



Punktabbildungen in der Nichtlinearen Dynamik

Die Untersuchung nichtlinearer Abbildungen

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

ist auch Teil der Nichtlinearen Dynamik. Entsprechend der Struktur der Rekursionsfunktion und in Abhängigkeit von Abbildungsparametern können solche Abbildungen Fixpunkte, periodische Lösungen, quasi-periodische Lösungen oder chaotisches Verhalten aufweisen.

Beispiel: Logistische Abbildung

$$x^{(k+1)} = \mu x^{(k)}(1 - x^{(k)}), \quad x \in [0,1], \quad \mu \in [0,4]$$

- a) Bestimmen Sie die Fixpunkte x^* der Abbildung in Abhängigkeit des Abbildungsparameters μ :

$$\begin{aligned} \mu &= \mu & \Rightarrow x_1^* &= \quad , \\ & & x_2^* &= \quad . \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Abbildungsfunktion an den Fixpunkten:

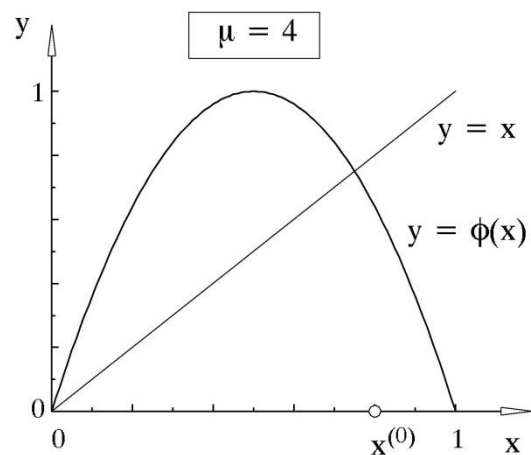
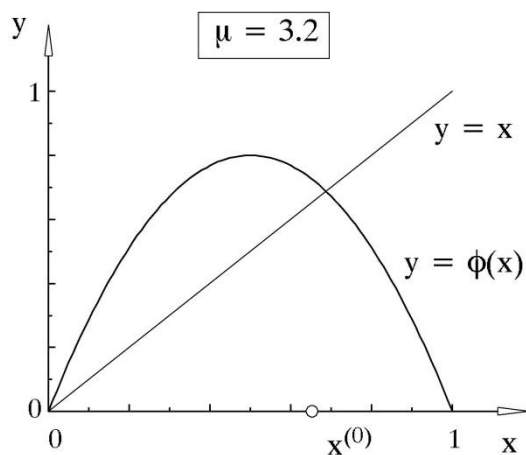
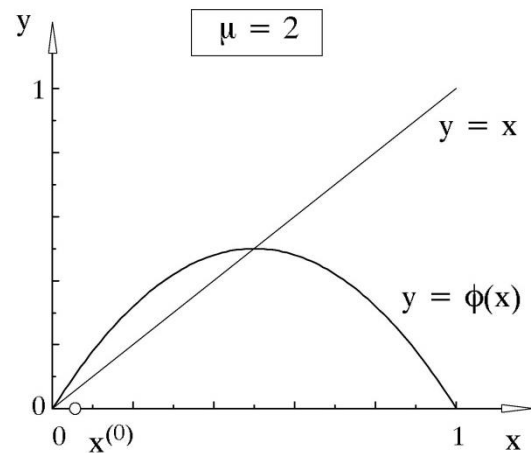
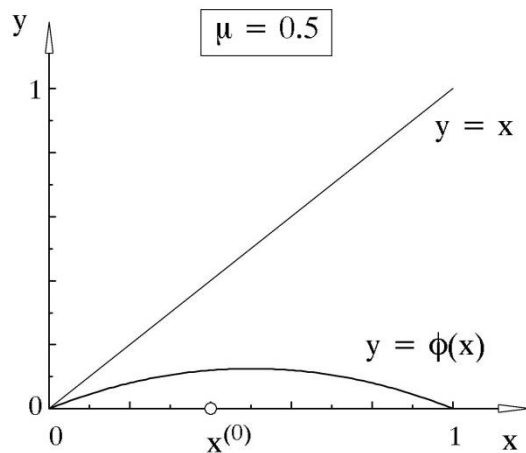
$$\begin{aligned} \phi'(x_1^*) &= \quad , \\ \phi'(x_2^*) &= \quad . \end{aligned}$$

- c) Geben Sie Intervalle für den Parameter μ an, in denen die Abbildung gegen den Fixpunkt x_1^* bzw. x_2^* konvergiert:

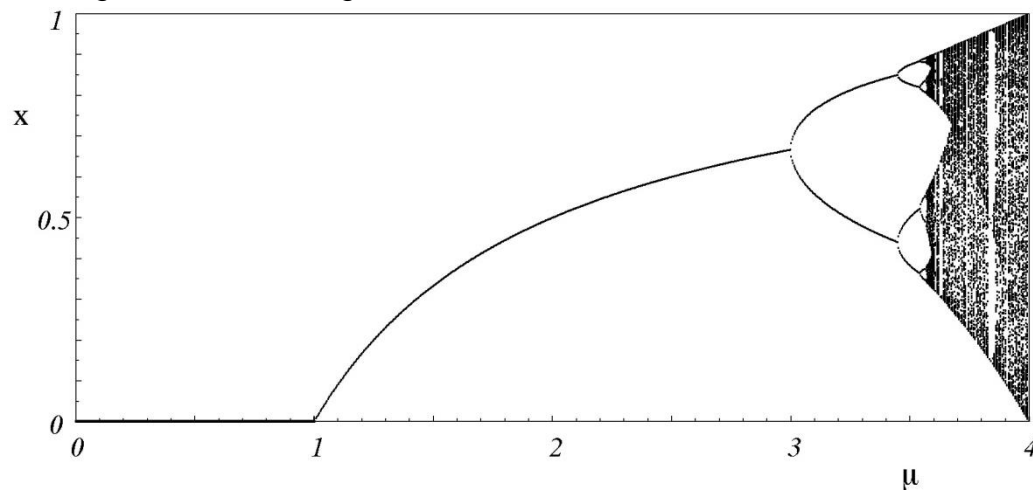
$$\begin{aligned} x_1^* \text{ ist stabiler Fixpunkt für } \mu &\in \left(\quad , \quad \right), \\ x_2^* \text{ ist stabiler Fixpunkt für } \mu &\in \left(\quad , \quad \right). \end{aligned}$$



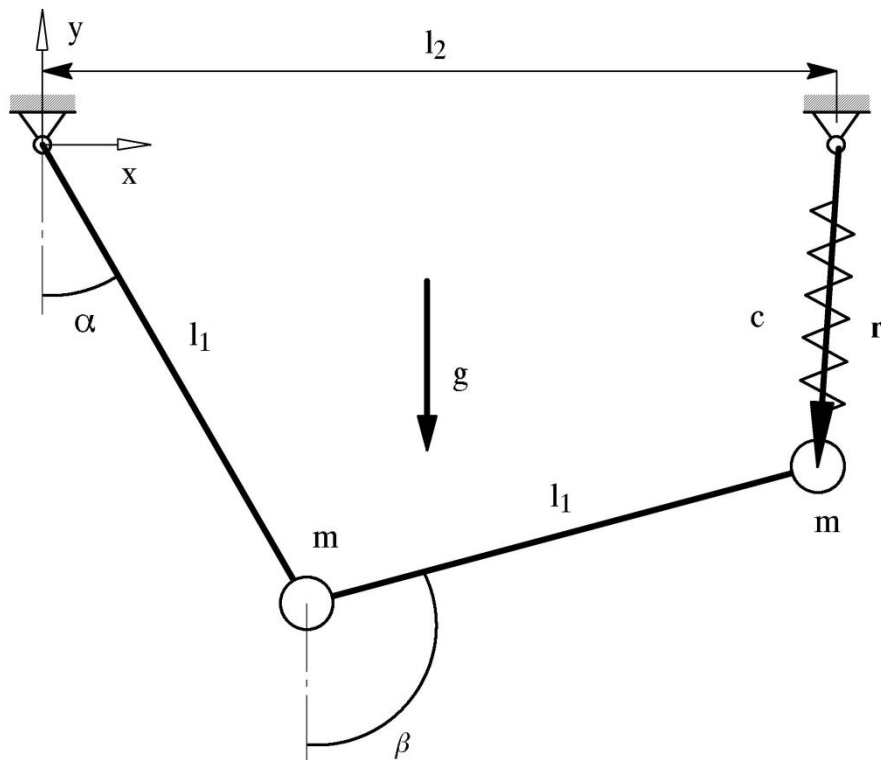
d) Führen Sie die Iteration für folgende Parameterwerte graphisch durch:



e) Das vollständige Lösungsverhalten in Abhängigkeit des Abbildungsparameters μ zeigt folgendes Bifurkationsdiagramm. Zeichnen Sie die Fixpunktkurven und Ihre Iterationslösungen in dieses Diagramm ein.



Gleichgewichtslage beim gefederten Doppelpendel



Im Allgemeinen ist die Nullstellensuche ein vektorieller Ansatz, der auch bei mehrdimensionalen Problemen angewandt werden kann. Im Folgenden soll mit Hilfe einer vektoriellen Nullstellensuche die Gleichgewichtslage des oben dargestellten Doppelpendels mit Feder (Federsteifigkeit c) bestimmt werden.

Unter Verwendung der verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y} = [\alpha, \beta]$ ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2l_1^2 m & l_1^2 m \cos(\alpha - \beta) \\ l_1^2 m \cos(\alpha - \beta) & l_1^2 m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{y})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} l_1^2 m \sin(\alpha - \beta) \dot{\beta}^2 \\ l_1^2 m \sin(\beta - \alpha) \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2mgl_1 \sin \alpha + l_1 l_2 c \cos \alpha + l_1^2 c \sin(\alpha - \beta) \\ cl_1 l_2 \cos \beta - l_1 mg \sin \beta - l_1^2 c \sin(\alpha - \beta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_e(\mathbf{y})}$$

a) Welche Bedingungen gelten für den Gleichgewichtszustand des Pendels?



- b) Vereinfachen Sie damit die Bewegungsgleichungen des Pendels auf ein Nullstellenproblem:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) := \left[\begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right]$$

Für dieses Nullstellenproblem ist ein geeigneter Lösungsansatz zu formulieren, dem eine lineare Taylor-Approximation der Zielfunktion zugrunde liegt. Dies führt auf die vektorielle Newton-Raphson-Nullstellensuche. Allgemein gilt im skalaren Fall für beliebige Funktionen $f(y)$ die Taylor-Approximation

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(y_0) (y - y_0)^k$$

- c) Beschreiben Sie die Taylor-Entwicklung der vektoriellen Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{y})$. Brechen Sie die Taylor-Reihe nach dem linearen Glied ab:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \approx \text{-----}$$

- d) Formulieren Sie die Taylor-Entwicklung für den Fall $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ so um, dass eine Schrittfunktion vom k -ten auf den $(k + 1)$ -ten Iterationsschritt der Nullstellensuche entsteht:

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} \text{-----}$$

- e) Bestimmen Sie die für die Schrittfunktion benötigte Iterationsmatrix:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = \left[\begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right]$$



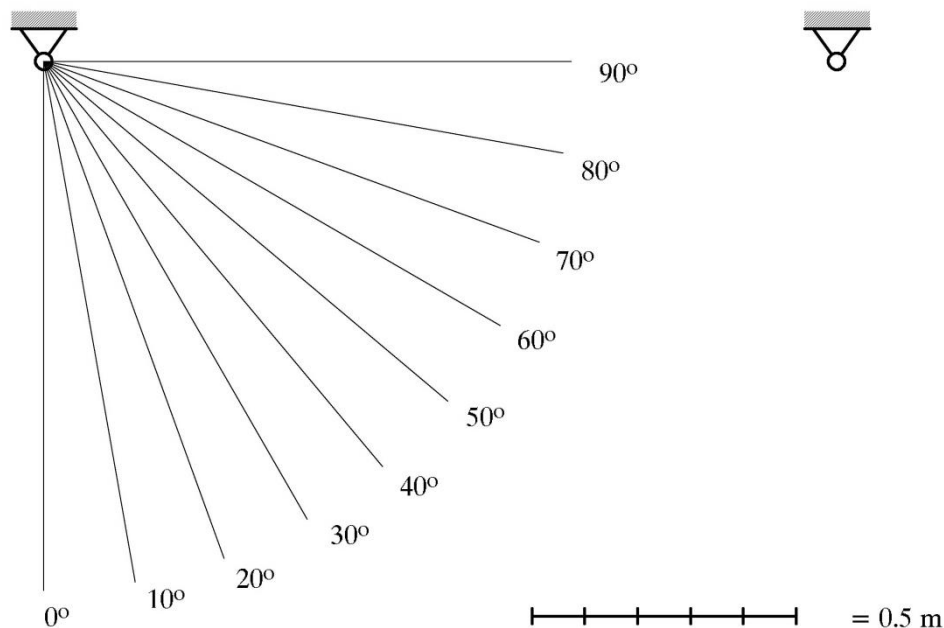
Die Schrittfunktion wurde in einem Computerprogramm realisiert. Eine Nullstellensuche mit den Parametern $m = 1 \text{ kg}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 1.5 \text{ m}$, $c = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ und den Anfangswerten $\alpha^{(0)} = \beta^{(0)} = 0$ führt auf folgenden Iterationsverlauf:

no.	y (1)	y (2)	f (1)	f (2)	dy	f
1	0.0000	0.0000	7.5000	7.5000	1.5000	15.000
2	-.4163E-16	1.5000	2.5125	-4.4560	0.71334	6.9695
3	0.13820	0.92490	1.13240	.6873E-01	0.906E-01	1.2012
4	0.20792	0.90398	0.3917E-02	-.1334E-01	0.2577E-02	0.1726E-01
5	0.20858	0.90206	0.9946E-05	-.4693E-05	0.1719E-05	0.14639E-04
6	0.20858	0.90206	0.3743E-11	-.3326E-11	0.9054E-12	0.70688E-11
7	0.20858	0.90206	-.9378E-17	-.3003E-15	0.4884E-16	0.30970E-15

f) Geben Sie die Gleichgewichtslage des Pendels in Grad an:

$\alpha =$ _____ und $\beta =$ _____ .

g) Zeichnen Sie die Gleichgewichtslage des Doppelpendels in die Zeichnung ein:





Zur Verwendung der Newton–Raphson–Iteration muss die Iterationsmatrix angegeben werden. Oft liegt diese nicht analytisch vor oder ist nur sehr teuer zu bestimmen. Dann kann ein Sekantenverfahren, das die Iterationsmatrix $A^{(k)}$ approximiert, vorteilhaft eingesetzt werden:

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} - A^{(k)^{-1}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}).$$

Die Festlegung der Iterationsmatrix erfolgt durch die Sekantengleichung:

$$A^{(k+1)} \cdot (\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k+1)}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}).$$

Diese Sekantengleichung legt nur einen Teil der Koeffizienten von $A^{(k+1)}$ fest. Zur vollständigen Beschreibung dient der sogenannte Broyden–Update, der eine geringstmögliche Veränderung der Iterationsmatrix, welche die Sekantengleichung nicht verletzt, anstrebt:

$$A^{(k+1)} = A^{(k)} + \frac{(\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k+1)}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) - A^{(k)}(\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)}))(\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)})}{(\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)})^T (\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)})}.$$

Diese Bequemlichkeit muss mit einem Abfall der Konvergenzrate von 2 auf 1.618 erkaufte werden. Dies ist auch am Doppelpendel zu erkennen, das nun mit dem MINPACK–Unterprogramm HYBRD1, welches ein Broyden–Update durchführt, bearbeitet wurde:

no.	y (1)	y (2)	f (1)	f (2)	dy	f
1	0.8941E-08	1.5000	2.5125	-4.4569	1.5000	5.1164
2	0.33851	0.72855	-1.4683	0.83933	0.84245	1.6913
3	0.22830	0.88009	-.25404	0.10320	0.18738	0.27421
4	0.20652	0.90503	0.2411E-01	-.1657E-01	0.3310E-01	0.29254E-01
5	0.20852	0.90211	0.7643E-03	-.1582E-03	0.3541E-02	0.78045E-03
6	0.20858	0.90206	-.4922E-04	0.1871E-04	0.755E-04	0.52655E-04
7	0.20858	0.90206	0.1545E-05	0.597E-06	0.5318E-05	0.16564E-05
8	0.20858	0.90206	-.1624E-08	0.6255E-09	0.1734E-06	0.17403E-08
9	0.20858	0.90206	0.3238E-12	-.1249E-12	0.1822E-09	0.34703E-12
10	0.20858	0.90206	-.9378E-17	-.3003E-15	0.3634E-13	0.30047E-15

J.E. Dennis; R.B. Schnabel:

Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations.

