



Eigenwertproblem

Das Eigenwertproblem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \text{ oder } (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat nichttriviale Lösungen, falls

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \text{ singular} &\Leftrightarrow p(\lambda) := \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \\ &= \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \\ &\text{charakteristische Gleichung} \end{aligned}$$

Lösungen:	Eigenwerte	$\lambda_i \in \mathbb{C},$	$i = 1(1)n,$
	(Rechts-)Eigenvektoren	$\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^n,$	$i = 1(1)n,$
		$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i,$	$i = 1(1)n.$

(Algebraische) Vielfachheit v_k : Sind $\lambda_k, k = 1(1)m \leq n$, verschiedene Nullstellen und ist λ_k jeweils eine v_k -fache Nullstelle von $p(\lambda)$, dann gilt:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} (\lambda - \lambda_2)^{v_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{v_m} = 0, \quad \sum_{k=1}^m v_k = n.$$

Defekt (geometrische Vielfachheit) d_k : Der Defekt einer Nullstelle λ_k ist definiert als
Rangabfall der Matrix $(\lambda_k \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{A}})$:

$$d_k := n - \text{Rg}(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}), \quad 1 \leq d_k \leq v_k, \quad k = 1(1)m.$$

Damit existieren zu jedem Eigenwert λ_k genau d_k linear unabhängige Eigenvektoren, die einen d_k -dimensionalen Eigenraum aufspannen:

$$L(\lambda_k) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid (\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\}, \quad k = 1(1)m.$$



Eigenschaften:

- Eigenwerte sind invariant unter Ähnlichkeitstransformationen:
 $\lambda(T^{-1} \cdot A \cdot T) = \lambda(A)$, T regulär

- Eigenwerte einer Dreiecksmatrix L bzw. R entsprechen den Diagonalelementen:
 $\lambda_i = L_{ii}$ bzw. $\lambda_i = R_{ii}$, $i = 1(1)n$.

- Spektralverschiebung: Die Matrix $(A + sE)$ hat die Eigenwerte $\mu_k = (\lambda_k + s)$,
 $k = 1(1)m$, wobei λ_k die Eigenwerte von A sind.

Analogien zwischen reellen und komplexen Matrizen:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$	$C = A + iB \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Transponierte A^T	Konjugiert Transponierte $C^* = \bar{C}^T = A^T - iB^T$
Symmetrische Matrix $A^T = A$	Hermiteische Matrix $C^* = C$
Schiefsymmetrische Matrix $A^T = -A$	Schiefhermitesche Matrix $C^* = -C$
Orthogonale Matrix $A^T \cdot A = A \cdot A^T = E$	Unitäre Matrix $C^* \cdot C = C \cdot C^* = E$