



## Punktabbildungen in der Nichtlinearen Dynamik

Die Untersuchung nichtlinearer Abbildungen

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

ist auch Teil der Nichtlinearen Dynamik. Entsprechend der Struktur der Rekursionsfunktion und in Abhängigkeit von Abbildungsparametern können solche Abbildungen Fixpunkte, periodische Lösungen, quasi-periodische Lösungen oder chaotisches Verhalten aufweisen.

### Beispiel: Logistische Abbildung

$$x^{(k+1)} = \mu x^{(k)}(1 - x^{(k)}), \quad x \in [0,1], \quad \mu \in [0,4]$$

- a) Bestimmen Sie die Fixpunkte  $x^*$  der Abbildung in Abhängigkeit des Abbildungsparameters  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \overset{!}{=} \mu & \quad \Rightarrow x_1^* = \quad , \\ \text{-----} & \quad \text{-----} \\ & \quad x_2^* = \quad . \\ & \quad \text{-----} \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Abbildungsfunktion an den Fixpunkten:

$$\phi'(x_1^*) = \quad ,$$

-----

$$\phi'(x_2^*) = \quad .$$

-----

- c) Geben Sie Intervalle für den Parameter  $\mu$  an, in denen die Abbildung gegen den Fixpunkt  $x_1^*$  bzw.  $x_2^*$  konvergiert:

$$x_1^* \text{ ist stabiler Fixpunkt für } \mu \in \left( \quad , \quad \right),$$

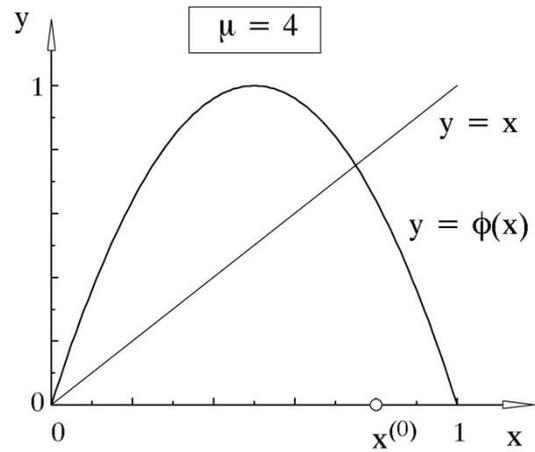
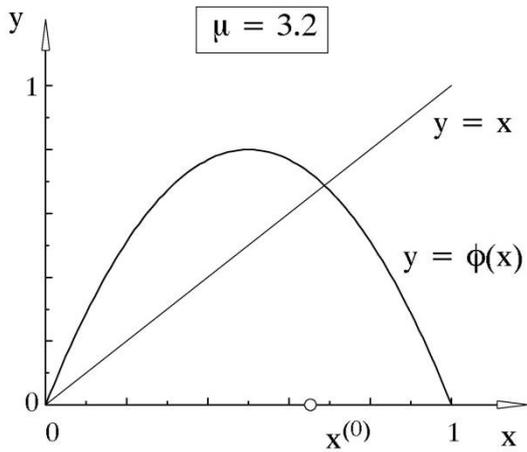
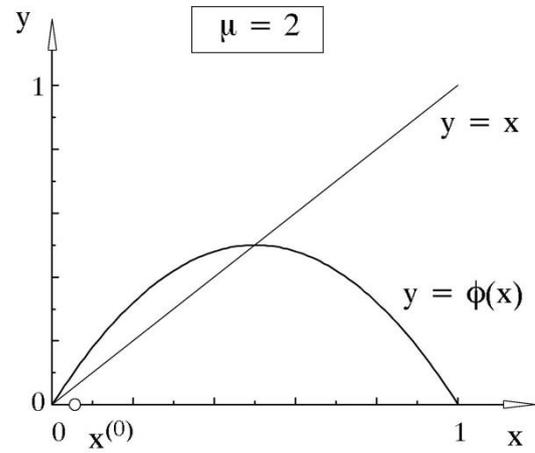
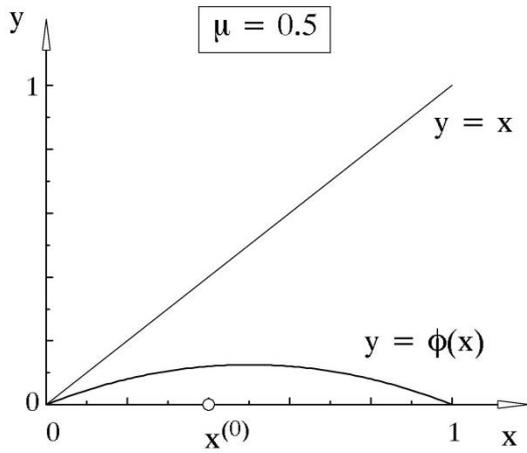
-----

$$x_2^* \text{ ist stabiler Fixpunkt für } \mu \in \left( \quad , \quad \right).$$

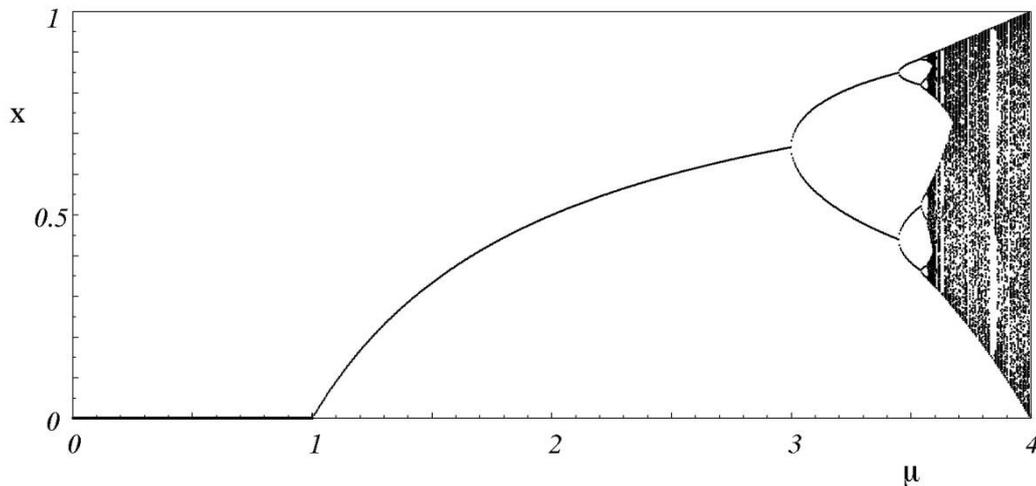
-----



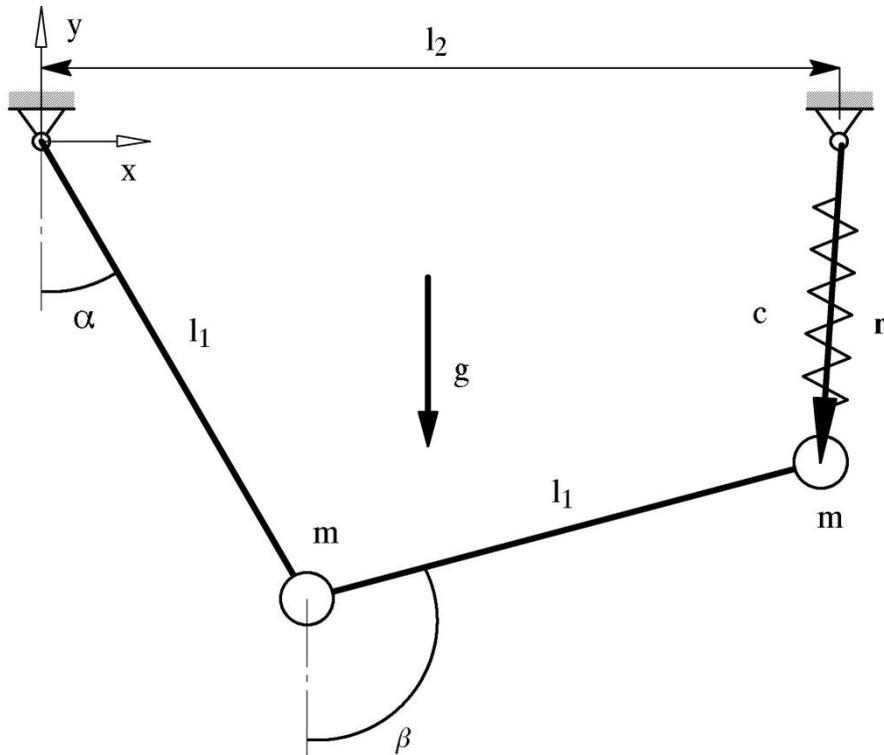
d) Führen Sie die Iteration für folgende Parameterwerte graphisch durch:



e) Das vollständige Lösungsverhalten in Abhängigkeit des Abbildungsparameters  $\mu$  zeigt folgendes Bifurkationsdiagramm. Zeichnen Sie die Fixpunktkurven und Ihre Iterationslösungen in dieses Diagramm ein.



## Gleichgewichtslage beim gefederten Doppelpendel



Im Allgemeinen ist die Nullstellensuche ein vektorieller Ansatz, der auch bei mehrdimensionalen Problemen angewandt werden kann. Im Folgenden soll mit Hilfe einer vektoriellen Nullstellensuche die Gleichgewichtslage des oben dargestellten Doppelpendels mit Feder (Federsteifigkeit  $c$ ) bestimmt werden.