Englewood Cliffs: Prentice–Hall, 1983.

N.N.: MINPACK Index–documentation. Available under NETLIB:

<http://www.netlib.no/netlib/minpack/index.html>

Eigenfrequenzen einer Brücke

Die Berechnung der Eigenfrequenzen ω_i einer Brücke führt entsprechend Merkblatt M 2.3 auf die gewöhnliche Differentialgleichung

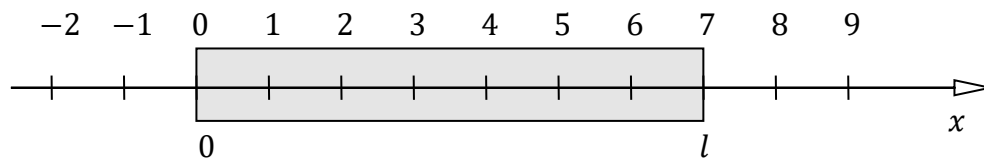
$$W^{IV} - \gamma^4 W = 0$$

für die Ortsfunktion $W(x)$, welche die Eigenformen beschreibt. Die Randbedingungen sind

$$W(0) = W(1) = W'(0) = W'(1) = 0$$

Dieses Randwertproblem ist nur für bestimmte Werte des Parameters $\gamma^4 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI}$ und damit nur für bestimmte Werte von ω , die Eigenfrequenzen ω_i , lösbar. Gesucht ist die erste Eigenfrequenz ω_1 .

Zur Lösung des Problems mit Hilfe finiter Differenzen wird die Brückenlänge in $n = 7$ gleiche Intervalle der Länge $h = \frac{1}{n}$ unterteilt:



Schreiben Sie die Differentialgleichung für jede Stützstelle $x_i = ih, i = 0(1)7$, an:

$$W_i^{IV} - \dots, i = 0(1)7.$$

Ersetzen Sie die Ableitungen W_i^{IV} durch zentrale Differenzen:

$$\dots - \gamma^4 W_i = 0, i = 0(1)7.$$

Mit der Abkürzung

$$\lambda := \gamma^4 h^4 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{n^4 EI}$$

ergibt sich

$$W_{i-2} - 4W_{i-1} + 6W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2} - \lambda W_i = 0, i = 0(1)7 \quad (1)$$

Dies sind 8 Gleichungen für 12 Unbekannte W_i . Die Punkte $-2, -1, 8, 9$ wurden eingeführt, um die Differenzenformeln auch auf die Ränder anwenden zu können.



Die erste Eigenform ist symmetrisch zur Balkenmitte. Es gilt

$$W_4 = \quad, W_5 = \quad, W_6 = \quad,$$

$$W_7 = \quad, W_8 = \quad, W_9 = \quad.$$

Damit bleiben Gleichungen ($i = 0(1)3$) für Unbekannte $W_j, j = -2(1)3$.

Die Randbedingungen liefern für $i = 0$, unter Verwendung zentraler Differenzen:

$$W_0 = \quad,$$

$$W_0' = \quad \text{oder } W_{-1} = \quad.$$

Die Unbekannte W_{-2} kann durch Auswerten der Gleichung (1) für $i = 0$ gefunden werden:

$$W_{-2} = \quad.$$

Damit bleiben 3 Gleichungen ($i = 1(1)3$) für 3 Unbekannte W_1, W_2, W_3 :

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}}_{A_2} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \right) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}}_{\hat{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diese sind nur dann nichttrivial lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems singulär ist, d.h. wenn λ ein Eigenwert der symmetrischen, positiv definiten Matrix A_2 ist. Der gesuchte, kleinste Eigenwert ist

$$\lambda_1 = 0.1778264$$

und damit die erste Eigenfrequenz

$$\omega_1 = \quad.$$

Für andere Unterteilungen erhält man folgende Werte für die erste Eigenfrequenz:

n	7	9	11	exakt
$\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}}$	20.66	21.30	21.64	22.37



Zum Verständnis soll der ANSI/IEEE-Standard auf eine Zahldarstellung mit der Mantisenlänge $nm = 2$ und der Exponentenlänge $ne = 3$ übertragen werden.

- a) Welche Wortlänge wird für diese Gleitkommazahlen-Darstellung benötigt?

$n =$
_ _ _

- b) Welche Sonderfälle werden durch folgende Bitmuster dargestellt?

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

1	1	1	1	0	0
---	---	---	---	---	---

1	1	1	1	1	0
---	---	---	---	---	---

- c) Geben Sie den Bias und den Bereich der Exponenten für normierte Dualzahlen an:

Bias = _____, $\leq e \leq$ _____.

- d) Welche Werte kann die Mantisse annehmen?

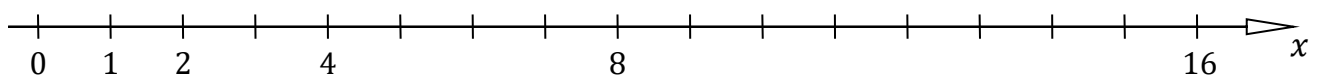
1. _____ = _____, _____

1. _____ = _____, _____

1. _____ = _____, _____

1. _____ = _____.

- e) Tragen Sie alle positiven Maschinenzahlen auf der reellen Zahlenachse ein:

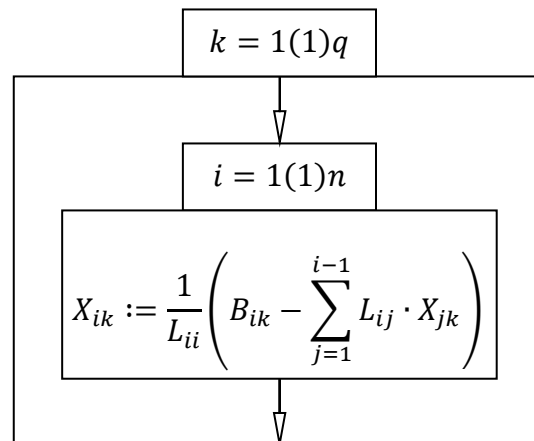




Vorwärtseinsetzen

$$L \cdot X = B, \quad L \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{Linksdreiecksmatrix}$$

$$X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$$



q rechte Seiten

- ☐ Rechenaufwand $\approx q \frac{n^2}{2}$ flops
- ☐ für $L_{ii} = 1$ entfällt Division
- ☐ auf gleichem Speicherplatz für X und B durchführbar

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\quad} = \quad$$

$$x_2 = \frac{1}{\quad} \left[\quad - \left(\quad x_1 \right) \right] = \quad$$

$$x_3 = \frac{1}{\quad} \left[\quad - \left(\quad x_1 + \quad x_2 \right) \right] = \quad$$

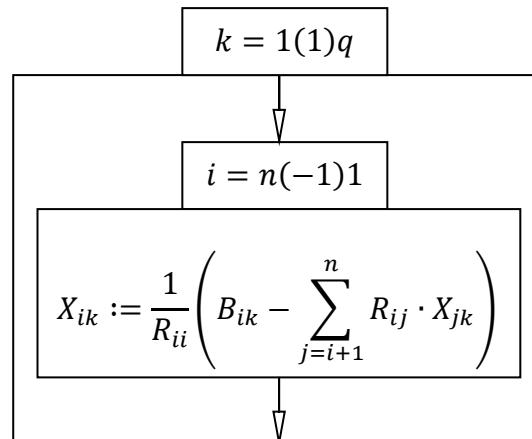


Rückwärtseinsetzen

$$R \cdot X = B, \quad R \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$$

Rechtsdreiecksmatrix



q rechte Seiten

- ☐ Rechenaufwand $\approx q \frac{n^2}{2}$ flops
- ☐ für $R_{ii} = 1$ entfällt Division
- ☐ auf gleichem Speicherplatz für X und B durchführbar

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -13 \\ -27 \end{bmatrix}$$

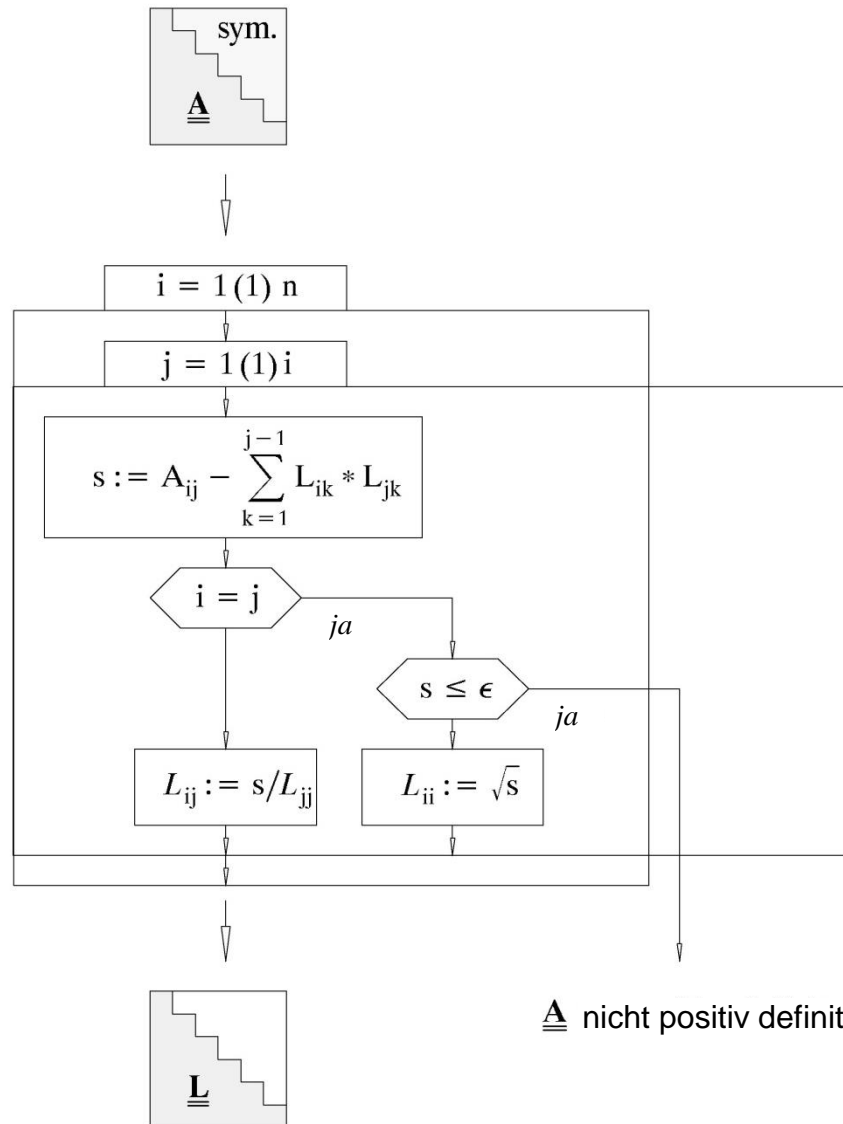
$$x_3 = \frac{1}{-9} \cdot (-27) = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{-1} \left[-13 - \left(-5 \cdot 3 \right) \right] = -2$$

$$x_1 = \frac{1}{1} \left[3 - \left(2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \right) \right] = -5$$

Cholesky–Zerlegung

$A = L \cdot L^T$, $A = A^T > 0$ symmetrisch, positiv definit



- ☐ Rechenaufwand $\approx \frac{n^3}{6}$ flops
- ☐ auf gleichem Speicherplatz durchführbar
- ☐ Algorithmus ist gut konditioniert



Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{bmatrix}$$

Die Cholesky-Zerlegung liefert:

○ $L_{11} = \sqrt{\quad}$ = \quad ,

○ $L_{21} = \frac{\quad}{\quad}$ = \quad ,

$L_{22} = \sqrt{\quad - \quad}$ = \quad ,

○ $L_{31} = \frac{\quad}{\quad}$ = \quad ,

$L_{32} = \frac{(\quad - \quad)}{\quad}$ = \quad ,

$L_{33} = \sqrt{\quad - (\quad + \quad)}$ = \quad .

