Verfahrensvergleich zur Behandlung von linearen Gleichungssystemen

Name	Typ	Struktur-ausnutzung	Aufwand	Vorteile	Nachteile
Gauß ohne Pivotisierung	$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{R}$		$\frac{n^3}{3}$		Kondition
Gauß mit Pivotisierung	$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{R}$		$\frac{n^3}{3}$	Robustheit	
Gauß mit Speicherung	$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{R}$		$\frac{n^3}{3}$		
Cholesky	$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}^T$	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T > 0$	$\frac{n^3}{6}$	Kondition Effizienz	Strukturaus- nutzung
Crout	$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{R}$		$\frac{n^3}{3}$	Vektorisier- barkeit	
Bunch – Kaufman	$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{L}^T$	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$	$\frac{n^3}{6}$	Effizienz	Strukturaus- nutzung
Aasen	$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{L}^T$	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$	$\frac{n^3}{6}$	Effizienz	Strukturaus- nutzung
Householder	$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R}$		$2\frac{n^3}{3}$	Kondition Ausgleichs- problem EWP	Aufwand
Givens	$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R}$		$2\frac{n^3}{3}$	Kondition Ausgleichs- problem	Aufwand
Jacobi	Gesamt- schritt iterativ	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T > 0$		große Systeme dünn besetzt	Struktur Konvergenz
Gauß–Seidel	Einzelschritt iterativ	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T > 0$		große Systeme dünn besetzt	Struktur Konvergenz
SOR	Mittelung iterativ	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T > 0$		große Systeme dünn besetzt	Struktur Konvergenz

E. Anderson et al.: *LAPACK User's Guide*.
Philadelphia: SIAM, 1992.
`http://www.netlib.org/lapack/lug/lapack_lug.html`

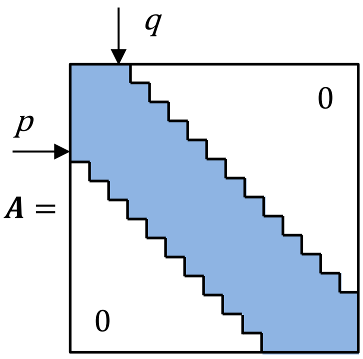
N.N.: LINPACK Index–Dokumentation. Über NETLIB abrufbar unter:
`http://www.netlib.no/netlib/linpack/index.html`

Matrix–Zerlegung bei Bandstrukturen

Bei der Berechnung von FEM (schwach besetzte Matrizen), MKS (kartesische Koordinaten) und der Lösung von PDE (leicht überlappende Gebietsdiskretisierung) treten oft schwach besetzte Matrizen mit Bandstruktur auf.

Obere Bandbreite: $A_{ij} = 0 \quad \forall j > i + q$

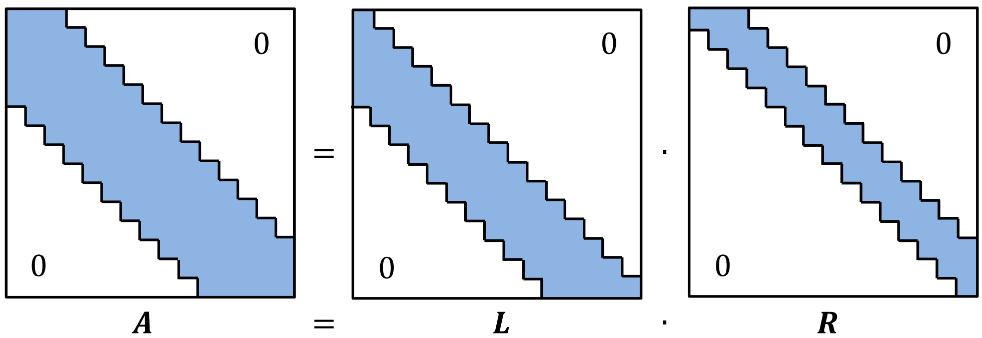
Untere Bandbreite: $A_{ij} = 0 \quad \forall i > j + p$



Bandstrukturen pflanzen sich in den Zerlegungsmatrizen fort: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{R}$

Bandbreite von $\boldsymbol{A} = (p, q)$ $\Leftrightarrow$ Bandbreite von $\boldsymbol{L} = (p, 1)$

Bandbreite von $\boldsymbol{R} = (1, q)$



Aufwand von Algorithmen bei Bandstrukturen:

Gauß ohne Pivotisierung: $\begin{cases} npq - \frac{pq^2}{2} - \frac{p^3}{6} + pn & \forall p \leq q \\ npq - \frac{pq^2}{2} - \frac{q^3}{6} + qn & \forall p > q \end{cases}$

Cholesky: $\frac{np^2}{2} - \frac{p^3}{3} + \frac{3(np - p^2)}{2} + n$

Vorwärtseinsetzen: $np - \frac{p^2}{2}$

Rückwärtseinsetzen: $n(q + 1) - \frac{q^2}{2}$