Unter Verwendung der verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{y} = [\alpha, \beta]$  ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2l_1^2 m & l_1^2 m \cos(\alpha - \beta) \\ l_1^2 m \cos(\alpha - \beta) & l_1^2 m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{y})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} l_1^2 m \sin(\alpha - \beta) \dot{\beta}^2 \\ l_1^2 m \sin(\beta - \alpha) \dot{\alpha}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2mgl_1 \sin \alpha + l_1 l_2 c \cos \alpha + l_1^2 c \sin(\alpha - \beta) \\ cl_1 l_2 \cos \beta - l_1 mg \sin \beta - l_1^2 c \sin(\alpha - \beta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_e(\mathbf{y})}$$

- a) Welche Bedingungen gelten für den Gleichgewichtszustand des Pendels?

-----



- b) Vereinfachen Sie damit die Bewegungsgleichungen des Pendels auf ein Nullstellenproblem:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) := \left[ \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right]$$

Für dieses Nullstellenproblem ist ein geeigneter Lösungsansatz zu formulieren, dem eine lineare Taylor-Approximation der Zielfunktion zugrunde liegt. Dies führt auf die vektorielle Newton-Raphson-Nullstellensuche. Allgemein gilt im skalaren Fall für beliebige Funktionen  $f(y)$  die Taylor-Approximation

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(y_0) (y - y_0)^k$$

- c) Beschreiben Sie die Taylor-Entwicklung der vektoriellen Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ . Brechen Sie die Taylor-Reihe nach dem linearen Glied ab:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) \approx \text{-----}$$

- d) Formulieren Sie die Taylor-Entwicklung für den Fall  $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$  so um, dass eine Schrittfunktion vom  $k$ -ten auf den  $(k + 1)$ -ten Iterationsschritt der Nullstellensuche entsteht:

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} \text{-----}$$

- e) Bestimmen Sie die für die Schrittfunktion benötigte Iterationsmatrix:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = \left[ \begin{array}{c} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right]$$



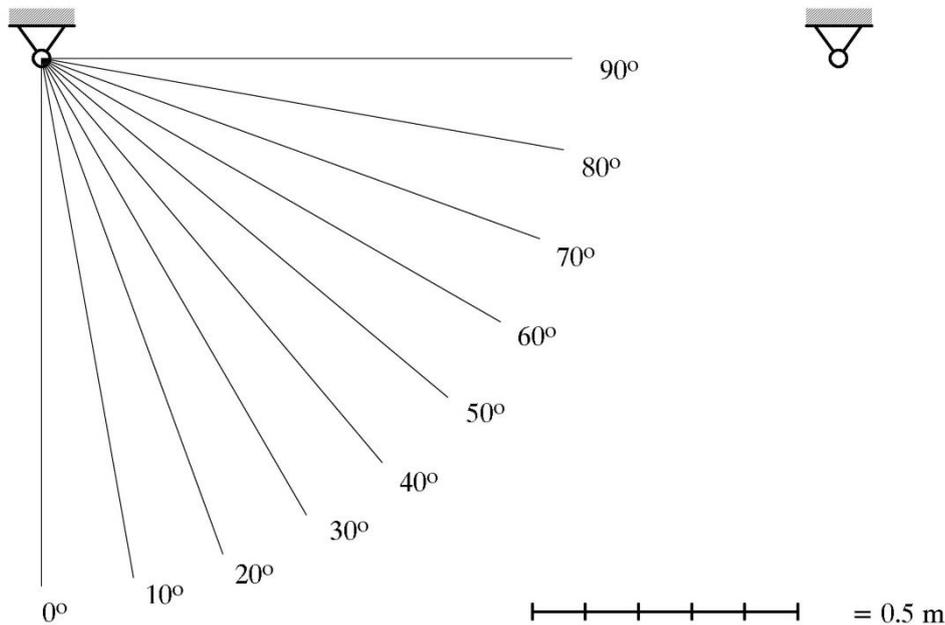
Die Schrittfunktion wurde in einem Computerprogramm realisiert. Eine Nullstellensuche mit den Parametern  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $l_1 = 1 \text{ m}$ ,  $l_2 = 1.5 \text{ m}$ ,  $c = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  und den Anfangswerten  $\alpha^{(0)} = \beta^{(0)} = 0$  führt auf folgenden Iterationsverlauf:

no.	y (1)	y (2)	f (1)	f (2)	dy	f
1	0.0000	0.0000	7.5000	7.5000	1.5000	15.000
2	-.4163E-16	1.5000	2.5125	-4.4560	0.71334	6.9695
3	0.13820	0.92490	1.13240	.6873E-01	0.906E-01	1.2012
4	0.20792	0.90398	0.3917E-02	-.1334E-01	0.2577E-02	0.1726E-01
5	0.20858	0.90206	0.9946E-05	-.4693E-05	0.1719E-05	0.14639E-04
6	0.20858	0.90206	0.3743E-11	-.3326E-11	0.9054E-12	0.70688E-11
7	0.20858	0.90206	-.9378E-17	-.3003E-15	0.4884E-16	0.30970E-15

f) Geben Sie die Gleichgewichtslage des Pendels in Grad an:

$\alpha =$  \_\_\_\_\_ und  $\beta =$  \_\_\_\_\_ .  
-----

g) Zeichnen Sie die Gleichgewichtslage des Doppelpendels in die Zeichnung ein:





Zur Verwendung der Newton–Raphson–Iteration muss die Iterationsmatrix angegeben werden. Oft liegt diese nicht analytisch vor oder ist nur sehr teuer zu bestimmen. Dann kann ein Sekantenverfahren, das die Iterationsmatrix  $A^{(k)}$  approximiert, vorteilhaft eingesetzt werden:

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{A}^{(k)^{-1}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}).$$

Die Festlegung der Iterationsmatrix erfolgt durch die Sekantengleichung:

$$\mathbf{A}^{(k+1)} \cdot (\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k+1)}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}).$$

Diese Sekantengleichung legt nur einen Teil der Koeffizienten von  $\mathbf{A}^{(k+1)}$  fest. Zur vollständigen Beschreibung dient der sogenannte Broyden–Update, der eine geringstmögliche Veränderung der Iterationsmatrix, welche die Sekantengleichung nicht verletzt, anstrebt:

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{(k)} + \frac{(\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k+1)}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}) - \mathbf{A}^{(k)}(\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)}))(\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)})}{(\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)})^T (\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)})}.$$

Diese Bequemlichkeit muss mit einem Abfall der Konvergenzrate von 2 auf 1.618 erkaufte werden. Dies ist auch am Doppelpendel zu erkennen, das nun mit dem MINPACK–Unterprogramm HYBRD1, welches ein Broyden–Update durchführt, bearbeitet wurde:

no.	y (1)	y (2)	f (1)	f (2)	dy	f
1	0.8941E-08	1.5000	2.5125	-4.4569	1.5000	5.1164
2	0.33851	0.72855	-1.4683	0.83933	0.84245	1.6913
3	0.22830	0.88009	-.25404	0.10320	0.18738	0.27421
4	0.20652	0.90503	0.2411E-01	-.1657E-01	0.3310E-01	0.29254E-01
5	0.20852	0.90211	0.7643E-03	-.1582E-03	0.3541E-02	0.78045E-03
6	0.20858	0.90206	-.4922E-04	0.1871E-04	0.755E-04	0.52655E-04
7	0.20858	0.90206	0.1545E-05	0.597E-06	0.5318E-05	0.16564E-05
8	0.20858	0.90206	-.1624E-08	0.6255E-09	0.1734E-06	0.17403E-08
9	0.20858	0.90206	0.3238E-12	-.1249E-12	0.1822E-09	0.34703E-12
10	0.20858	0.90206	-.9378E-17	-.3003E-15	0.3634E-13	0.30047E-15

J.E. Dennis; R.B. Schnabel:

*Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations.*

Englewood Cliffs: Prentice–Hall, 1983.

N.N.: MINPACK Index–documentation. Available under NETLIB:

<http://www.netlib.no/netlib/minpack/index.html>

## Eigenfrequenzen einer Brücke

Die Berechnung der Eigenfrequenzen  $\omega_i$  einer Brücke führt entsprechend Merkblatt M 2.3 auf die gewöhnliche Differentialgleichung

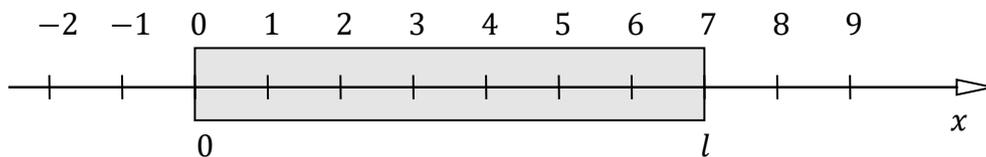
$$W^{IV} - \gamma^4 W = 0$$

für die Ortsfunktion  $W(x)$ , welche die Eigenformen beschreibt. Die Randbedingungen sind

$$W(0) = W(1) = W'(0) = W'(1) = 0$$

Dieses Randwertproblem ist nur für bestimmte Werte des Parameters  $\gamma^4 = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI}$  und damit nur für bestimmte Werte von  $\omega$ , die Eigenfrequenzen  $\omega_i$ , lösbar. Gesucht ist die erste Eigenfrequenz  $\omega_1$ .