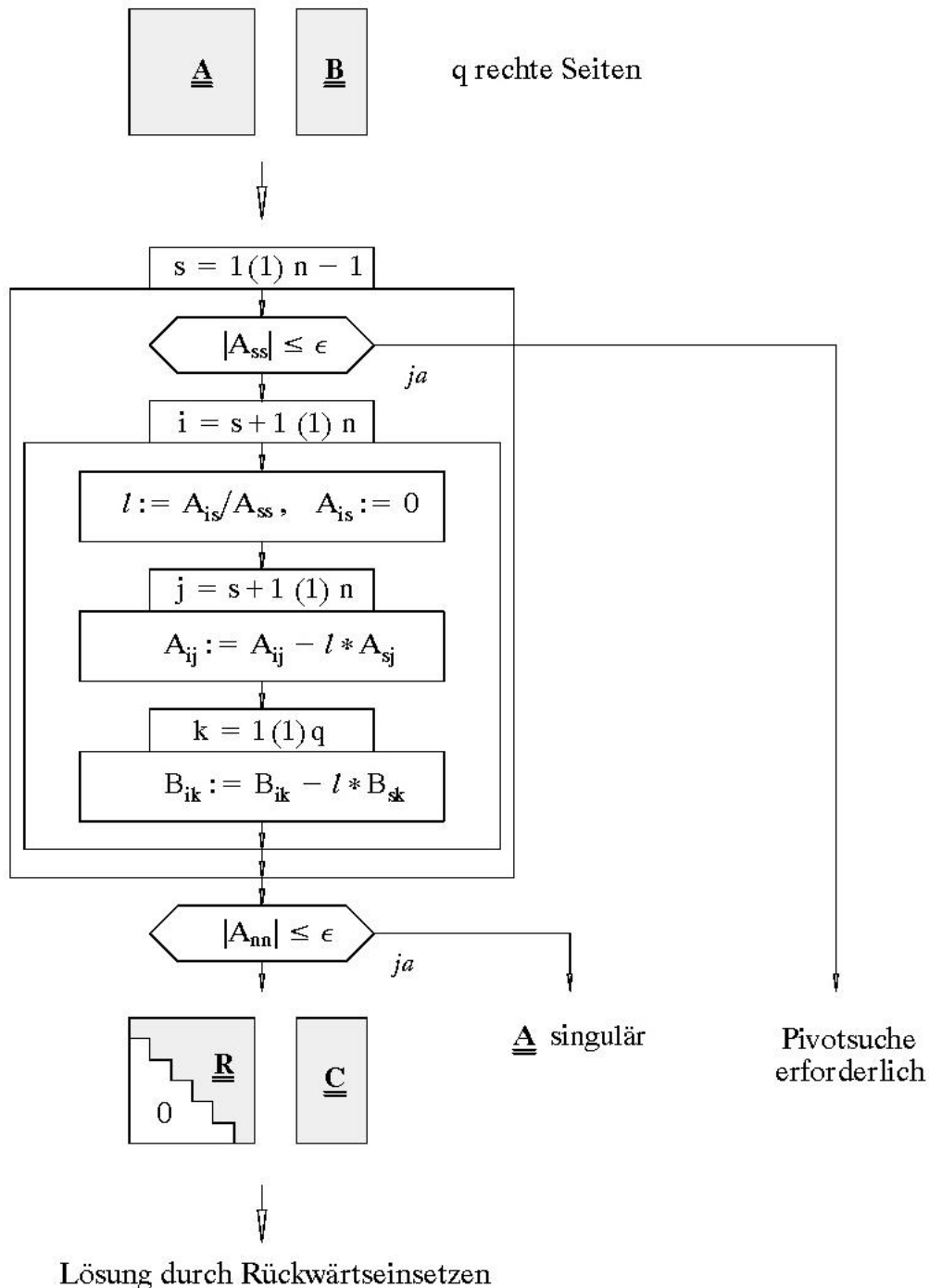
Die Probe ergibt

$$L \cdot L^T = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Gauß–Elimination ohne Pivotsuche

$$A \cdot X = B, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$$



- Rechenaufwand $\approx \frac{n^3}{3} + q \frac{n^2}{2}$ flops
- Gauß–Elimination erfolgt auf gleichem Speicherplatz

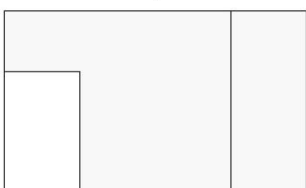


Beispiel:

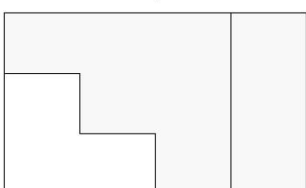
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(0)} =$$


↓ s = 1

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)} =$$


↓ s = 2

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} =$$




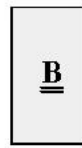
Rückwärtseinsetzen siehe A 6.2

Gauß–Elimination mit Spaltenpivotsuche

$$A \cdot X = B$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$$

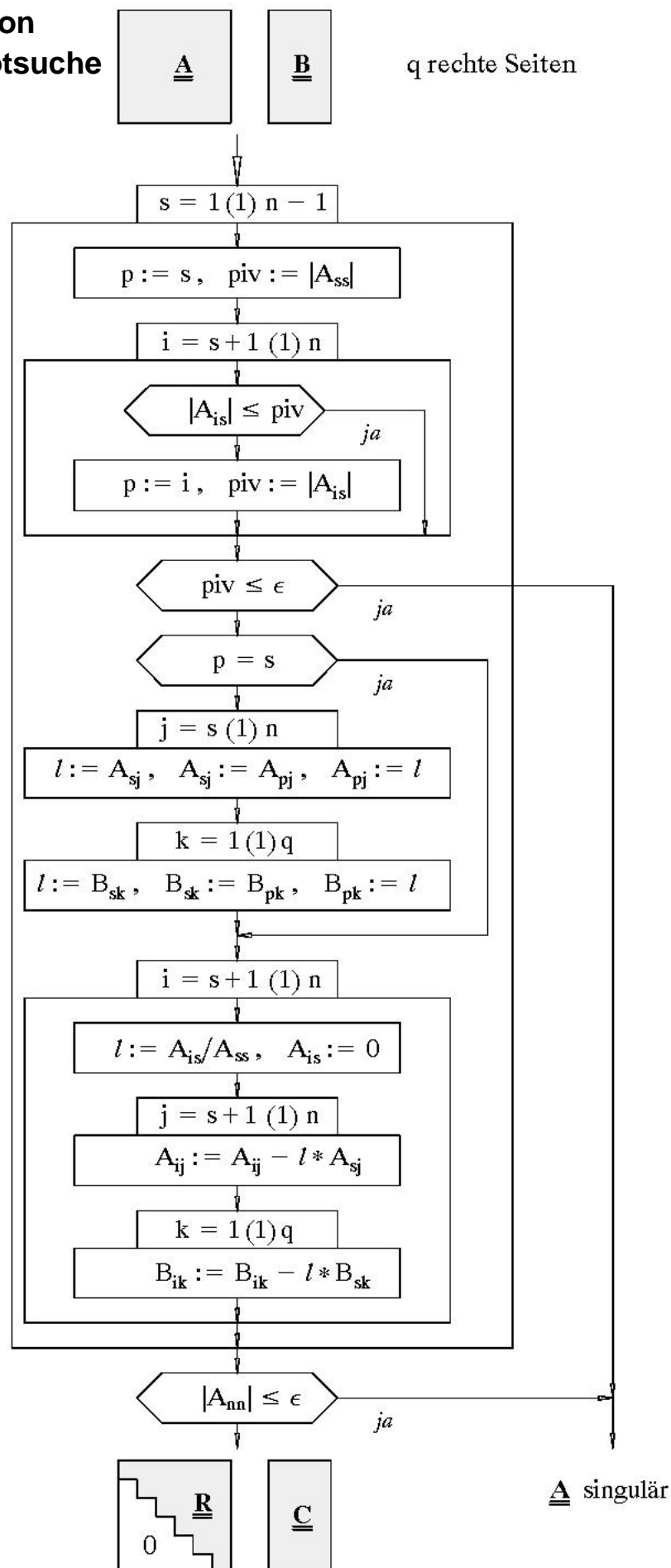


q rechte Seiten

Pivotsuche

Zeilenvertauschung

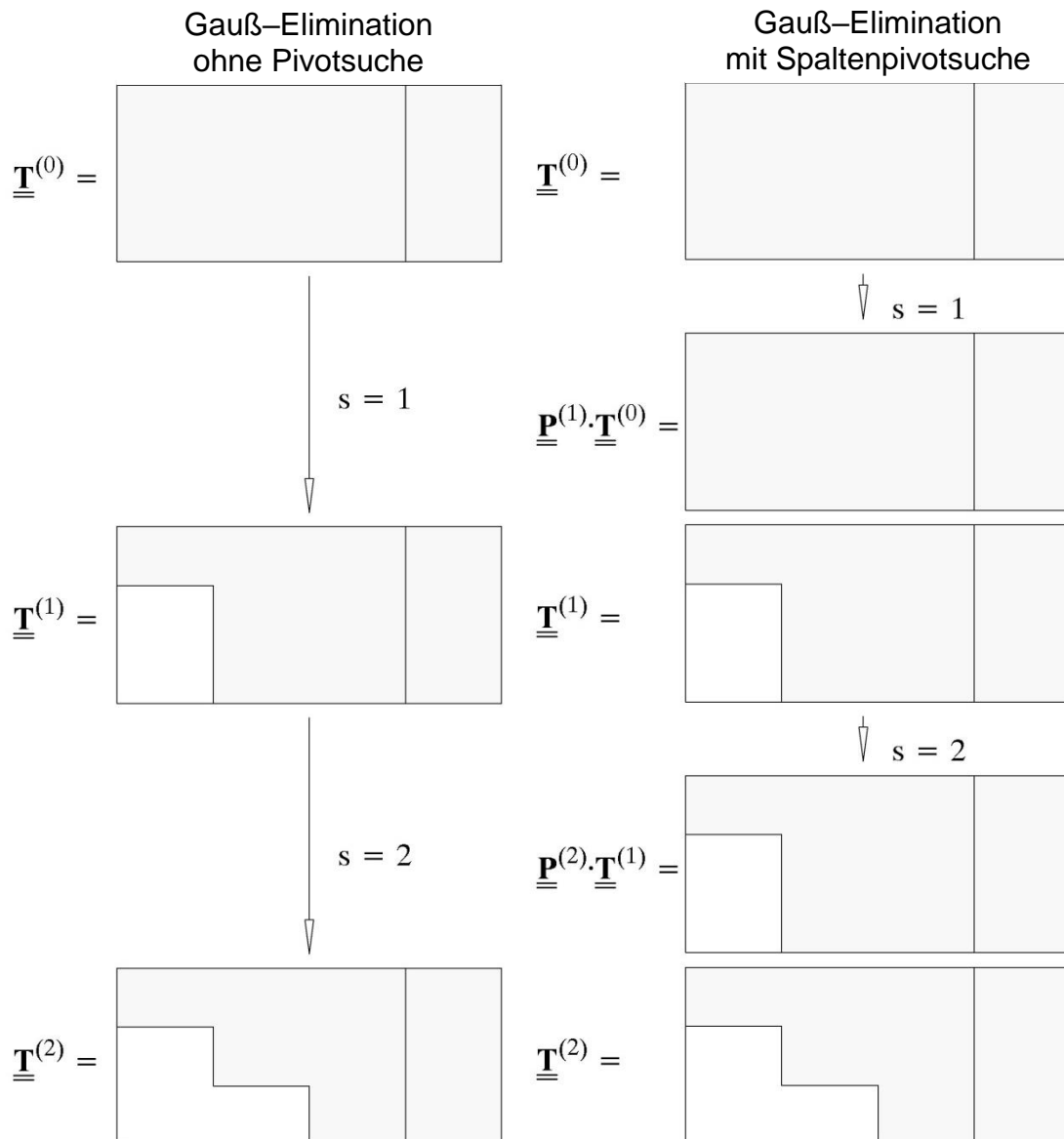
Elimination





Beispiel: Lösen Sie folgendes Gleichungssystem durch Gauß–Elimination ohne und mit Spaltenpivotsuche sowie durch Rückwärtseinsetzen. Benutzen Sie dabei eine 4–stellige, rundende Dezimalarithmetik.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.001 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Durch Rückwärtseinsetzen findet man für die Lösung x :

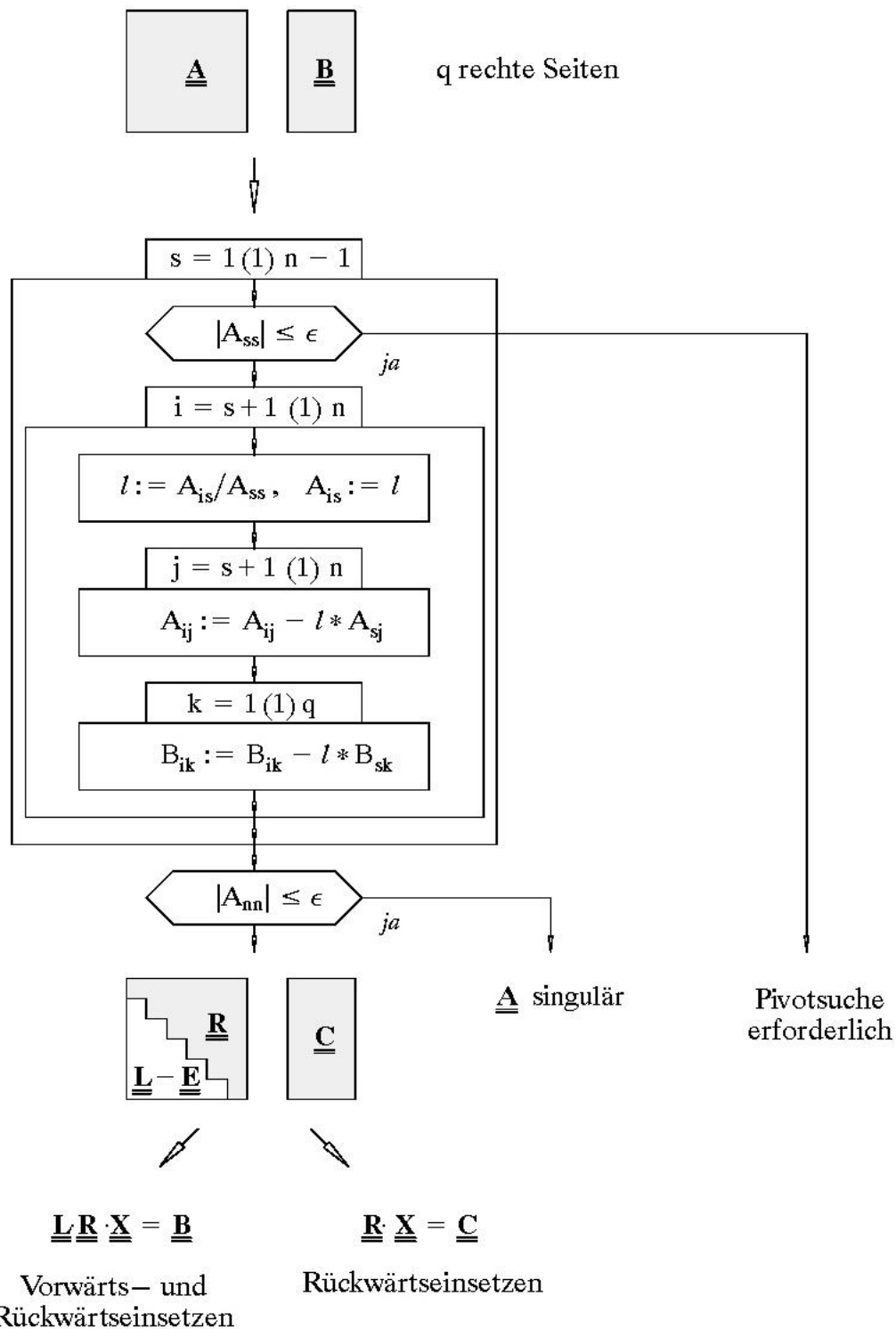
	exakte Lösung	ohne Pivotsuche Lösung	rel. Fehler	mit Pivotsuche Lösung	rel. Fehler
x_1	1.00000	1.15	15 %	1	0 %
x_2	-0.25006	-0.4	60 %	-0.2501	0.015 %
x_3	0.25006	0.2501	0.015 %	0.2501	0.015 %

