



Normen

Normen sind Maße für Vektoren und Matrizen.

Vektornormen

Eine Vektornorm $\|x\|$ ist eine Abbildung des \mathbb{R}^n auf den \mathbb{R} mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Matrixnormen

Eine Matrixnorm $\|A\|$ ist eine Abbildung des $\mathbb{R}^{m \times n}$ auf den \mathbb{R} mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$
- 2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Zusammenhänge zwischen Vektor- und Matrixnormen

- Eine Matrixnorm heißt **submultiplikativ**, wenn gilt
 $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Eine Matrixnorm $\|A\|$ heißt **verträglich** mit einer Vektornorm $\|x\|$, wenn gilt
 $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n$
- Die kleinste aller mit einer Vektornorm $\|x\|$ verträglichen Matrixnormen $\|A\|$ heißt **Grenznorm** $\text{lub}(A)$ (least upper bound):

$$\text{lub}(A) := \max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Anmerkung: Jede Grenznorm ist submultiplikativ und es gilt $\text{lub}(E) = 1$



- Gängige Vektornormen und deren zugehörige Grenznormen:

Vektornorm $\ \mathbf{x}\ $	zugehörige Grenznorm $\text{lub}(\mathbf{A})$
$\ \mathbf{x}\ _2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ <i>Euklidische Norm</i>	$\ \mathbf{A}\ _2 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sqrt{\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}} = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})}$ <i>Euklidische Norm</i>
$\ \mathbf{x}\ _\infty = \max_i x_i $ <i>Maximumsnorm</i>	$\ \mathbf{A}\ _\infty = \max_i \sum_j A_{ij} $ <i>Zeilensummennorm</i>

- Alle Vektornormen des \mathbb{R}^n sind **äquivalent**, d.h. für jedes Paar $\|\mathbf{x}\|_a, \|\mathbf{x}\|_b$ von Normen gibt es Konstanten $m, M > 0$, so dass gilt:
 $m\|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq M\|\mathbf{x}\|_a \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Beispiel: $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$
 $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2$