Zur Lösung des Problems mit Hilfe finiter Differenzen wird die Brückenlänge in  $n = 7$  gleiche Intervalle der Länge  $h = \frac{1}{n}$  unterteilt:



Schreiben Sie die Differentialgleichung für jede Stützstelle  $x_i = ih, i = 0(1)7$ , an:

$$W_i^{IV} - \dots, i = 0(1)7.$$

Ersetzen Sie die Ableitungen  $W_i^{IV}$  durch zentrale Differenzen:

$$-\gamma^4 W_i = 0, i = 0(1)7.$$

Mit der Abkürzung

$$\lambda := \gamma^4 h^4 = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{n^4 EI}$$

ergibt sich

$$W_{i-2} - 4W_{i-1} + 6W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2} - \lambda W_i = 0, i = 0(1)7 \quad (1)$$

Dies sind 8 Gleichungen für 12 Unbekannte  $W_i$ . Die Punkte  $-2, -1, 8, 9$  wurden eingeführt, um die Differenzenformeln auch auf die Ränder anwenden zu können.



Die erste Eigenform ist symmetrisch zur Balkenmitte. Es gilt

$$W_4 = \quad , W_5 = \quad , W_6 = \quad ,$$

$$W_7 = \quad , W_8 = \quad , W_9 = \quad .$$

Damit bleiben      Gleichungen ( $i = 0(1)3$ ) für      Unbekannte  $W_j, j = -2(1)3$ .

Die Randbedingungen liefern für  $i = 0$ , unter Verwendung zentraler Differenzen:

$$W_0 = \quad ,$$

$$W_0' = \quad \text{oder } W_{-1} = \quad .$$

Die Unbekannte  $W_{-2}$  kann durch Auswerten der Gleichung (1) für  $i = 0$  gefunden werden:

$$W_{-2} = \quad .$$

Damit bleiben 3 Gleichungen ( $i = 1(1)3$ ) für 3 Unbekannte  $W_1, W_2, W_3$ :

$$\left( \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}}_{A_2} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \right) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}}_{\hat{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Diese sind nur dann nichttrivial lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems singulär ist, d.h. wenn  $\lambda$  ein Eigenwert der symmetrischen, positiv definiten Matrix  $A_2$  ist. Der gesuchte, kleinste Eigenwert ist

$$\lambda_1 = 0.1778264$$

und damit die erste Eigenfrequenz

$$\omega_1 = \quad .$$

Für andere Unterteilungen erhält man folgende Werte für die erste Eigenfrequenz:

$n$	7	9	11	exakt
$\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}}$	20.66	21.30	21.64	22.37



Zum Verständnis soll der ANSI/IEEE-Standard auf eine Zahldarstellung mit der Mantisenlänge  $nm = 2$  und der Exponentenlänge  $ne = 3$  übertragen werden.

a) Welche Wortlänge wird für diese Gleitkommazahlen-Darstellung benötigt?

$n =$   
 ---

b) Welche Sonderfälle werden durch folgende Bitmuster dargestellt?

0 0 0 0 0 0 0

-----

1 1 1 1 0 0

-----

1 1 1 1 1 0

-----

c) Geben Sie den Bias und den Bereich der Exponenten für normierte Dualzahlen an:

Bias = ,  $\leq e \leq$  .  
 ---

d) Welche Werte kann die Mantisse annehmen?

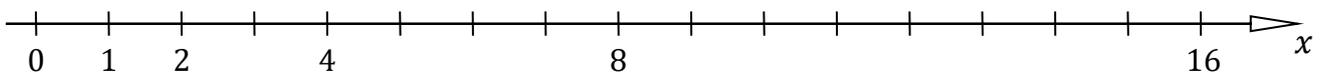
1. = ,  
 -- 2 -----10

1. = ,  
 -- 2 -----10

1. = ,  
 -- 2 -----10

1. = .  
 -- 2 -----10

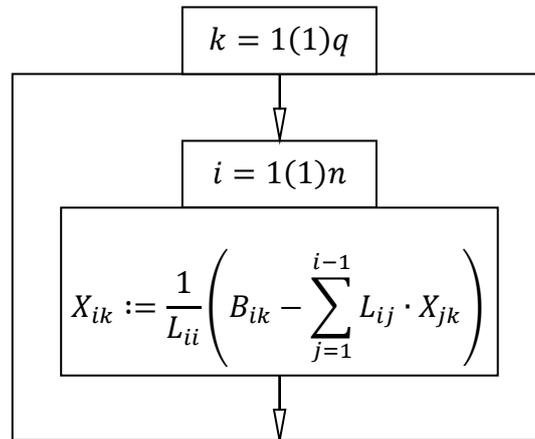
e) Tragen Sie alle positiven Maschinenzahlen auf der reellen Zahlenachse ein:





## Vorwärtseinsetzen

$L \cdot X = B$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Linksdreiecksmatrix  
 $X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$



$q$  rechte Seiten

- Rechenaufwand  $\approx q \frac{n^2}{2}$  flops
- für  $L_{ii} = 1$  entfällt Division
- auf gleichem Speicherplatz für  $X$  und  $B$  durchführbar

### Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\quad} = \quad$$

$$x_2 = \frac{1}{\quad} \left[ \quad - \left( \quad x_1 \right) \right] = \quad$$

$$x_3 = \frac{1}{\quad} \left[ \quad - \left( \quad x_1 + \quad x_2 \right) \right] = \quad$$

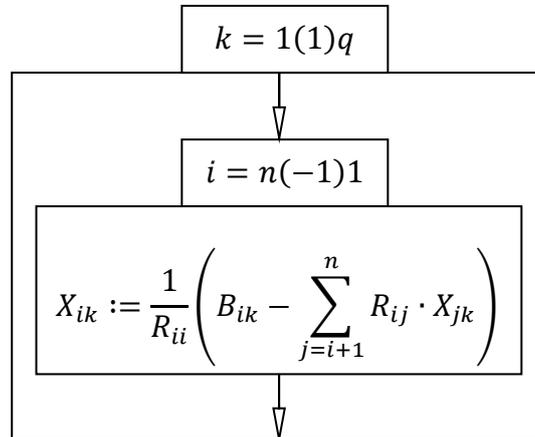


## Rückwärtseinsetzen

$$R \cdot X = B, \quad R \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$$

Rechtsdreiecksmatrix



$q$  rechte Seiten

- Rechenaufwand  $\approx q \frac{n^2}{2}$  flops
- für  $R_{ii} = 1$  entfällt Division
- auf gleichem Speicherplatz für  $X$  und  $B$  durchführbar

**Beispiel:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -13 \\ -27 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{-9} \cdot (-27) = 3$$

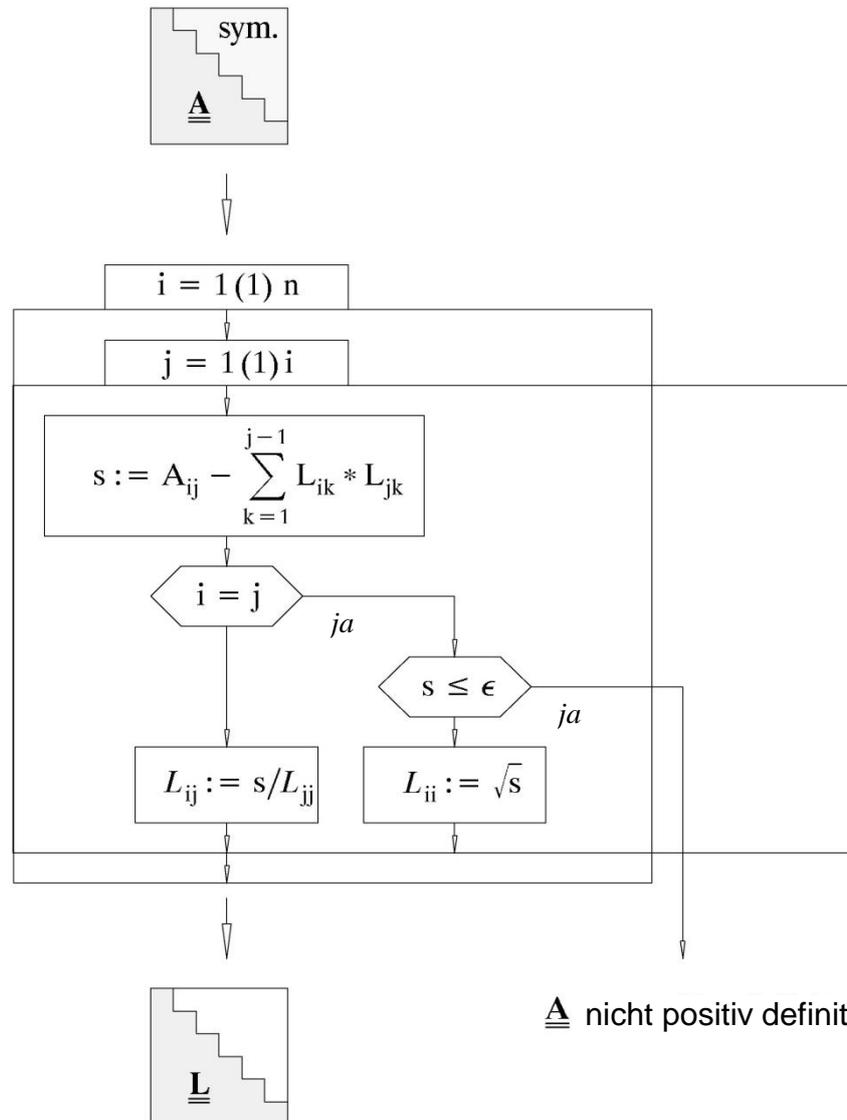
$$x_2 = \frac{1}{-1} \left[ -13 - (-5 \cdot 3) \right] = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1} \left[ 3 - (2 \cdot 2 + 2 \cdot 3) \right] = -5$$