Tabelle 1: MatlabR2014b, A7.m

Gauß–Elimination ohne Pivotsuche mit gleichzeitiger LR–Zerlegung

$$A \cdot X = B, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$$



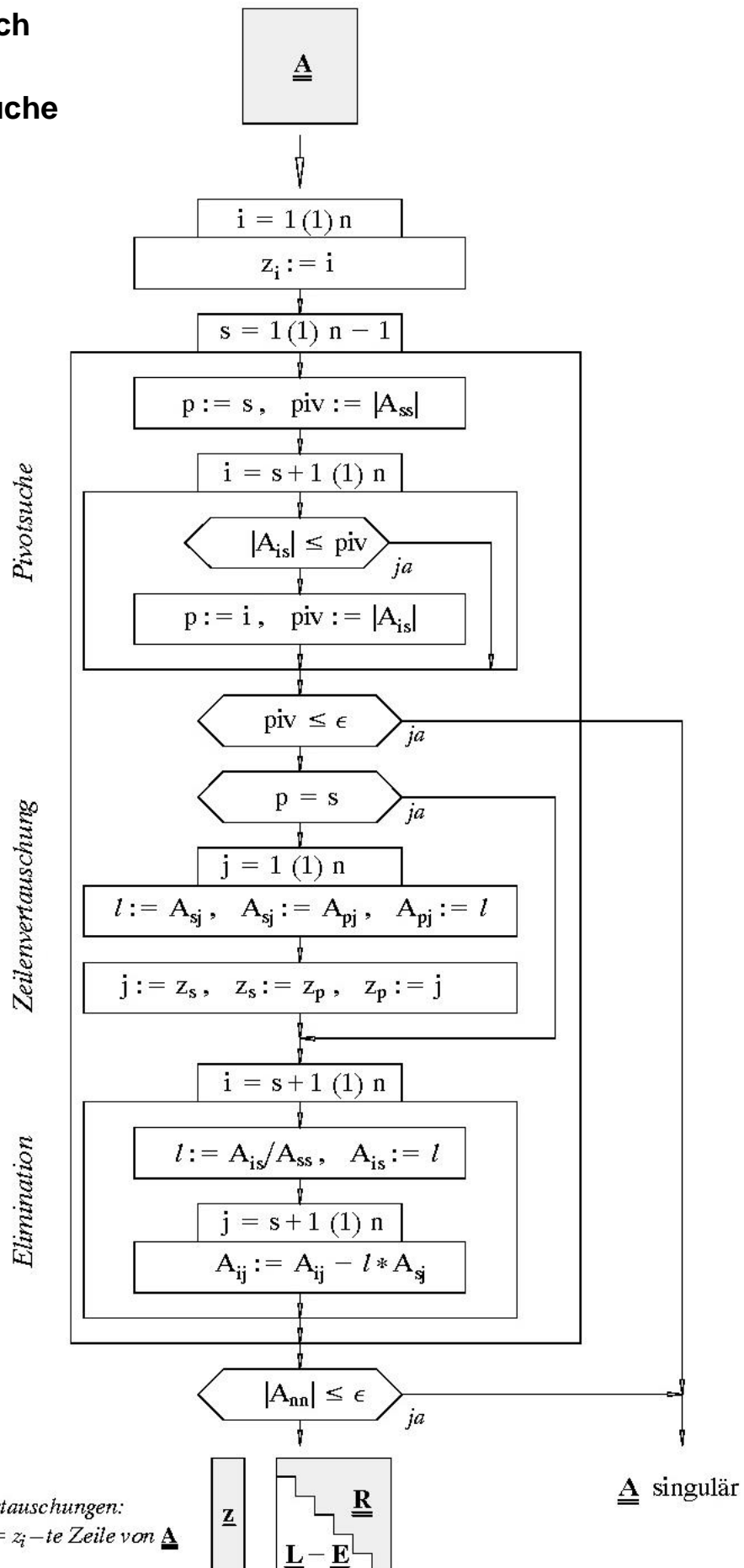
LR-Zerlegung durch Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche

$$P \cdot A = L \cdot R,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$L_{ii} = 1,$$

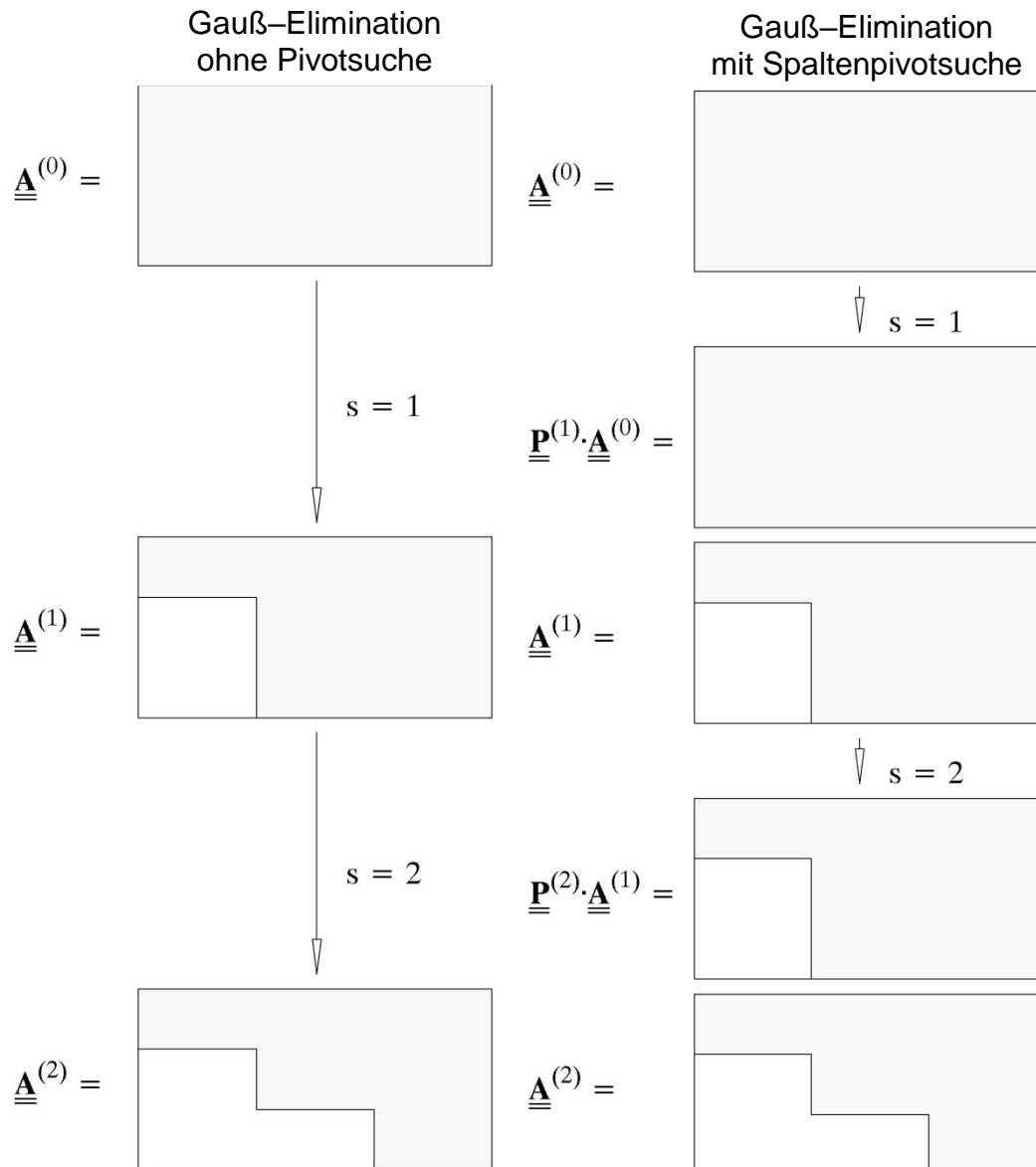
P : Permutationsmatrix





Beispiel: Führen Sie für die folgende Matrix eine LR-Zerlegung durch. Verwenden Sie dazu die Gauß-Elimination ohne und mit Spaltenpivotsuche.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$





Überprüfen Sie Ihr Ergebnis der

☐ LR-Zerlegung ohne Pivotsuche:

$$L \cdot R = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix}$$

☐ LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche:

$$L \cdot R = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$P^{(1)} \cdot A = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} \rightarrow P \cdot A = P^{(2)} \cdot P^{(1)} \cdot A = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix}$$



Lösen Sie das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für $b = [3, -4, 5]$ auf der Basis der

☐ LR-Zerlegung ohne Pivotsuche:

$$L \cdot y = b: \begin{bmatrix} & & \\ - & - & - \\ & & \\ - & - & - \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ & & \\ - & - & - \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} - & - & - \\ & & \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

$$R \cdot x = y: \begin{bmatrix} & & \\ - & - & - \\ & & \\ - & - & - \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ - & - & - \\ & & \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} & & \\ - & - & - \\ & & \end{bmatrix}$$

☐ LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche:

$$L \cdot y = P \cdot b: \begin{bmatrix} & & \\ - & - & - \\ & & \\ - & - & - \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ & & \\ - & - & - \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} - & - & - \\ & & \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

$$R \cdot x = y: \begin{bmatrix} & & \\ - & - & - \\ & & \\ - & - & - \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ - & - & - \\ & & \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} & & \\ - & - & - \\ & & \end{bmatrix}$$



Verfahren von Householder

Householder-Transformation

Gesucht ist eine Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, für die gilt:

- (i) \mathbf{H} ist orthogonal,
- (ii) $\mathbf{H} \cdot \mathbf{a} = \mu \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_m]^T$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Ansatz: $\mathbf{H} := \mathbf{E} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T$, $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$;

Aus (i): $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T =$

Aus (ii) einerseits:

$$\|\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}} \equiv \|\mathbf{a}\|_2 \stackrel{!}{=} \sqrt{\mu \cdot \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{e}_1 \cdot \mu} = |\mu|$$

$$\rightarrow \mu =$$

Aus (ii) andererseits:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{a} = \text{-----} \stackrel{!}{=} \mu \mathbf{e}_1$$

$$\rightarrow (2\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} - \mu \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}$$

$$\rightarrow \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}.$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{a} - \mu \mathbf{e}_1 =$$



Damit bleibt:

1) $\mu = -\text{sign}(a_1) \cdot \|a\|_2$

2) $v = a - \mu e_1 =$

3) $\alpha =$

4) $H = E - 2u \cdot u^T =$

Transformation eines Vektors $x \in \mathbb{R}^m$:

$$H \cdot x := x - \frac{v^T \cdot x}{\alpha} v$$

Algorithmus

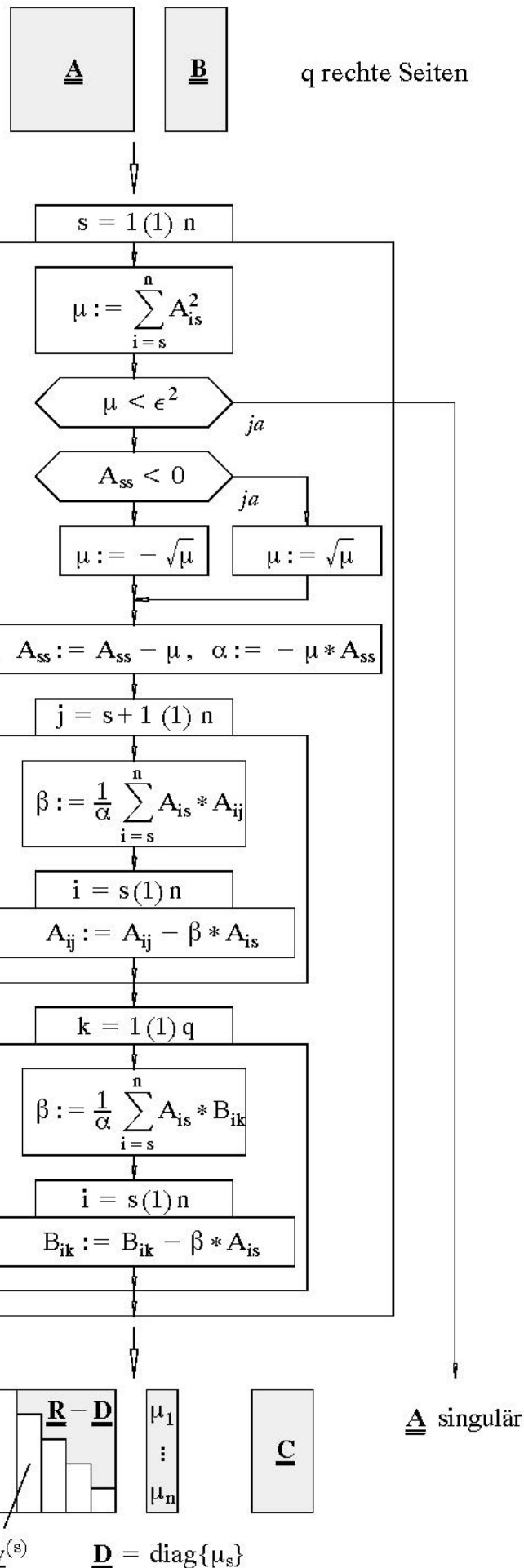
$$A \cdot X = B,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$$

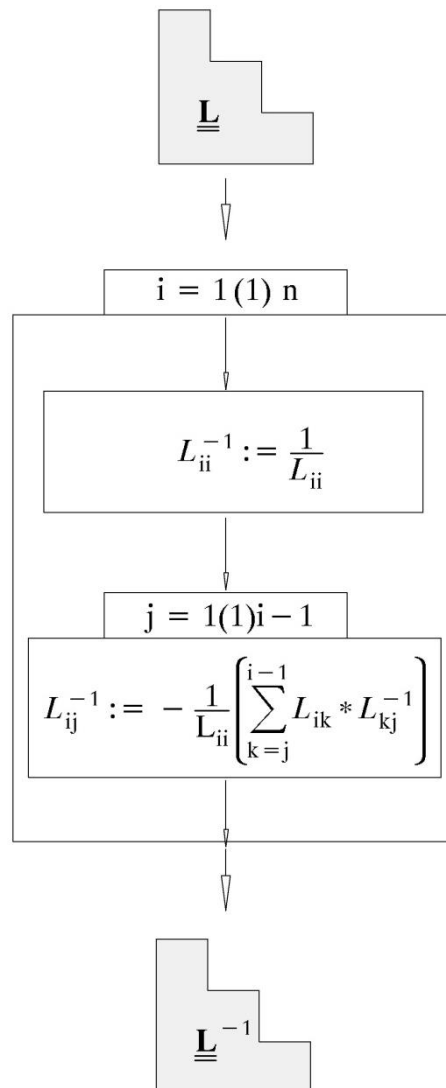
Rechenaufwand

$$\approx \frac{2}{3}n^3 + qn^2 \text{ flops}$$



Inverse einer Linksdreiecksmatrix

Die Inverse einer Linksdreiecksmatrix (Rechtsdreiecksmatrix) ist selbst wieder eine Linksdreiecksmatrix (Rechtsdreiecksmatrix),



- ☐ auf gleichem Speicherplatz für L und L^{-1} durchführbar
- ☐ Rechenaufwand $\approx \frac{n^3}{6}$ flops
- ☐ für $L_{ii} = 1$ entfällt die Division (LR-Zerlegung)

