Normen

Normen sind Maße für Vektoren und Matrizen.

Vektornormen

Eine Vektornorm $\|\boldsymbol{x}\|$ ist eine Abbildung des $\mathbb{R}^n$ auf den $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
3) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

Matrixnormen

Eine Matrixnorm $\|\boldsymbol{A}\|$ ist eine Abbildung des $\mathbb{R}^{m \times n}$ auf den $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\|\boldsymbol{A}\| \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\|\boldsymbol{A}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
2) $\|\alpha \boldsymbol{A}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{A}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
3) $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\| \quad \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Zusammenhänge zwischen Vektor– und Matrixnormen

- Eine Matrixnorm heißt **submultiplikativ**, wenn gilt
  $\|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{B}\| \quad \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Eine Matrixnorm $\|\boldsymbol{A}\|$ heißt **verträglich** mit einer Vektornorm $\|\boldsymbol{x}\|$, wenn gilt
  $\|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{x}\| \quad \forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
- Die kleinste aller mit einer Vektornorm $\|\boldsymbol{x}\|$ verträglichen Matrixnormen $\|\boldsymbol{A}\|$ heißt **Grenzennorm** $\mathrm{lub}(\boldsymbol{A})$ (least upper bound):

  $$\mathrm{lub}(\boldsymbol{A}) \coloneqq \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

  Anmerkung: Jede Grenzennorm ist submultiplikativ und es gilt $\mathrm{lub}(\boldsymbol{E}) = 1$

- Gängige Vektornormen und deren zugehörige Grenzennormen:

Vektornorm $\|\boldsymbol{x}\|$	zugehörige Grenzennorm $\mathrm{lub}(\boldsymbol{A})$
$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ *Euklidische Norm*	$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \sqrt{\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}} = \sqrt{\lambda_{max}(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})}$ *Euklidische Norm*
$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{\boldsymbol{i}} \|x_i\|$ *Maximumsnorm*	$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \sum_j \|A_{ij}\|$ *Zeilensummennorm*

- Alle Vektornormen des $\mathbb{R}^n$ sind **äquivalent**, d.h. für jedes Paar $\|\boldsymbol{x}\|_a, \|\boldsymbol{x}\|_b$ von Normen gibt es Konstanten $m, M > 0$, so dass gilt:
  $m\|\boldsymbol{x}\|_a \leq \|\boldsymbol{x}\|_b \leq M\|\boldsymbol{x}\|_a \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

Beispiel: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$

$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2$