## Cholesky-Zerlegung

$A = L \cdot L^T$ ,  $A = A^T > 0$  symmetrisch, positiv definit



- Rechenaufwand  $\approx \frac{n^3}{6}$  flops
- auf gleichem Speicherplatz durchführbar
- Algorithmus ist gut konditioniert



**Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{bmatrix}$$

Die Cholesky-Zerlegung liefert:

$L_{11} = \sqrt{\text{---}} = \text{---},$

$L_{21} = \text{---} / \text{---} = \text{---},$

$L_{22} = \sqrt{\text{---} - \text{---}} = \text{---},$

$L_{31} = \text{---} / \text{---} = \text{---},$

$L_{32} = (\text{---} - \text{---}) / \text{---} = \text{---},$

$L_{33} = \sqrt{\text{---} - (\text{---} + \text{---})} = \text{---}.$

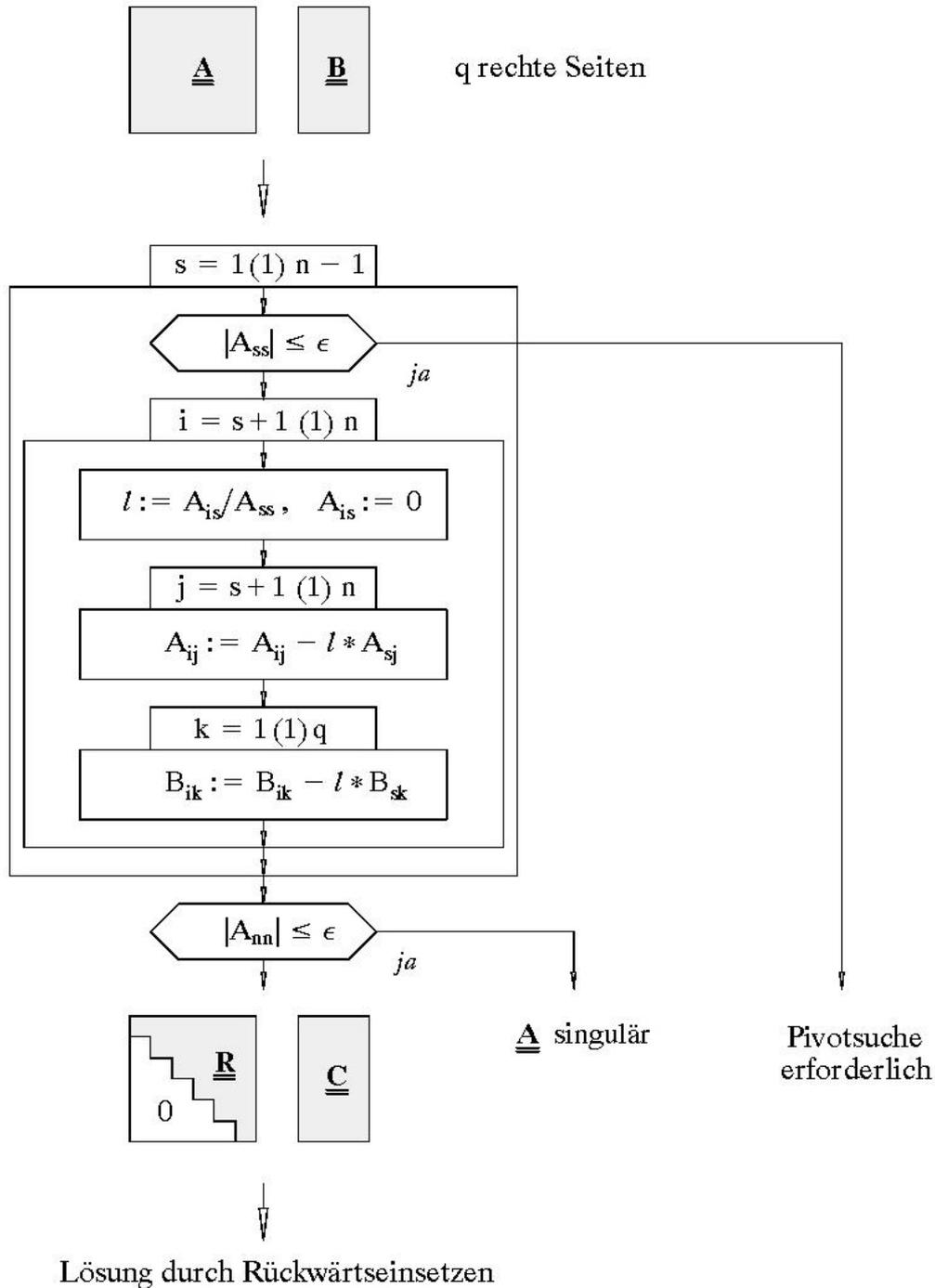
Die Probe ergibt

$$L \cdot L^T = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}.$$



## Gauß–Elimination ohne Pivotsuche

$$A \cdot X = B, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$$



- Rechenaufwand  $\approx \frac{n^3}{3} + q \frac{n^2}{2}$  flops
- Gauß–Elimination erfolgt auf gleichem Speicherplatz

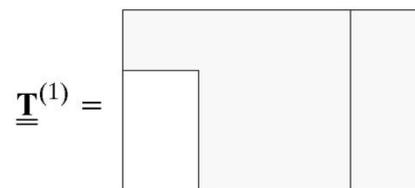


**Beispiel:**

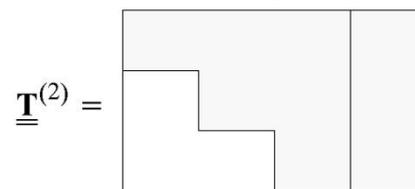
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$