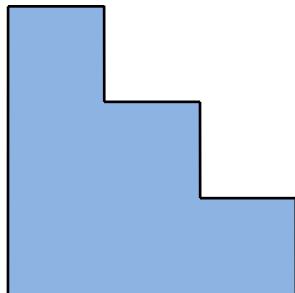


Beispiel:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

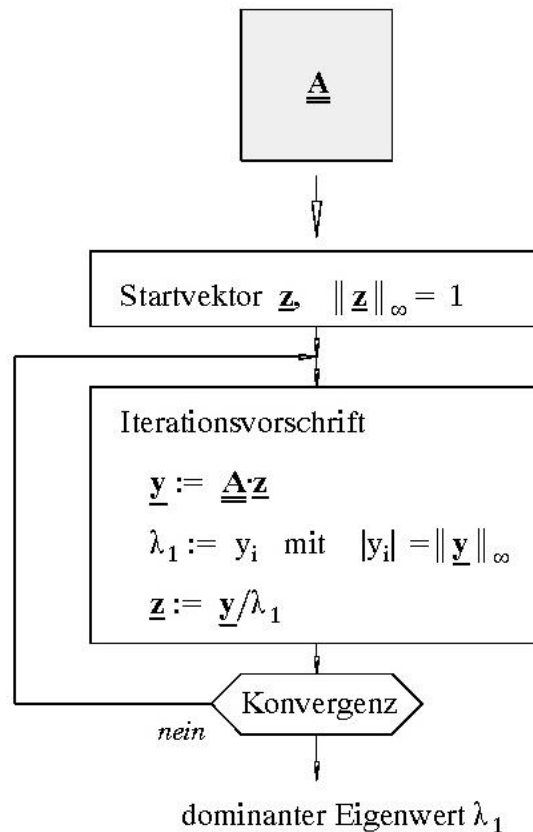
i	j	Inverse einer Linksdreiecksmatrix
1	1	$L_{11}^{-1} =$ _ _ _
2	1 2	$L_{21}^{-1} =$ (·) = _ _ _ $L_{22}^{-1} =$ _ _ _
3	1 2 3	$L_{31}^{-1} =$ (· + ·) = _ _ _ $L_{32}^{-1} =$ (·) = _ _ _ $L_{33}^{-1} =$ _ _ _

$\mathbf{L}^{-1} =$



Einfache Vektoriteration

Voraussetzung: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat reelle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$



- ☐ Nur lineare Konvergenz mit Faktor $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$
- ☐ Algorithmus benötigt nur „Matrix · Vektor“ Multiplikation (interessant für große, dünn besetzte Matrizen)
- ☐ Geringe praktische Bedeutung



Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

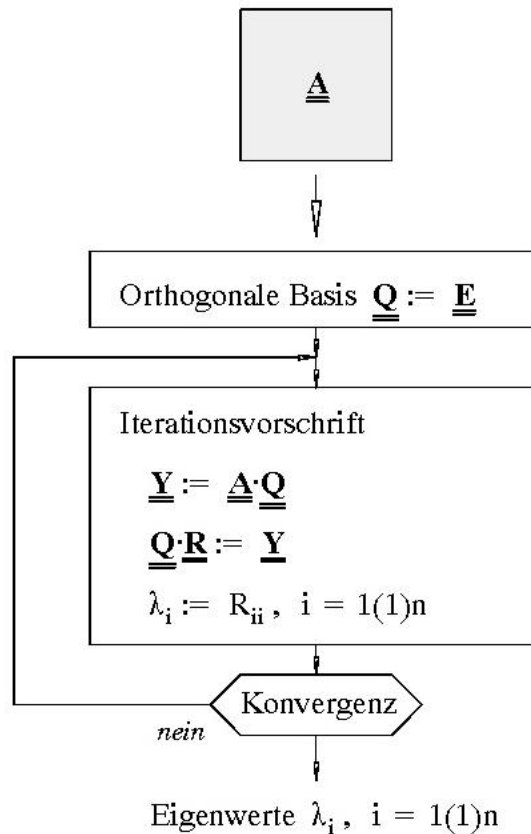
$$\rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, T = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{9}{11} & \frac{9}{11} & 1 \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & 1 \end{bmatrix}$$

s	dominanter Eigenvektor $\mathbf{z}^{(s)}$				$\lambda_1^{(s)}$	$\lambda_1^{(s)}$	$\frac{ \lambda_1 - \lambda_1^{(s)} }{ \lambda_1 - \lambda_1^{(s-1)} }$
					(Norm)	(Rayleigh)	(Norm)
0	1.00000	.00000	.00000				
1							
2	.23377	.81818	1.00000	7.0000000	6.8165138	.333	
3	.20047	.81818	1.00000	5.5714286	5.5462727	.286	
4	.18898	.81818	1.00000	5.2051282	5.1981197	.359	
5	.18464	.81818	1.00000	5.0788177	5.0763727	.384	
6	.18294	.81818	1.00000	5.0310378	5.0301108	.3942	
7	.18227	.81818	1.00000	5.0123385	5.0119755	.398	
8	.18200	.81818	1.00000	5.0049233	5.0047793	.399	
9	.18189	.81818	1.00000	5.0019674	5.0019100	.400	
10	.18185	.81818	1.00000	5.0007866	5.0007637	.400	
11	.18183	.81818	1.00000	5.0003146	5.0003054	.400	
12	.18182	.81818	1.00000	5.0001258	5.0001222	.400	
13	.18182	.81818	1.00000	5.0000503	5.0000489	.400	
14	.18182	.81818	1.00000	5.0000201	5.0000195	.400	
15	.18182	.81818	1.00000	5.0000081	5.0000078	.400	
16	.18182	.81818	1.00000	5.0000032	5.0000031	.400	
17	.18182	.81818	1.00000	5.0000013	5.0000013	.400	
18	.18182	.81818	1.00000	5.0000005	5.0000005	.400	
19	.18182	.81818	1.00000	5.0000002	5.0000002	.400	
20	.18182	.81818	1.00000	5.0000001	5.0000001	.400	



Orthogonale Iteration

Voraussetzung: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat reelle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$



Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Die Iteration liefert folgende Ergebnisse für \underline{Q} und \underline{R} :

$$\underline{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} -14.77 & 13.34 & -14.70 \\ 0 & 2.82 & -3.15 \\ 0 & 0 & -2.24 \end{bmatrix} \quad \underline{Q}^{(1)} = \begin{bmatrix} -.271 & .926 & .264 \\ -.610 & .047 & -.791 \\ -.745 & -.375 & -.552 \end{bmatrix}$$
$$\underline{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 6.84 & -7.34 & -22.82 \\ 0 & 2.02 & -1.81 \\ 0 & 0 & -.72 \end{bmatrix} \quad \underline{Q}^{(2)} = \begin{bmatrix} -.178 & .974 & .134 \\ -.623 & -.667 & -.782 \\ -.762 & -.222 & .609 \end{bmatrix}$$



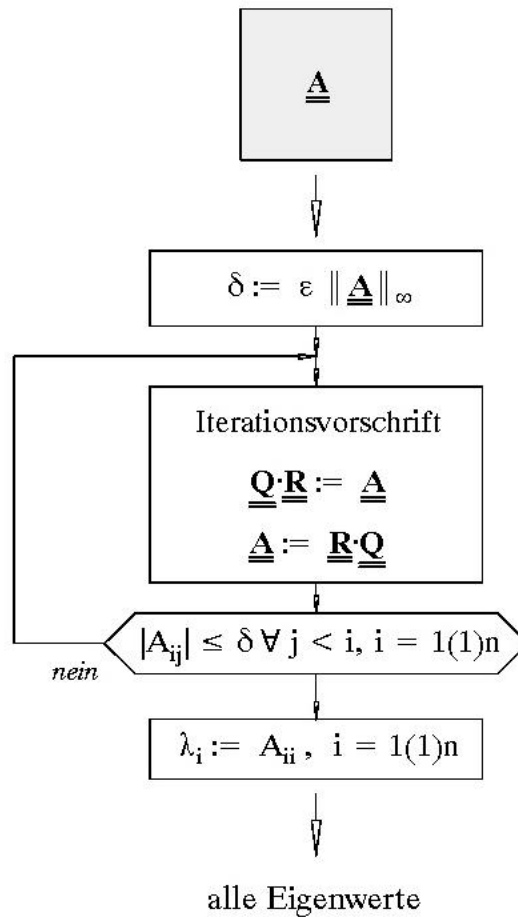
$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 5.55 & -11.05 & -21.68 \\ 0 & 2.02 & -1.48 \\ 0 & 0 & -0.89 \end{bmatrix} & \mathbf{Q}^{(3)} &= \begin{bmatrix} -0.153 & .986 & .066 \\ -0.626 & -0.045 & -0.779 \\ -0.765 & -0.161 & .623 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}^{(4)} &= \begin{bmatrix} 5.20 & -12.63 & -20.89 \\ 0 & 2.02 & -1.40 \\ 0 & 0 & -0.95 \end{bmatrix} & \mathbf{Q}^{(4)} &= \begin{bmatrix} -0.145 & .989 & .033 \\ -0.627 & -0.066 & -0.777 \\ -0.766 & -0.133 & .629 \end{bmatrix} \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man für die Eigenwerte:

s	$\lambda_1^{(s)}$	$\lambda_2^{(s)}$	$\lambda_3^{(s)}$	$\frac{ \lambda_1 - \lambda_1^{(s)} }{ \lambda_1 - \lambda_1^{(s-1)} }$	$\frac{ \lambda_2 - \lambda_2^{(s)} }{ \lambda_2 - \lambda_2^{(s-1)} }$	$\frac{ \lambda_3 - \lambda_3^{(s)} }{ \lambda_3 - \lambda_3^{(s-1)} }$
1	-----	-----	-----			
2	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3	-----	-----	-----	-----	-----	-----
4	-----	-----	-----	-----	-----	-----
5	5.0764003	2.0168666	.9767130	-----	-----	-----
6	5.0301150	2.0110895	.9885319	.394	.657	.492
7	5.0119762	2.0066557	.9943016	.398	.600	.497
8	5.0047794	2.0037843	.9971582	.399	.569	.499
9	5.0019100	2.0020779	.9985807	.400	.549	.499
10	5.0007637	2.0011140	.9992907	.400	.536	.500
11	5.0003054	2.0005872	.9996454	.400	.527	.500
12	5.0001222	2.0003057	.9998227	.400	.521	.500
13	5.0000489	2.0001577	.9999114	.400	.516	.500
14	5.0000195	2.0000808	.9999557	.400	.512	.500
15	5.0000078	2.0000412	.9999778	.400	.510	.500
16	5.0000031	2.0000209	.9999889	.400	.508	.500
17	5.0000013	2.0000106	.9999945	.400	.506	.500
18	5.0000005	2.0000053	.9999972	.400	.505	.500
19	5.0000002	2.0000027	.9999986	.400	.504	.500
20	5.0000001	2.0000014	.9999993	.400	.503	.500

QR-Verfahren

Voraussetzung: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat reelle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$



Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$



Die Iteration liefert folgende Ergebnisse:

$A^{(s)}$			$\frac{ A_{21}^{(s)} }{ A_{21}^{(s-1)} }$	$\frac{ A_{31}^{(s)} }{ A_{31}^{(s-1)} }$	$\frac{ A_{32}^{(s)} }{ A_{32}^{(s-1)} }$
Iterationsschritt: 0					
4.0000	-1.0000	1.0000			
9.0000	-8.0000	9.0000			
11.000	-11.000	12.000			
Iterationsschritt: 1					
6.8165	-7.5262	-22.559			
.62700	1.3157	-3.9737	.070		
.17865	.89967E-01	-.13226	.016		.008
Iterationsschritt: 2					
5.5463	-11.099	21.637			
.13775	1.7379	2.0749	.220		
-.18867E-01	-.10107	.71581	.106		1.123
Iterationsschritt: 3					
5.1981	-12.651	-20.877			
.45069E-01	1.9107	-1.6144	.327		
.30379E-02	.61385E-01	.89118	.161		.607
Iterationsschritt: 4					
5.0764	-13.382	20.450			
.16707E-01	1.9726	1.4698	.371		
-.55612E-03	-.32373E-01	.95108	.183		.527
Iterationsschritt: 5					
5.0301	-13.734	-20.227			
.64859E-02	1.9933	-1.4199	.388		
.10700E-03	.16387E-01	.97658	.192		.506
Iterationsschritt: 6					
5.0120	-13.905	20.114			
.25636E-02	1.9995	1.4023	.395		
-.21028E-04	-.81985E-02	.98850	.197		.500
Iterationsschritt: 7					
5.0048	-13.989	-20.058			
.10206E-02	2.0009	-1.3962	.398		
.41716E-05	.40913E-02	.99429	.198		.499
Iterationsschritt: 8					
5.0019	-14.031	20.029			
.40746E-03	2.0009	1.3941	.399		
-.83116E-06	-.20418E-02	.99716	.199		.499



```
Iterationsschritt: 9
  5.0008      -14.051      -20.015
  .16286E-03   2.0007      -1.3935      .400
  .16593E-06   .10195E-02   .99858      .200      .499

Iterationsschritt: 10
  5.0003      -14.062      20.008
  .65124E-04   2.0004      1.3934      .400
  -.33158E-07  -.50936E-03   .99929      .200      .500

Iterationsschritt: 11
  5.0001      -14.067      -20.005
  .26046E-04   2.0002      -1.3934      .400
  .66288E-08   .25456E-03   .99965      .200      .500

Iterationsschritt: 12
  5.0000      -14.069      20.003
  .10418E-04   2.0001      1.3934      .400
  -.13255E-08  -.12725E-03   .99982      .200      .500

Iterationsschritt: 13
  5.0000      -14.071      -20.002
  .41671E-05   2.0001      -1.3934      .400
  .26507E-09   .63615E-04   .99991      .200      .500

Iterationsschritt: 14
  5.0000      -14.071      20.001
  .16668E-05   2.0000      1.3934      .400
  -.53012E-10  -.31805E-04   .99996      .200      .500

Iterationsschritt: 15
  5.0000      -14.072      -20.001
  .66673E-06   2.0000      -1.3935      .400
  .10602E-10   .15902E-04   .99998      .200      .500

  :
```

Aus dem 15. Iterationsschritt erhält man folgende Näherungswerte für die Eigenwerte:

