



## Determinanten

Die Determinante einer quadratischen, reellen Matrix  $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist durch folgende Grundgesetze definiert:

- (1)  $\det[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \dots \mathbf{a}_n] = \det[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_n] + \det[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{b}_i \dots \mathbf{a}_n]$
- (2)  $\det[\mathbf{a}_1 \dots \lambda \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_n] = \lambda \det[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_n]$
- (3)  $\det[\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots] = -\det[\dots \mathbf{a}_j \dots \mathbf{a}_i \dots]$
- (4)  $\det \mathbf{E} = 1$

Determinantenformel:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \det[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n] \\ &= \det[a_{11}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \dots, a_{1n}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{e}_n] \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det[\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_n}] \\ &= \sum_{(i_1 \dots i_n)} \text{sign}(i_1 \dots i_n) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \\ &\quad \text{Permutation von } (1 \dots n) \end{aligned}$$

Rechenregeln:

- $\det[\dots \mathbf{a} \dots \mathbf{a} \dots] = 0$
- $\det[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{0} \dots \mathbf{a}_n] = 0$
- $\det[\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_i \dots] = \det[\dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_j \dots]$
- $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$
- $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$
- $\det \mathbf{L} = \prod_{i=1}^n L_{ii}, \quad \det \mathbf{R} = \prod_{i=1}^n R_{ii}$
- $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$  regulär
- $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$