↓ s = 1



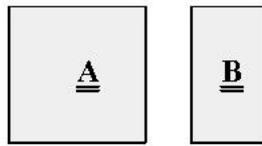
↓ s = 2



Rückwärtseinsetzen siehe A 6.2

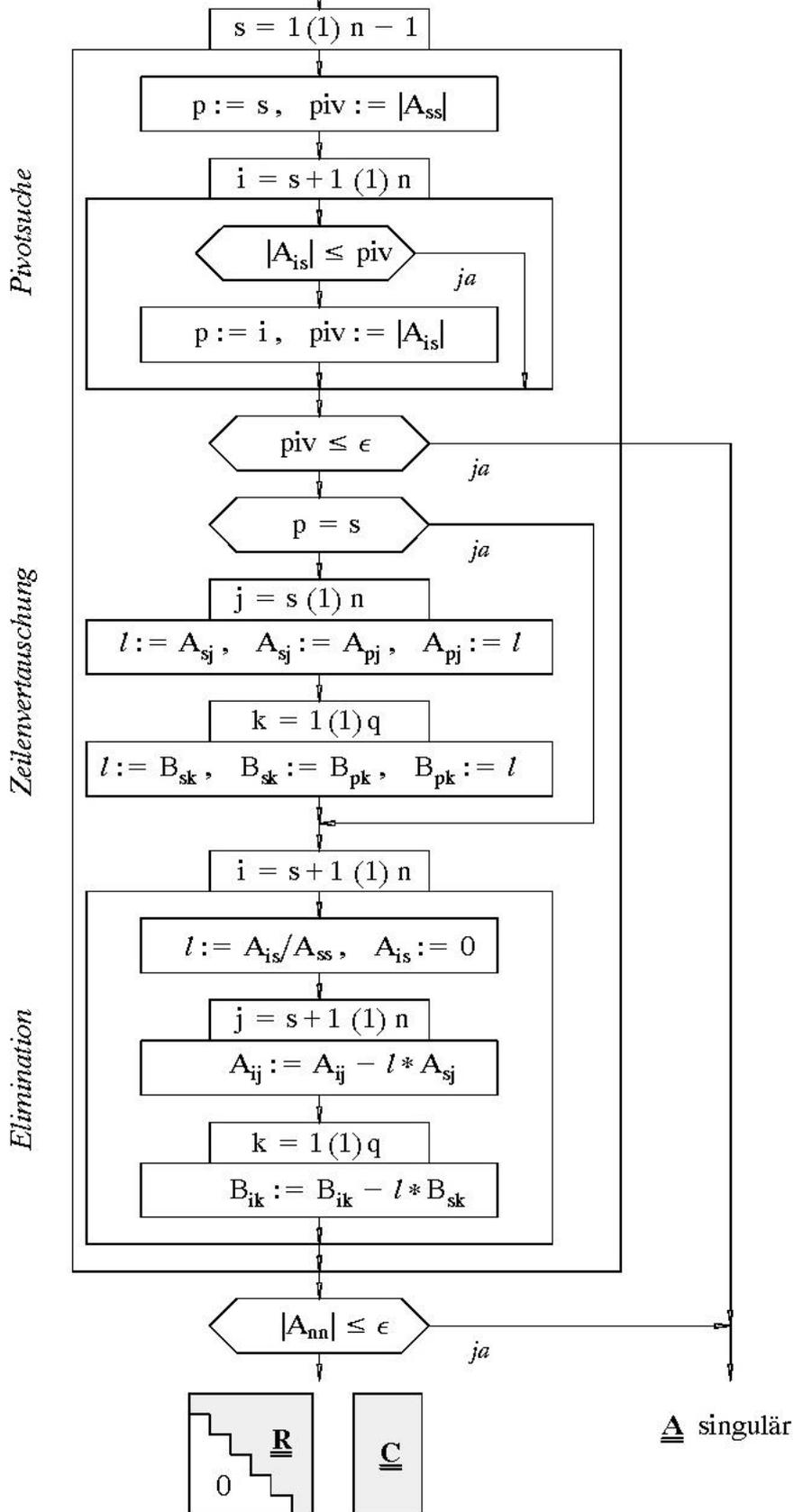


## Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche



q rechte Seiten

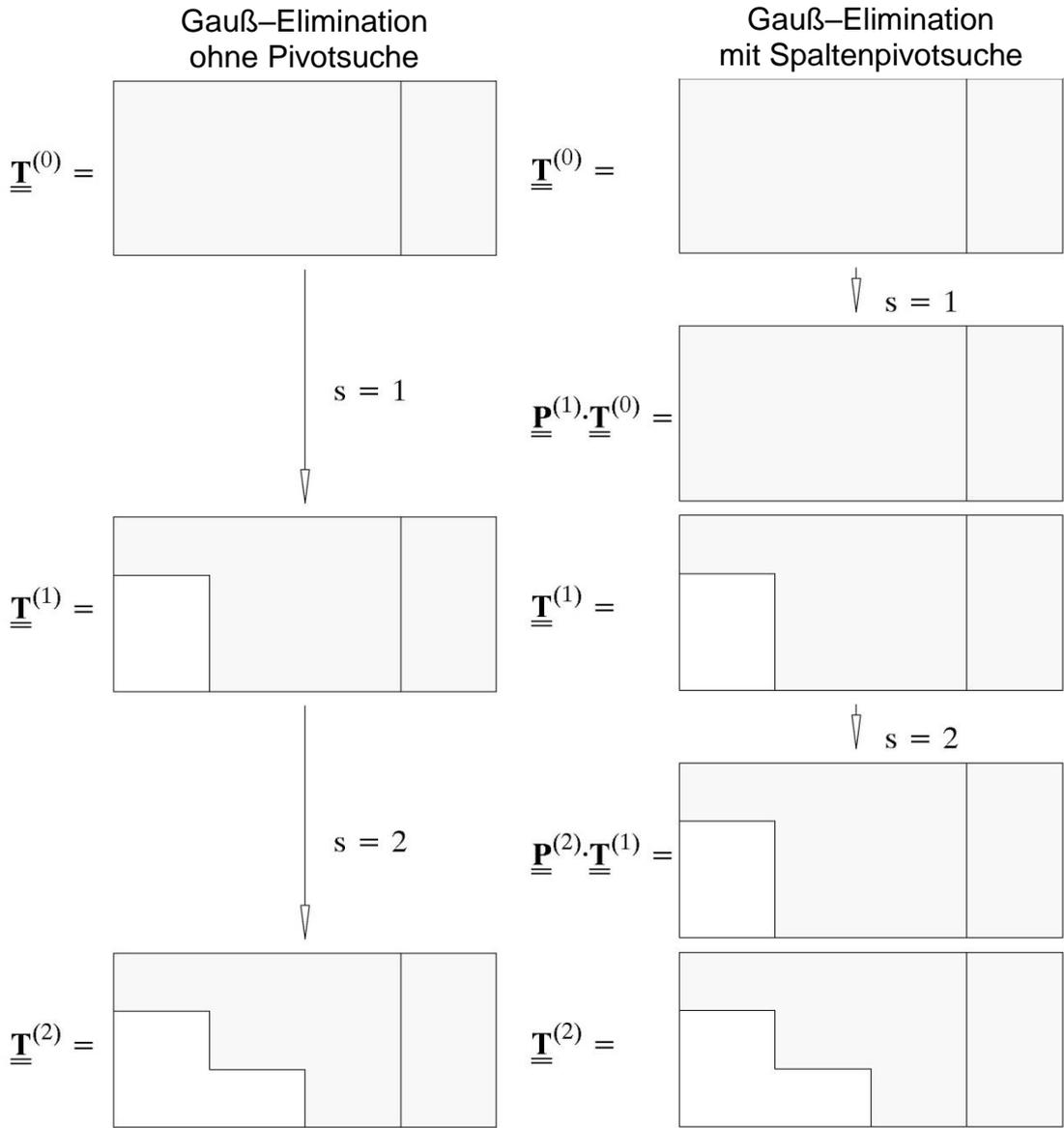
$A \cdot X = B$   
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   
 $X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$





**Beispiel:** Lösen Sie folgendes Gleichungssystem durch Gauß–Elimination ohne und mit Spaltenpivotsuche sowie durch Rückwärtseinsetzen. Benutzen Sie dabei eine 4–stellige, rundende Dezimalarithmetik.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.001 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Durch Rückwärtseinsetzen findet man für die Lösung  $x$ :

	exakte	ohne Pivotsuche		mit Pivotsuche	
	Lösung	Lösung	rel. Fehler	Lösung	rel. Fehler
$x_1$	1.00000	1.15	15 %	1	0 %
$x_2$	-0.25006	-0.4	60 %	-0.2501	0.015 %
$x_3$	0.25006	0.2501	0.015 %	0.2501	0.015 %