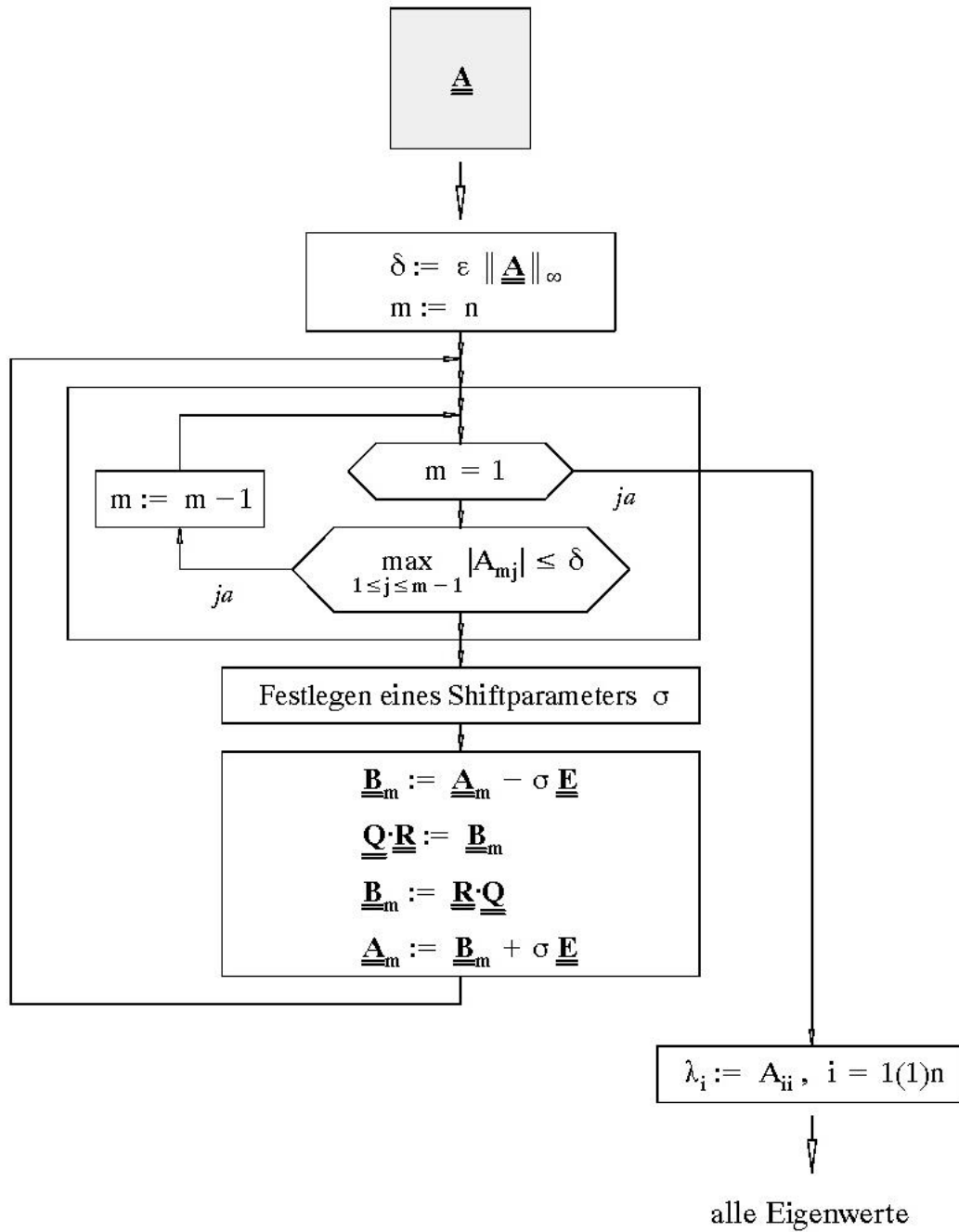
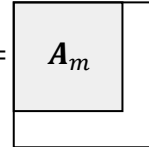
$\lambda_1 \approx$ _____ , $\lambda_2 \approx$ _____ , $\lambda_3 \approx$ _____ .



QR–Verfahren mit Shift– und Deflationstechnik

Voraussetzung: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Notation: $A_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m \leq n$, linker oberer Block: $A =$





Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der verbesserten Shiftstrategie einen geeigneten Shiftparameter für den ersten Iterationsschritt:

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \rightarrow p(\mu) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{pmatrix}$$
$$= \mu^2 - \text{---} \mu + \text{---}$$
$$\mu_{1,2} = \text{---}$$
$$\sigma = \text{---}$$



Die Iteration liefert folgende Ergebnisse:

Iterationsschritt: 0
4.0000 -1.0000 1.0000
9.0000 -8.0000 9.0000
11.000 -11.000 12.000

Iterationsschritt: 1
Ordnung: 3 Shift: 3.00000
4.0099 -20.831 13.039
-.80278E-02 1.0065 -.11391
.13980 -.11391 2.9836

Iterationsschritt: 2
Ordnung: 3 Shift: 2.99015
5.9253 -22.710 8.3369
.21538 -.23204 1.8638
.15100 -.86378 2.3067

Iterationsschritt: 3
Ordnung: 3 Shift: 1.07467
5.1787 -16.462 -18.032
.40157E-01 1.5998 -1.7251
-.51559E-02 -.77010E-01 1.2215

Iterationsschritt: 4
Ordnung: 3 Shift: 1.00000
5.0429 -14.063 19.997
.92735E-02 1.9571 1.4544
.51366E-18 .53017E-16 1.0000

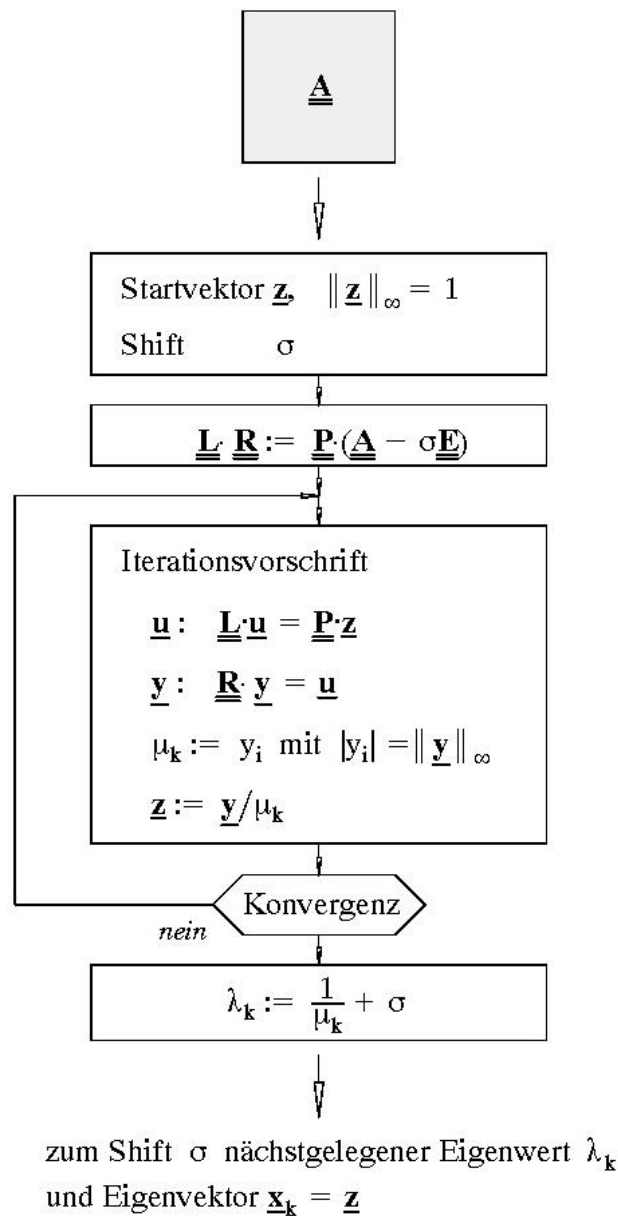
Iterationsschritt: 5
Ordnung: 2 Shift: 2.00000
5.0000 14.072 19.997
.25376E-18 2.0000 1.4544
.51366E-18 .53017E-16 1.0000

Damit erhält man folgende Näherungswerte für die Eigenwerte:

$\lambda_1 \approx$, $\lambda_2 \approx$, $\lambda_3 \approx$.

Inverse Vektoriteration

Voraussetzung: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat reelle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$





Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, \quad T = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{9}{11} & \frac{9}{11} & 1 \\ \frac{11}{11} & \frac{11}{11} & 1 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmung des 1. Eigenvektors:

Shift: $\sigma := 5.1$ $A - \sigma E = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$

LR-Zerlegung: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.818 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0.512 & 1 \end{bmatrix}$
 $R = \begin{bmatrix} 11 & -11 & 6.9 \\ 0 & -4.1 & 3.35 \\ 0 & 0 & -0.028 \end{bmatrix}$
 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Iteration:

Startvektor: $\mathbf{z}^{(0)} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Abbildung: $\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}$



Normierung: $\|\mathbf{y}^{(1)}\|_\infty :=$ _ _ _ _ _

$\mu_k^{(1)} :=$ _ _ _ _ _ , $\lambda_k^{(1)} :=$ _ _ _ _ _

$$\mathbf{z}^{(1)} := \frac{\mathbf{y}^{(1)}}{\mu_k^{(1)}} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

Die weitere Iteration liefert:

s	Eigenvektor $\mathbf{z}^{(s)}$			$\lambda_1^{(s)}$
0	1.0000	.00000	.00000	
1	.19091	.81818	1.00000	5.0718182
2	.18210	.81818	1.00000	5.0031250
3	.18183	.81818	1.00000	5.0001007
4	.18182	.81818	1.00000	5.0000032
5	.18182	.81818	1.00000	5.0000001
6	.18182	.81818	1.00000	5.0000000

b) Bestimmung des 2. Eigenvektors:

Shift: $\sigma := 2.0001$

s	Eigenvektor $\mathbf{z}^{(s)}$			$\lambda_2^{(s)}$
0	1.0000	.00000	.00000	
1	-.09090	.81818	1.00000	2.0001273
2	-.09091	.81818	1.00000	2.0000000

c) Bestimmung des 3. Eigenvektors:

Shift: $\sigma := 1.0001$

s	Eigenvektor $\mathbf{z}^{(s)}$			$\lambda_3^{(s)}$
0	1.0000	.00000	.00000	
1	-.18181	.81818	1.00000	.6365091
2	-.10909	.81818	1.00000	1.8000317
3	-.09556	.81756	1.00000	1.9556243
4	-.00267	.99472	1.00000	1.0287075
5	.00000	1.00000	1.00000	.9999970
6	.00000	1.00000	1.00000	1.0000000



Einschrittverfahren 2. Ordnung

Die Integrationsvorschrift eines Einschrittverfahrens lautet

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \text{-----}, \quad (1)$$

wobei sich die Verfahrensfunktion $\phi(t_i, \eta_i, h)$ durch Vergleich mit der Taylor-Reihe

$$\bar{x}(t_i + h) = \eta_i + h \left[f + \frac{h}{2} (f_t + f_x f) + \dots \right]_{t_i, \eta_i} \quad (2)$$

ergibt.

Als Ansatz für ein explizites Runge–Kutta–Verfahren 2. Ordnung wählt man

$$\phi(t, x, h) = b_1 f^{(1)} + b_2 f^{(2)}, \quad (3)$$

mit

$$f^{(1)} = f(t, x),$$

$$f^{(2)} = f(t + c_2 h, x + a_{21} h f^{(1)}).$$

Durch Entwicklung der Hilfssteigungen $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ in Taylor-Reihen nach h findet man bei Abbruch nach dem linearen Glied

$$f^{(1)} = \text{-----},$$

$$f^{(2)} = \text{-----} + \dots$$

Eingesetzt in den Ansatz (3) ergibt sich

$$\phi(t, x, h) = \text{-----} f + \text{-----} h f_t + \text{-----} h f_x f$$

und durch Vergleich mit der Taylor-Reihe (2) das Gleichungssystem

	= 1
	= $\frac{1}{2}$
	= $\frac{1}{2}$



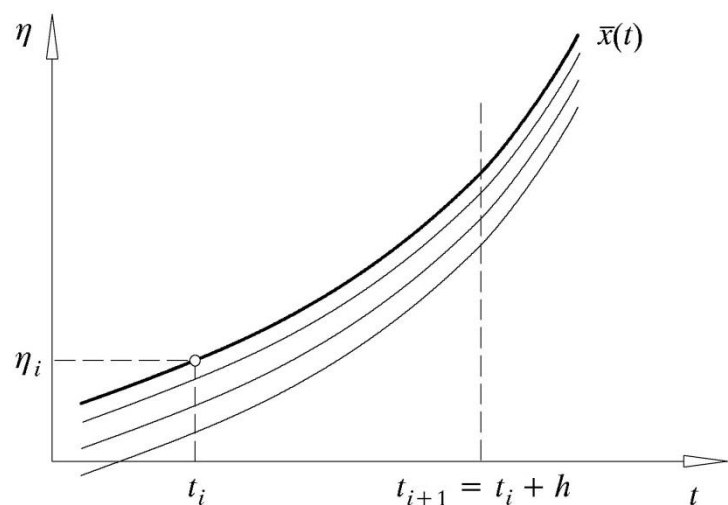
Mögliche Lösungen sind (dargestellt im BUTCHER-Block):

Verfahren von HEUN (1900):

0	0	0
1	1	0
	1/2	1/2

→ $\phi(t, x, h) =$ _____ .

Konstruieren Sie einen
Integrationsschritt:

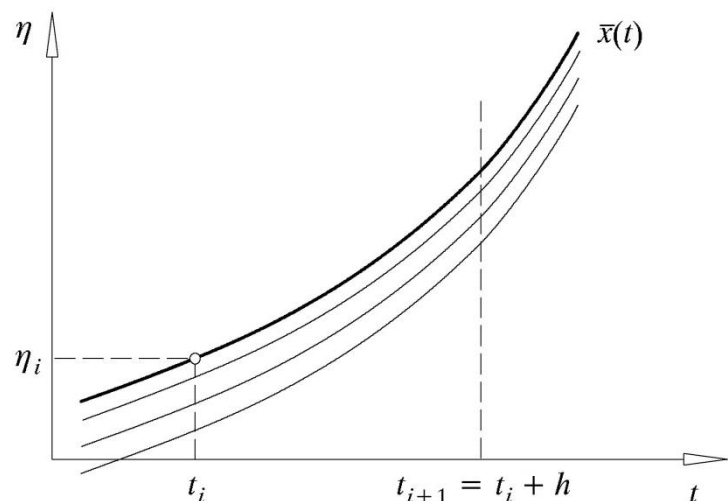


Verfahren von COLLATZ (1960):

0	0	0
1/2	1/2	0
	0	1

→ $\phi(t, x, h) =$ _____ .

Konstruieren Sie einen
Integrationsschritt:





Runge–Kutta–Verfahren 4. Ordnung

Butcher–Block:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

$$\rightarrow \Phi = \frac{1}{6} f^{(1)} + \frac{4}{6} f^{(2)} + \frac{2}{6} f^{(3)} + \frac{1}{6} f^{(4)}$$

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

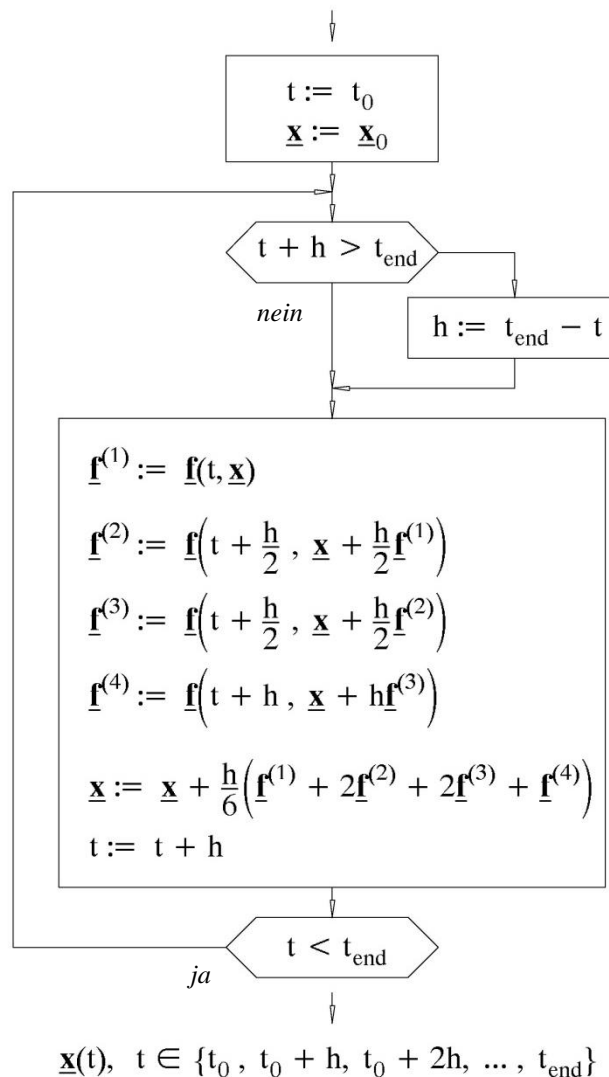
$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$f^{(3)} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$f^{(4)} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Algorithmus:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$





Stabilitätsgebiete von Einschrittverfahren

Für eine numerisch stabile Integration wird ein Abklingen der Fehlerbeiträge gefordert:

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} \stackrel{!}{<} 1 \quad (1)$$

Bei Einschrittverfahren gilt dabei für die Fehlerfortpflanzung

$$\delta_{i+1} = \delta_i + h[\phi(t_i, \eta_i, h) - \phi(t_i, x_i, h)] \quad (2)$$

mit

$$\delta_i = \eta_i - x_i \quad (3)$$

Die Stabilität der numerischen Integration ist vom dynamischen Verhalten des zu untersuchenden Systems abhängig. Zur Untersuchung wird das skalare Referenzproblem

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(t_0) = x_0, \lambda \in \mathbb{C} \quad (4)$$

verwendet.

