$$

Eigenschaften:

- Eigenwerte sind invariant unter Ähnlichkeitstransformationen:
  $\lambda(\boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}) = \lambda(\boldsymbol{A}), \quad \boldsymbol{T}$ regulär

- Eigenwerte einer Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ bzw. $\boldsymbol{R}$ entsprechen den Diagonalelementen:
  $\lambda_i = L_{ii}$ bzw. $\lambda_i = R_{ii}, \quad i = 1(1)n.$

- Spektralverschiebung: Die Matrix $(\boldsymbol{A} + s\boldsymbol{E})$ hat die Eigenwerte $\mu_k = (\lambda_k + s)$,
  $k = 1(1)m$, wobei λ_k die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind.

Analogien zwischen reellen und komplexen Matrizen:

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + i\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Transponierte $\boldsymbol{A}^T$	Konjugiert Transponierte $\boldsymbol{C}^* = \overline{\boldsymbol{C}}^T = \boldsymbol{A}^T - i\boldsymbol{B}^T$
Symmetrische Matrix $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$	Hermitesche Matrix $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C}$
Schiefsymmetrische Matrix $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$	Schiefhermitesche Matrix $\boldsymbol{C}^* = -\boldsymbol{C}$
Orthogonale Matrix $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{E}$	Unitäre Matrix $\boldsymbol{C}^* \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{E}$