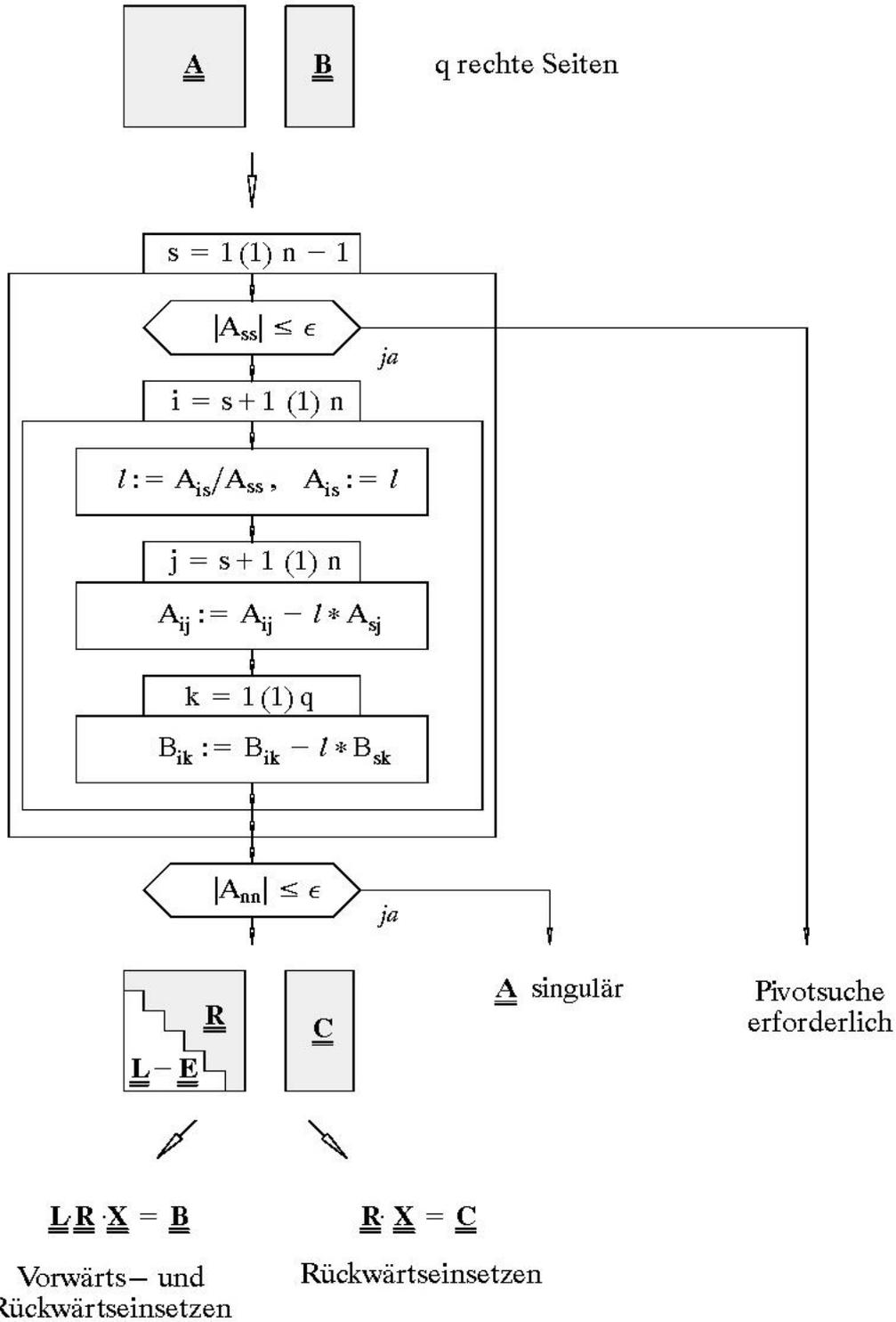
Tabelle 1: MatlabR2014b, A7.m



## Gauß–Elimination ohne Pivotsuche mit gleichzeitiger LR–Zerlegung

$$A \cdot X = B, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

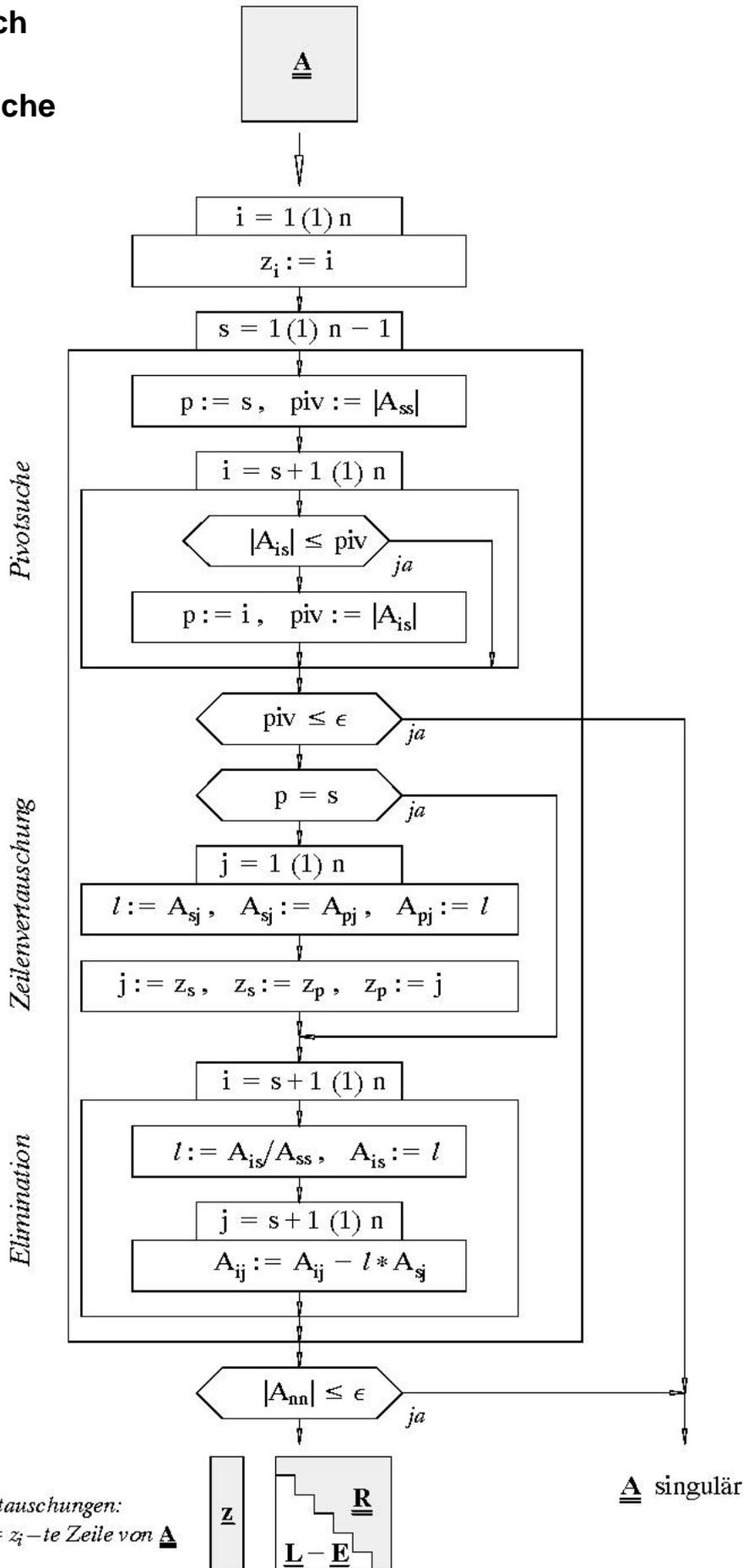
$$X, B \in \mathbb{R}^{n \times q}$$





### LR-Zerlegung durch Gauß-Elimination mit Spaltenpivotsuche

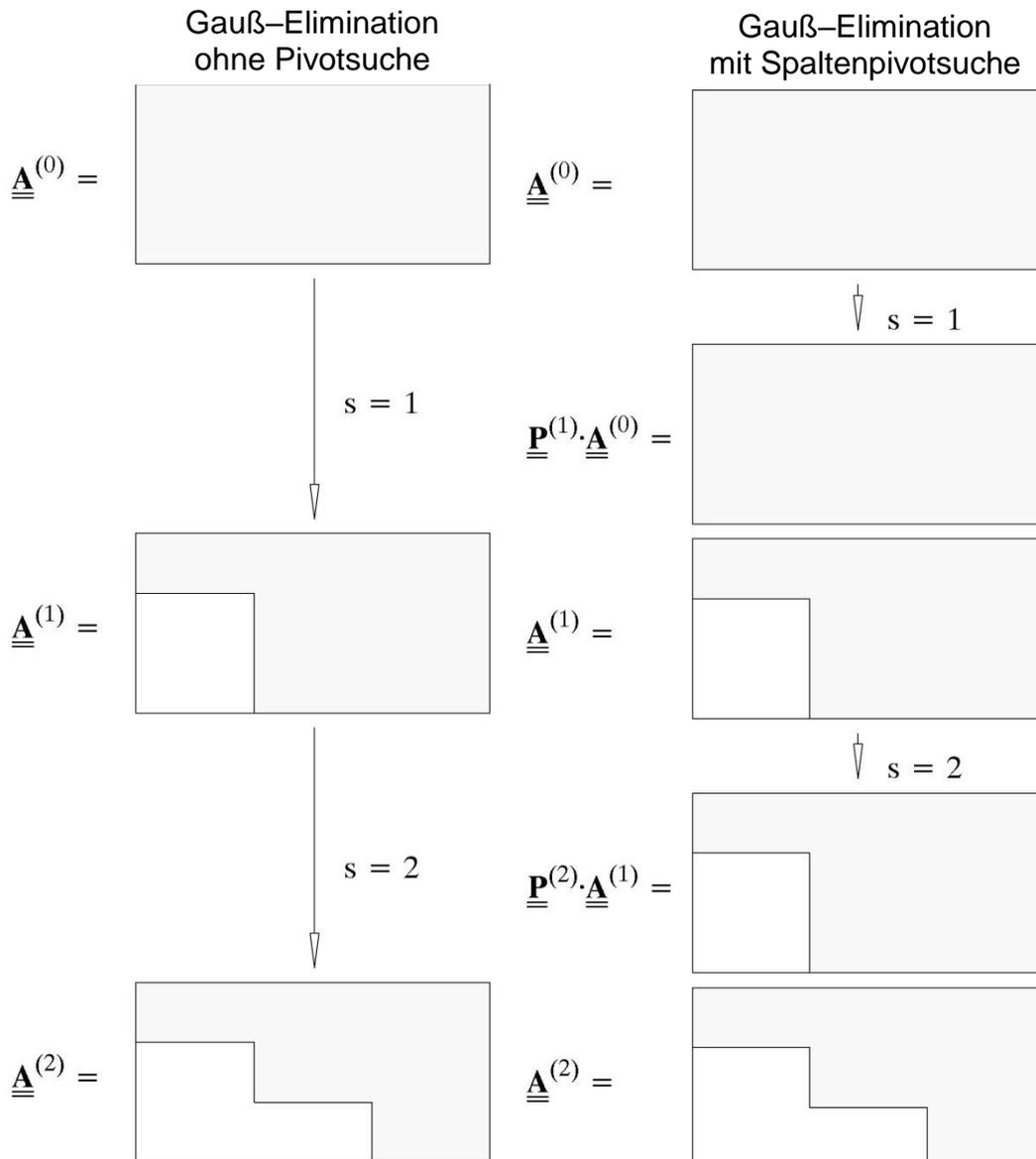
$P \cdot A = L \cdot R$ ,  
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   
 $L_{ii} = 1$ ,  
 $P$ : Permutationsmatrix





**Beispiel:** Führen Sie für die folgende Matrix eine LR-Zerlegung durch. Verwenden Sie dazu die Gauß-Elimination ohne und mit Spaltenpivotsuche.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$





Überprüfen Sie Ihr Ergebnis der

LR-Zerlegung ohne Pivotsuche:

$$L \cdot R = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix}$$

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche:

$$L \cdot R = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$P^{(1)} \cdot A = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix} \rightarrow P \cdot A = P^{(2)} \cdot P^{(1)} \cdot A = \begin{bmatrix} & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \end{bmatrix}$$



Lösen Sie das Gleichungssystem  $A \cdot x = b$  für  $b = [3, -4, 5]$  auf der Basis der

LR-Zerlegung ohne Pivotsuche:

$$L \cdot y = b: \begin{bmatrix} \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \\ \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \\ \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{---} \\ \phantom{---} \\ \phantom{---} \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} \phantom{---} \\ \phantom{---} \\ \phantom{---} \end{bmatrix}$$

$$R \cdot x = y: \begin{bmatrix} \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \\ \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \\ \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{---} \\ \phantom{---} \\ \phantom{---} \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} \phantom{---} \\ \phantom{---} \\ \phantom{---} \end{bmatrix}$$