Das Stabilitätsverhalten des Polygonzugverfahrens ('Euler vorwärts') soll untersucht werden.

a) Wie lautet die Verfahrensfunktion des Polygonzugverfahrens?

$$\eta_{i+1} = \eta_i + h\phi(t_i, \eta_i, h), \quad \phi(t_i, \eta_i, h) = \text{-----} \quad (5)$$

b) Setzen Sie die Verfahrensfunktion (5) in (2) für die Stützstellen $\phi(t_i, \eta_i, h)$ und $\phi(t_i, x_i, h)$ ein:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \text{-----} \quad (6)$$

c) Setzen Sie nun das skalare Referenzproblem (4) in (6) ein und beachten Sie (3). Welcher Zusammenhang ergibt sich für die Fehlerfortpflanzung?

$$\frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} = \text{-----}$$

d) Welche Stabilitätsaussage leitet sich daraus mit (1) ab?

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} = \text{-----} < 1. \quad (7)$$



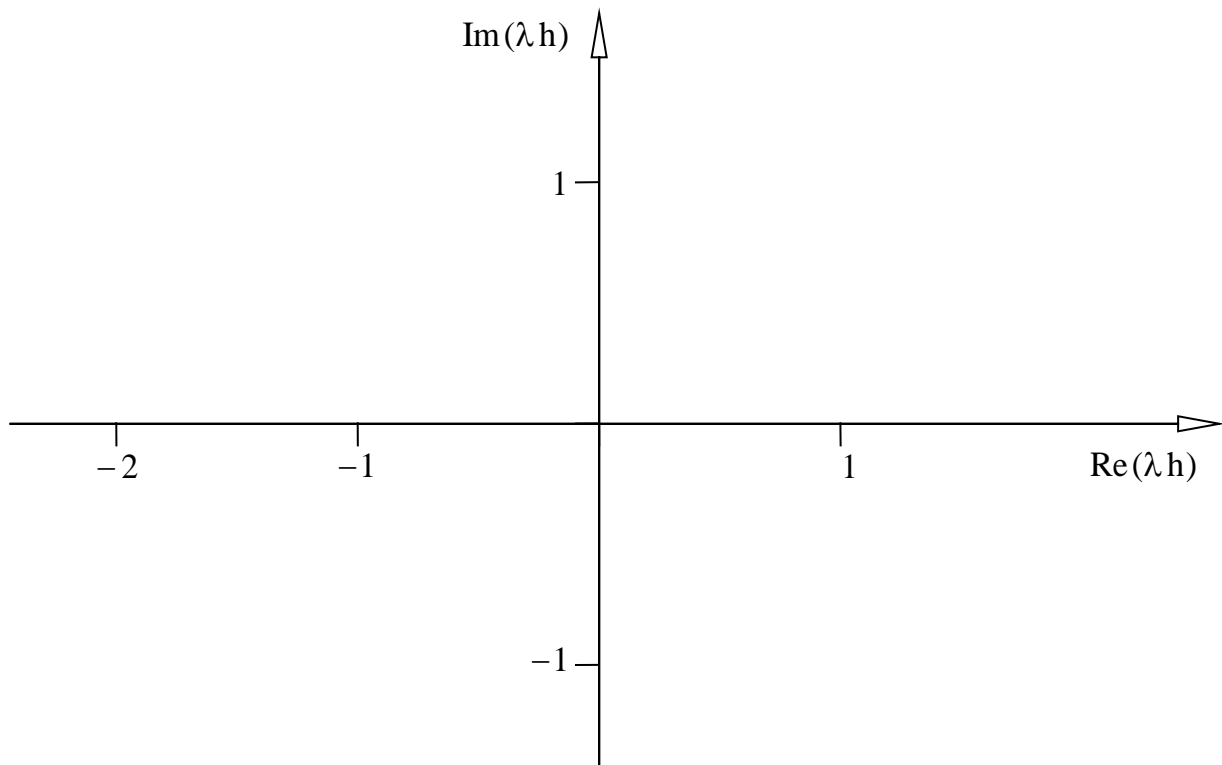
Gleichung (7) beschreibt eine Abhängigkeit der maximal zulässigen Schrittweite h von der Systemdynamik λ . Dieser Zusammenhang kann in der komplexen λh -Ebene übersichtlich dargestellt werden.

- e) Berechnen Sie die Linie der Grenzstabilität mit

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} = 1,$$

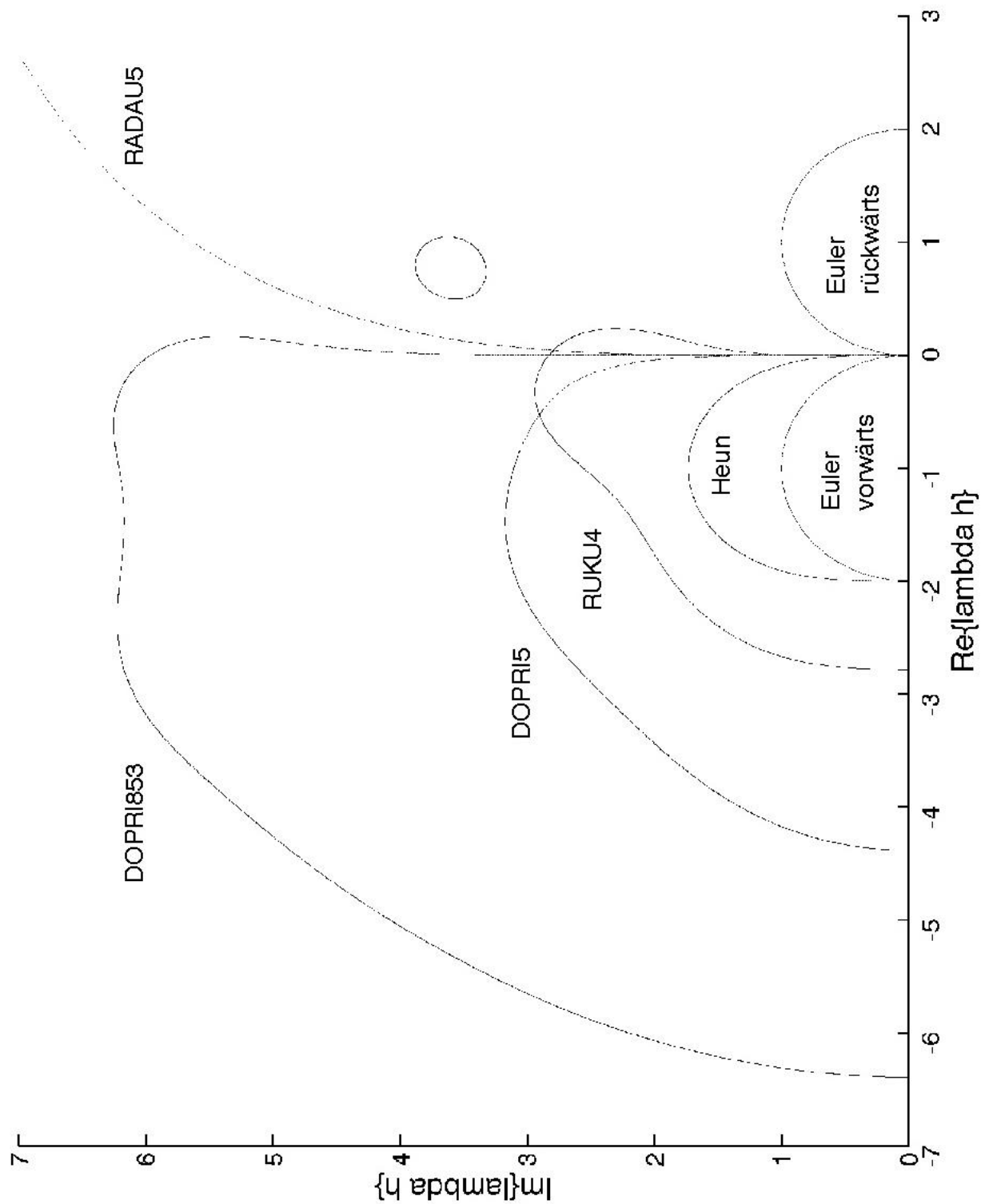
indem Sie eine komplexe Betragsbildung mit $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ durchführen. Welcher Zusammenhang ergibt sich?

- f) Tragen Sie das Stabilitätsgebiet in die komplexe λh -Ebene ein





Stabilitätsgebiete der wichtigsten Einschrittverfahren





Integrationsfehler

Gesamtfehler:

$$\Delta x(t, h) = r(t, h) + e(t, h)$$

Rundungsfehler $\sim \frac{1}{h}$ *globaler Diskretisierungsfehler* $\sim h^p$

Beispiel:

$$\dot{x} = -200tx^2, \quad x(-1) = \frac{1}{101}$$

exakte Lösung:

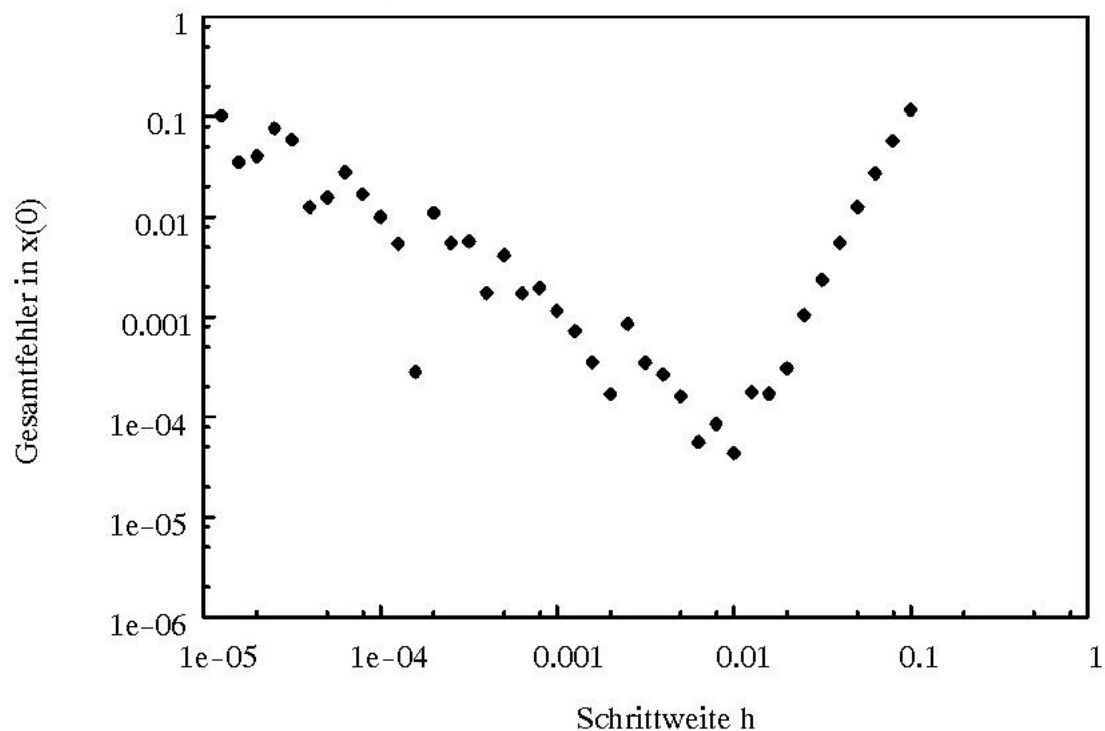
$$x(t) = \frac{1}{1+100t^2}$$

Probe:

$$x(-1) =$$

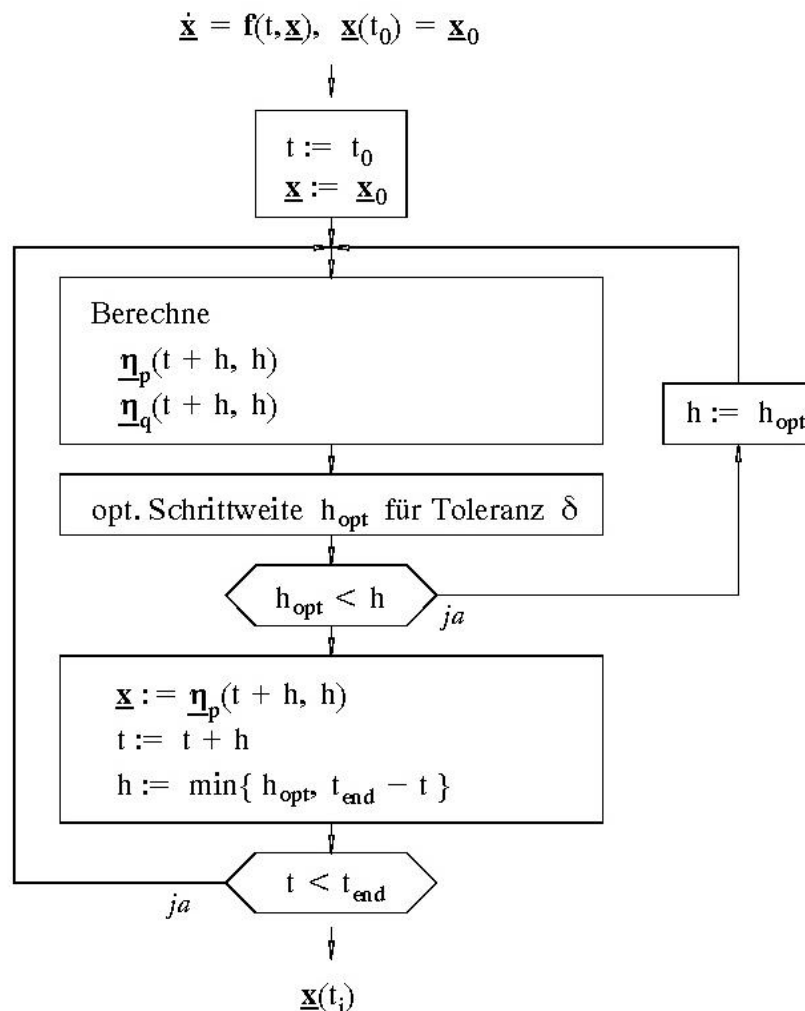
$$\dot{x}(t) =$$

numerische Lösung: Runge-Kutta Verfahren 4.Ordnung
(gerechnet mit REAL)



Fehlberg–Schrittweitensteuerung

gegeben: Schrittweiten–Vorschlag $h = h_0$
Fehlertoleranz δ



Beispiel: (vgl. A20):

$$\dot{x} = -200tx^2, \quad x(-3) = \frac{1}{901}$$

numerische Lösung: Runge–Kutta Verfahren 5/4. Ordnung (DOUBLE)

	Funktionsauswertungen	Fehler in $x(0)$
Fehlberg–Schrittw.steuerung ($h_0 = 5 \cdot 10^{-2}$, $\text{EPS} = 1 \cdot 10^{-7}$)	427	$6.4504 \cdot 10^{-6}$
$h = h_{\text{mittel}} = 4.2155 \cdot 10^{-2}$	427	$1.3939 \cdot 10^{-4}$
$h = h_{\text{max}} = 1.44244 \cdot 10^{-1}$	127	$1.92075 \cdot 10^{-1}$
$h = h_{\text{min}} = 1.05495 \cdot 10^{-2}$	1711	$3.05471 \cdot 10^{-7}$

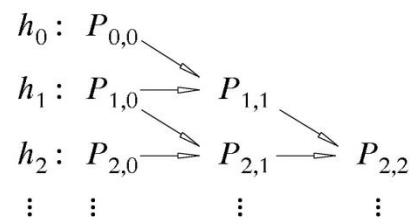
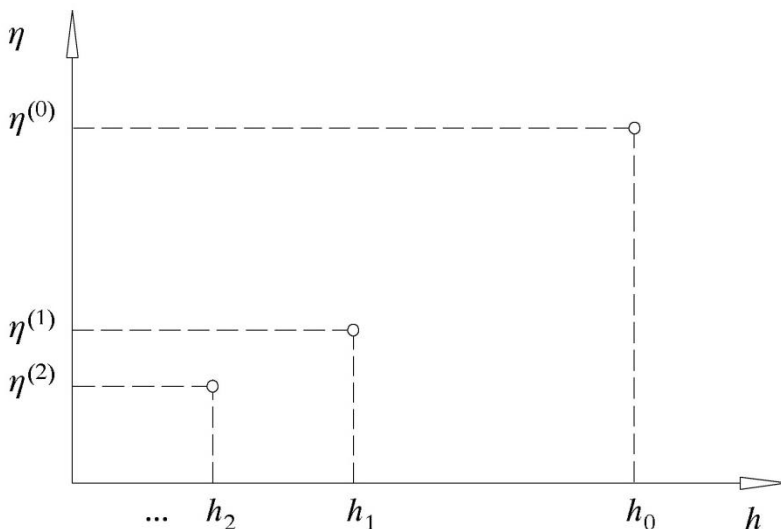
Rekursiver Aufbau eines Extrapolationspolynoms k -ter Ordnung nach dem Aitken–Neville Schema

Definition: $P_{j,l}(h)$ Polynom l -ter Ordnung mit den Stützstellen
 $P_{j,l}(h_{j-i}) = \eta^{(j-i)}, \quad i = 0(1)l.$
 speziell: $P_{j,0} \equiv \eta^{(j)}, \quad j = 0(1)k$
 $P_{k,k}(h)$ gesuchtes Interpolationspolynom k -ter Ordnung

Rekursion: $P_{j,l}(h)$ und $P_{j-1,l}(h)$ sind Polynome l -ter Ordnung mit l gemeinsamen Stützstellen h_{j-1}, \dots, h_{j-l}
 $\rightarrow P_\gamma(h) := \gamma P_{j,l}(h) + (1 - \gamma)P_{j-1,l}(h), \quad \gamma \in \mathbb{R},$
 hat die gleichen Stützstellen

speziell: $\gamma := \frac{h - h_{j-l-1}}{h_j - h_{j-l-1}} \rightarrow \gamma = 0$ für $h = h_{j-l-1}$
 $\gamma = 1$ für $h = h_j$

$$\begin{aligned} \rightarrow P_\gamma(h) \equiv P_{j,l+1}(h) &= \frac{(h - h_{j-l-1})P_{j,l}(h) + (h_j - h)P_{j-1,l}(h)}{h_j - h_{j-l-1}} \\ &= P_{j,l}(h) + \frac{h_j - h}{h_{j-l-1} - h_j} (P_{j,l}(h) - P_{j-1,l}(h)) \end{aligned}$$





Mehrschrittverfahren mit konstanter Schrittweite

Integrationsformel:

$$\eta_{p+k} = \eta_{p-j} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}$$

$$f_{p-i} = f(t_{p-i}, \eta_{p-i}), \quad \beta_{qi} = \int_{-j}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{l-i} ds, \quad i = 0(1)q$$

○ Adams–Bashforth Prädiktor–Verfahren ($k = 1, \quad j = 0$)

Beispiel: $q = 2$

$$\beta_{20} = \int_{--}^{--} \left(\frac{s + \quad}{\quad} \right) \left(\frac{s + \quad}{\quad} \right) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{3s^2}{2} + 2s \right]_0^1 = \quad$$

$$\beta_{21} = \int_{--}^{--} \left(\frac{s + \quad}{\quad} \right) \left(\frac{s + \quad}{\quad} \right) ds = - \left[\frac{s^3}{3} + s^2 \right]_0^1 = \quad$$

$$\beta_{22} = \int_{--}^{--} \left(\frac{s + \quad}{\quad} \right) \left(\frac{s + \quad}{\quad} \right) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \quad$$

$$\rightarrow \eta_{p+1} = \eta_p + \frac{h}{12} \left[\quad f_p + \quad f_{p-1} + \quad f_{p-2} \right]$$

allgemein: $\eta_{p+1} = \eta_p + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}$

Verfahrens- ordnung	q		i				
			0	1	2	3	4
1	0	β_{0i}	1				
2	1	$2\beta_{1i}$	3	-1			
3	2	$12\beta_{2i}$					
4	3	$24\beta_{3i}$	55	-59	37	-9	
5	4	$720\beta_{4i}$	1901	-2774	2616	-1274	251



- Adams–Moulton Korrektor–Verfahren ($k = 0, j = 1$)

Beispiel: $q = 2$

$$\beta_{20} = \int_{-1}^0 \left(\frac{s+1}{2} \right) \left(\frac{s+1}{2} \right) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{3s^2}{2} + 2s \right]_{-1}^0 = \frac{1}{12}$$

$$\beta_{21} = \int_{-1}^0 \left(\frac{s+1}{2} \right) \left(\frac{s}{1} \right) ds = - \left[\frac{s^3}{3} + s^2 \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6}$$

$$\beta_{22} = \int_{-1}^0 \left(\frac{s+1}{2} \right) \left(\frac{s^2}{2} \right) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{24}$$

$$\rightarrow \eta_p = \eta_{p-1} + \frac{h}{12} \left[f_p + 4f_{p-1} + f_{p-2} \right]$$

allgemein: $\eta_p = \eta_{p-1} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}$

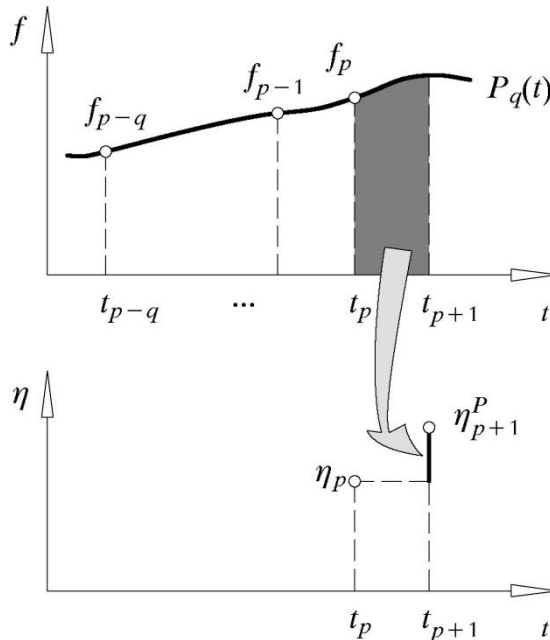
bzw. nach Umbenennung des Index $p \rightarrow p+1$: $\eta_{p+1} = \eta_p + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p+1-i}$

Verfahrens- ordnung	q		i				
			0	1	2	3	4
1	0	β_{0i}	1				
2	1	$2\beta_{1i}$	1	1			
3	2	$12\beta_{2i}$					
4	3	$24\beta_{3i}$	9	19	-5	1	
5	4	$720\beta_{4i}$	251	646	-264	106	-19

- Nyström Prädiktor–Verfahren ($k = 1, j = 1$)
speziell: midpoint–rule ($q = 0$): $\eta_{p+1} = \eta_{p-1} + 2hf_p$
- Milne Korrektor–Verfahren ($k = 0, j = 2$)

PECE-Verfahren (Predict-Evaluate-Correct-Evaluate)

P



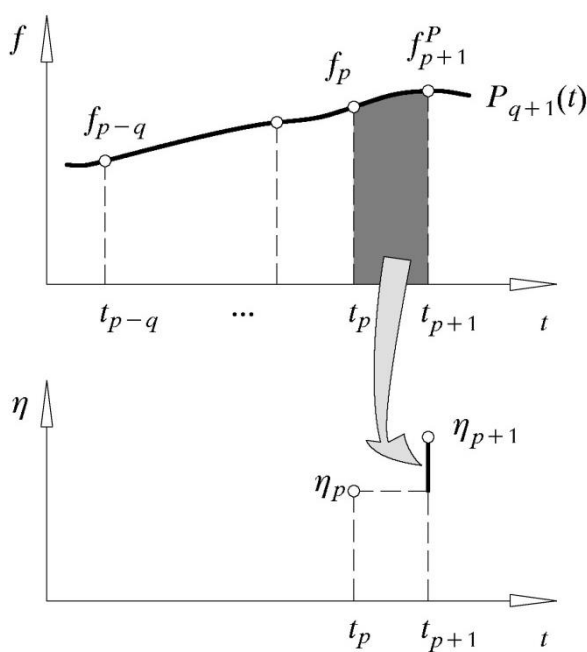
Adams–Bashforth
($q + 1$)–ter Ordnung

$$\eta_{p+1}^P = \eta_p + h \sum_{i=0}^q \beta_{q,i}^{AB} f_{p-i}$$

E

$$f_{p+1}^P := f(t_{p+1}, \eta_{p+1}^P)$$

C



Adams–Moulton
($q + 2$)–ter Ordnung

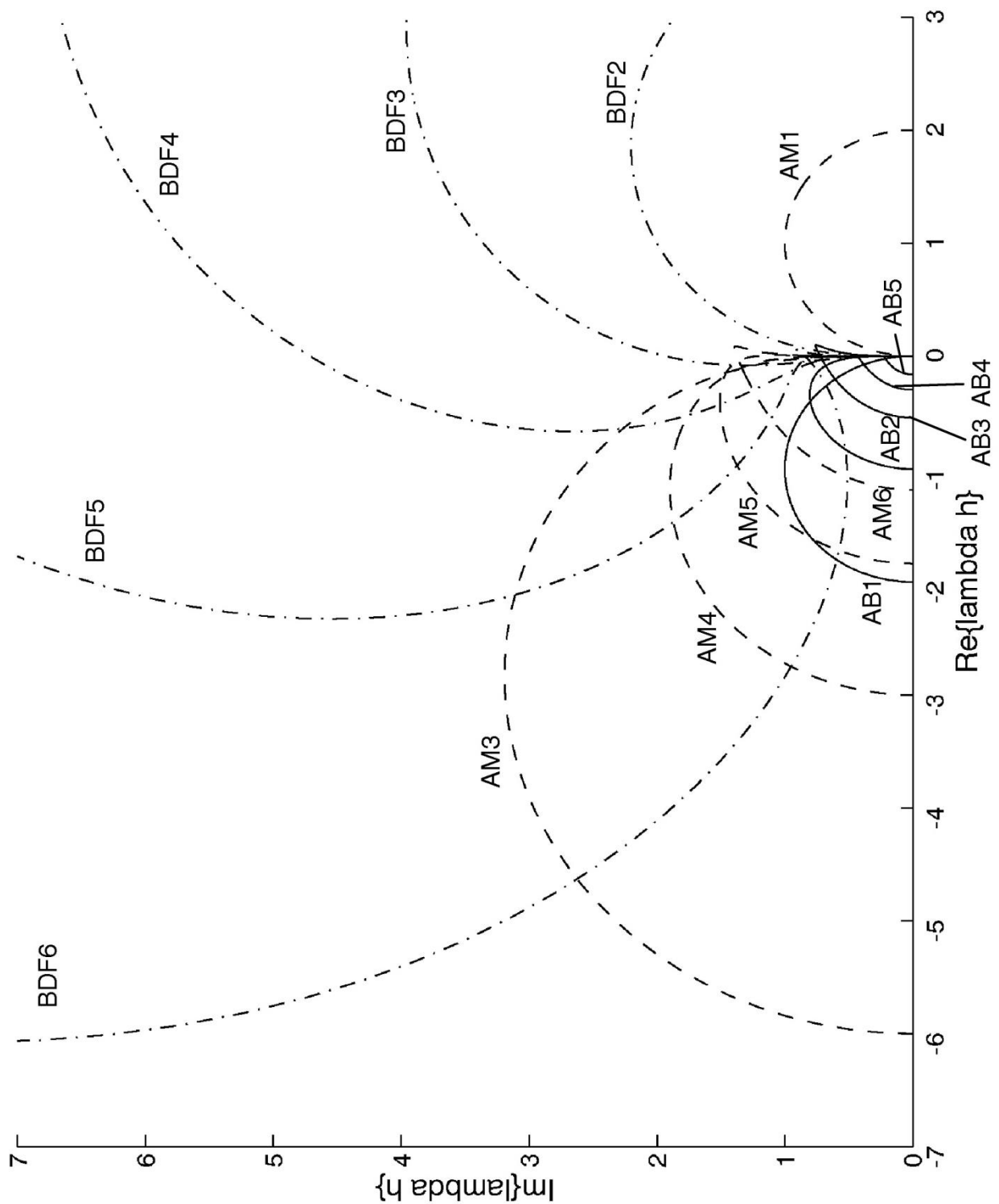
$$\eta_{p+1} = \eta_p + h \sum_{i=1}^{q+1} \beta_{(q+1),i}^{AM} f_{p+1-i} + h \beta_{(q+1),0}^{AM} f_{p+1}^P$$

E

$$f_{p+1} := f(t_{p+1}, \eta_{p+1})$$



Stabilitätsgebiete der wichtigsten Mehrschrittverfahren



AB: Adams Bashforth methods
AM: Adams Moulton methods
BDF: Backward differentiation formula