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche:

$$L \cdot y = P \cdot b: \begin{bmatrix} \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \\ \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \\ \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{---} \\ \phantom{---} \\ \phantom{---} \end{bmatrix} \rightarrow y = \begin{bmatrix} \phantom{---} \\ \phantom{---} \\ \phantom{---} \end{bmatrix}$$

$$R \cdot x = y: \begin{bmatrix} \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \\ \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \\ \phantom{---} & \phantom{---} & \phantom{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{---} \\ \phantom{---} \\ \phantom{---} \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} \phantom{---} \\ \phantom{---} \\ \phantom{---} \end{bmatrix}$$



## Verfahren von Householder

### Householder-Transformation

Gesucht ist eine Matrix  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , für die gilt:

- (i)  $\mathbf{H}$  ist orthogonal,
- (ii)  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{a} = \mu \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_m]^T$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Ansatz:  $\mathbf{H} := \mathbf{E} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T$ ,  $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ ;

Aus (i):  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T =$   
-----

Aus (ii) einerseits:

$$\|\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}} \equiv \|\mathbf{a}\|_2 \stackrel{!}{=} \sqrt{\mu \cdot \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{e}_1 \cdot \mu} = |\mu|$$

$$\rightarrow \mu =$$
  
-----

Aus (ii) andererseits:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{a} =$$
  
-----
$$\stackrel{!}{=} \mu \mathbf{e}_1$$

$$\rightarrow (2\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} - \mu \mathbf{e}_1 = \mathbf{v}$$

$$\rightarrow \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{a} - \mu \mathbf{e}_1 =$$
  
-----



Damit bleibt:

1)  $\mu = -\text{sign}(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2$

2)  $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mu \mathbf{e}_1 =$

-----

3)  $\alpha =$

-----

4)  $\mathbf{H} = \mathbf{E} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T =$

-----

Transformation eines Vektors  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ :

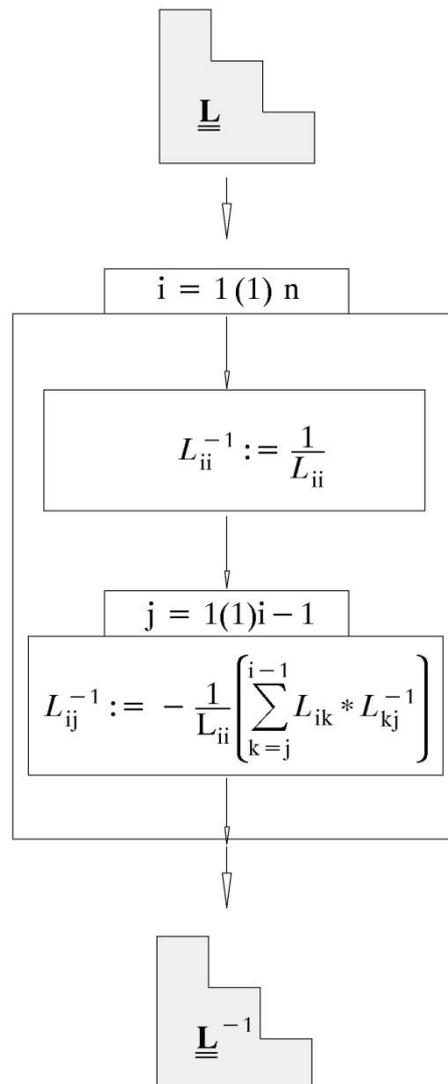
$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} := \mathbf{x} - \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{x}}{\alpha} \mathbf{v}$$





## Inverse einer Linksdreiecksmatrix

Die Inverse einer Linksdreiecksmatrix (Rechtsdreiecksmatrix) ist selbst wieder eine Linksdreiecksmatrix (Rechtsdreiecksmatrix),



- auf gleichem Speicherplatz für  $L$  und  $L^{-1}$  durchführbar
- Rechenaufwand  $\approx \frac{n^3}{6}$  flops
- für  $L_{ii} = 1$  entfällt die Division (LR-Zerlegung)

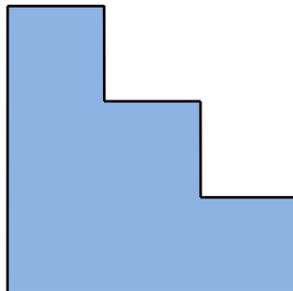


Beispiel:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$i$	$j$	Inverse einer Linksdreiecksmatrix
1	1	$L_{11}^{-1} =$ ---
2	1 2	$L_{21}^{-1} =$ (     ·     ) = --- $L_{22}^{-1} =$ ---
3	1 2 3	$L_{31}^{-1} =$ (     ·     +     ·     ) = --- $L_{32}^{-1} =$ (     ·     ) = --- $L_{33}^{-1} =$ ---

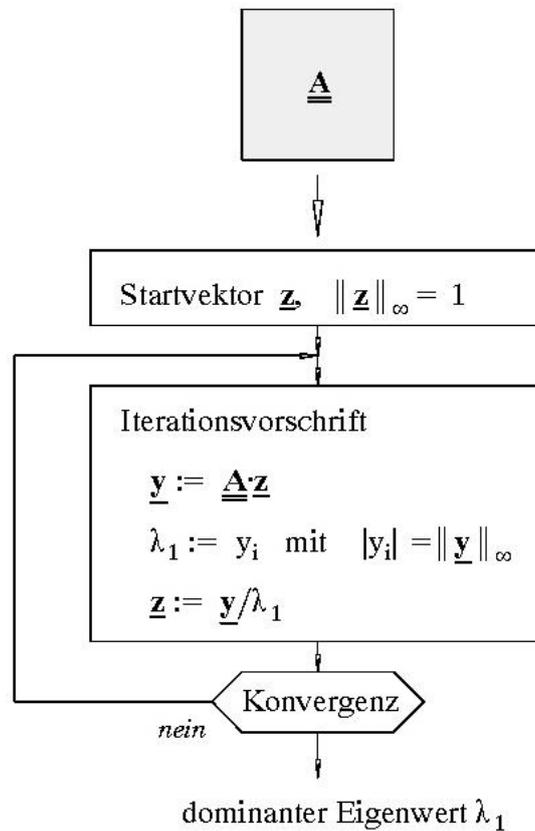
$L^{-1} =$





## Einfache Vektoriteration

Voraussetzung:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hat reelle Eigenwerte  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  mit  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$



- Nur lineare Konvergenz mit Faktor  $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$
- Algorithmus benötigt nur „Matrix · Vektor“ Multiplikation (interessant für große, dünn besetzte Matrizen)
- Geringe praktische Bedeutung



**Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

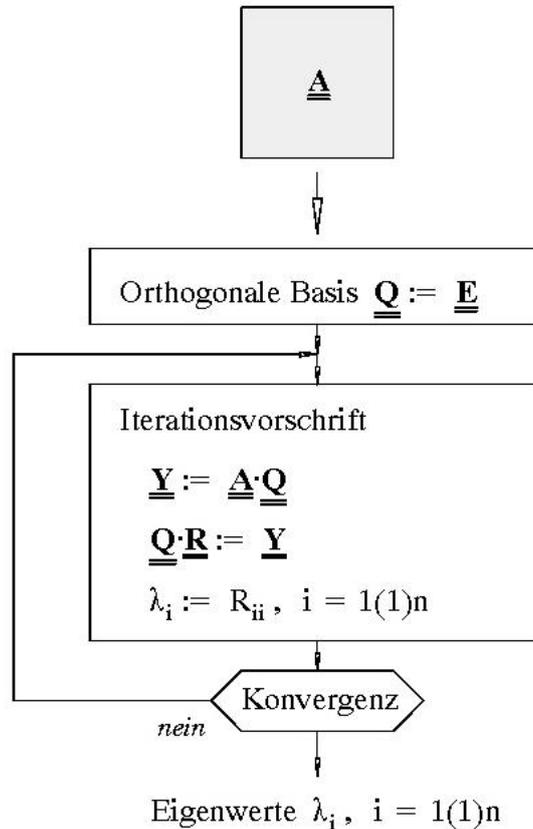
$$\rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, T = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{9}{11} & \frac{9}{11} & 1 \\ \frac{11}{11} & \frac{11}{11} & 1 \end{bmatrix}$$

s	dominanter Eigenvektor $\mathbf{z}^{(s)}$			$\lambda_1^{(s)}$ (Norm)	$\lambda_1^{(s)}$ (Rayleigh)	$\frac{ \lambda_1 - \lambda_1^{(s)} }{ \lambda_1 - \lambda_1^{(s-1)} }$ (Norm)
0	1.00000	.00000	.00000			
1						
2	.23377	.81818	1.00000	7.0000000	6.8165138	.333
3	.20047	.81818	1.00000	5.5714286	5.5462727	.286
4	.18898	.81818	1.00000	5.2051282	5.1981197	.359
5	.18464	.81818	1.00000	5.0788177	5.0763727	.384
6	.18294	.81818	1.00000	5.0310378	5.0301108	.3942
7	.18227	.81818	1.00000	5.0123385	5.0119755	.398
8	.18200	.81818	1.00000	5.0049233	5.0047793	.399
9	.18189	.81818	1.00000	5.0019674	5.0019100	.400
10	.18185	.81818	1.00000	5.0007866	5.0007637	.400
11	.18183	.81818	1.00000	5.0003146	5.0003054	.400
12	.18182	.81818	1.00000	5.0001258	5.0001222	.400
13	.18182	.81818	1.00000	5.0000503	5.0000489	.400
14	.18182	.81818	1.00000	5.0000201	5.0000195	.400
15	.18182	.81818	1.00000	5.0000081	5.0000078	.400
16	.18182	.81818	1.00000	5.0000032	5.0000031	.400
17	.18182	.81818	1.00000	5.0000013	5.0000013	.400
18	.18182	.81818	1.00000	5.0000005	5.0000005	.400
19	.18182	.81818	1.00000	5.0000002	5.0000002	.400
20	.18182	.81818	1.00000	5.0000001	5.0000001	.400



## Orthogonale Iteration

Voraussetzung:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hat reelle Eigenwerte  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  mit  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$



**Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Die Iteration liefert folgende Ergebnisse für  $\underline{Q}$  und  $\underline{R}$ :

$$\underline{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} -14.77 & 13.34 & -14.70 \\ 0 & 2.82 & -3.15 \\ 0 & 0 & -2.4 \end{bmatrix} \quad \underline{Q}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.271 & .926 & .264 \\ -0.610 & .047 & -0.791 \\ -0.745 & -0.375 & -0.552 \end{bmatrix}$$
$$\underline{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 6.84 & -7.34 & -22.82 \\ 0 & 2.02 & -1.81 \\ 0 & 0 & -0.72 \end{bmatrix} \quad \underline{Q}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.178 & .974 & .134 \\ -0.623 & -0.667 & -0.782 \\ -0.762 & -0.222 & .609 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 5.55 & -11.05 & -21.68 \\ 0 & 2.02 & -1.48 \\ 0 & 0 & -0.89 \end{bmatrix} & \mathbf{Q}^{(3)} &= \begin{bmatrix} -0.153 & .986 & .066 \\ -0.626 & -0.045 & -0.779 \\ -0.765 & -0.161 & .623 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}^{(4)} &= \begin{bmatrix} 5.20 & -12.63 & -20.89 \\ 0 & 2.02 & -1.40 \\ 0 & 0 & -0.95 \end{bmatrix} & \mathbf{Q}^{(4)} &= \begin{bmatrix} -0.145 & .989 & .033 \\ -0.627 & -0.066 & -0.777 \\ -0.766 & -0.133 & .629 \end{bmatrix} \\
 & & & \vdots
 \end{aligned}$$

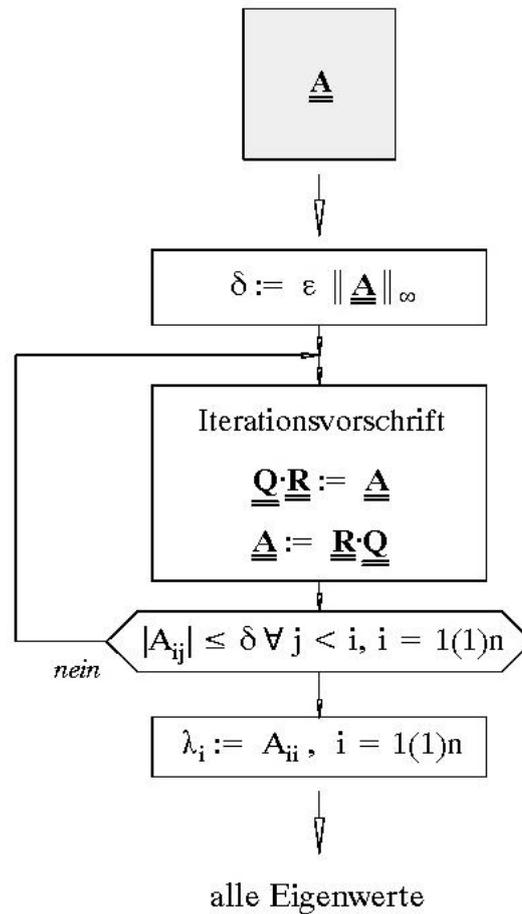
Zusammenfassend erhält man für die Eigenwerte:

$s$	$\lambda_1^{(s)}$	$\lambda_2^{(s)}$	$\lambda_3^{(s)}$	$\frac{ \lambda_1 - \lambda_1^{(s)} }{ \lambda_1 - \lambda_1^{(s-1)} }$	$\frac{ \lambda_2 - \lambda_2^{(s)} }{ \lambda_2 - \lambda_2^{(s-1)} }$	$\frac{ \lambda_3 - \lambda_3^{(s)} }{ \lambda_3 - \lambda_3^{(s-1)} }$
1	-----	-----	-----			
2	-----	-----	-----			
3	-----	-----	-----			
4	-----	-----	-----			
5	5.0764003	2.0168666	.9767130			
6	5.0301150	2.0110895	.9885319	.394	.657	.492
7	5.0119762	2.0066557	.9943016	.398	.600	.497
8	5.0047794	2.0037843	.9971582	.399	.569	.499
9	5.0019100	2.0020779	.9985807	.400	.549	.499
10	5.0007637	2.0011140	.9992907	.400	.536	.500
11	5.0003054	2.0005872	.9996454	.400	.527	.500
12	5.0001222	2.0003057	.9998227	.400	.521	.500
13	5.0000489	2.0001577	.9999114	.400	.516	.500
14	5.0000195	2.0000808	.9999557	.400	.512	.500
15	5.0000078	2.0000412	.9999778	.400	.510	.500
16	5.0000031	2.0000209	.9999889	.400	.508	.500
17	5.0000013	2.0000106	.9999945	.400	.506	.500
18	5.0000005	2.0000053	.9999972	.400	.505	.500
19	5.0000002	2.0000027	.9999986	.400	.504	.500
20	5.0000001	2.0000014	.9999993	.400	.503	.500



## QR-Verfahren

Voraussetzung:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hat reelle Eigenwerte  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  mit  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$



**Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$



Die Iteration liefert folgende Ergebnisse:

$A^{(s)}$	$\frac{ A_{21}^{(s)} }{ A_{21}^{(s-1)} }$	$\frac{ A_{31}^{(s)} }{ A_{31}^{(s-1)} }$	$\frac{ A_{32}^{(s)} }{ A_{32}^{(s-1)} }$
Iterationsschritt: 0			
4.0000      -1.0000      1.0000			
9.0000      -8.0000      9.0000			
11.000      -11.000      12.000			
Iterationsschritt: 1			
6.8165      -7.5262      -22.559			
.62700      1.3157      -3.9737	.070		
.17865      .89967E-01      -.13226	.016	.008	
Iterationsschritt: 2			
5.5463      -11.099      21.637			
.13775      1.7379      2.0749	.220		
-.18867E-01      -.10107      .71581	.106	1.123	
Iterationsschritt: 3			
5.1981      -12.651      -20.877			
.45069E-01      1.9107      -1.6144	.327		
.30379E-02      .61385E-01      .89118	.161	.607	
Iterationsschritt: 4			
5.0764      -13.382      20.450			
.16707E-01      1.9726      1.4698	.371		
-.55612E-03      -.32373E-01      .95108	.183	.527	
Iterationsschritt: 5			
5.0301      -13.734      -20.227			
.64859E-02      1.9933      -1.4199	.388		
.10700E-03      .16387E-01      .97658	.192	.506	
Iterationsschritt: 6			
5.0120      -13.905      20.114			
.25636E-02      1.9995      1.4023	.395		
-.21028E-04      -.81985E-02      .98850	.197	.500	
Iterationsschritt: 7			
5.0048      -13.989      -20.058			
.10206E-02      2.0009      -1.3962	.398		
.41716E-05      .40913E-02      .99429	.198	.499	
Iterationsschritt: 8			
5.0019      -14.031      20.029			
.40746E-03      2.0009      1.3941	.399		
-.83116E-06      -.20418E-02      .99716	.199	.499	



Iterationsschritt: 9					
5.0008	-14.051	-20.015			
.16286E-03	2.0007	-1.3935	.400		
.16593E-06	.10195E-02	.99858	.200	.499	
Iterationsschritt: 10					
5.0003	-14.062	20.008			
.65124E-04	2.0004	1.3934	.400		
-.33158E-07	-.50936E-03	.99929	.200	.500	
Iterationsschritt: 11					
5.0001	-14.067	-20.005			
.26046E-04	2.0002	-1.3934	.400		
.66288E-08	.25456E-03	.99965	.200	.500	
Iterationsschritt: 12					
5.0000	-14.069	20.003			
.10418E-04	2.0001	1.3934	.400		
-.13255E-08	-.12725E-03	.99982	.200	.500	
Iterationsschritt: 13					
5.0000	-14.071	-20.002			
.41671E-05	2.0001	-1.3934	.400		
.26507E-09	.63615E-04	.99991	.200	.500	
Iterationsschritt: 14					
5.0000	-14.071	20.001			
.16668E-05	2.0000	1.3934	.400		
-.53012E-10	-.31805E-04	.99996	.200	.500	
Iterationsschritt: 15					
5.0000	-14.072	-20.001			
.66673E-06	2.0000	-1.3935	.400		
.10602E-10	.15902E-04	.99998	.200	.500	
⋮					

Aus dem 15. Iterationsschritt erhält man folgende Näherungswerte für die Eigenwerte:

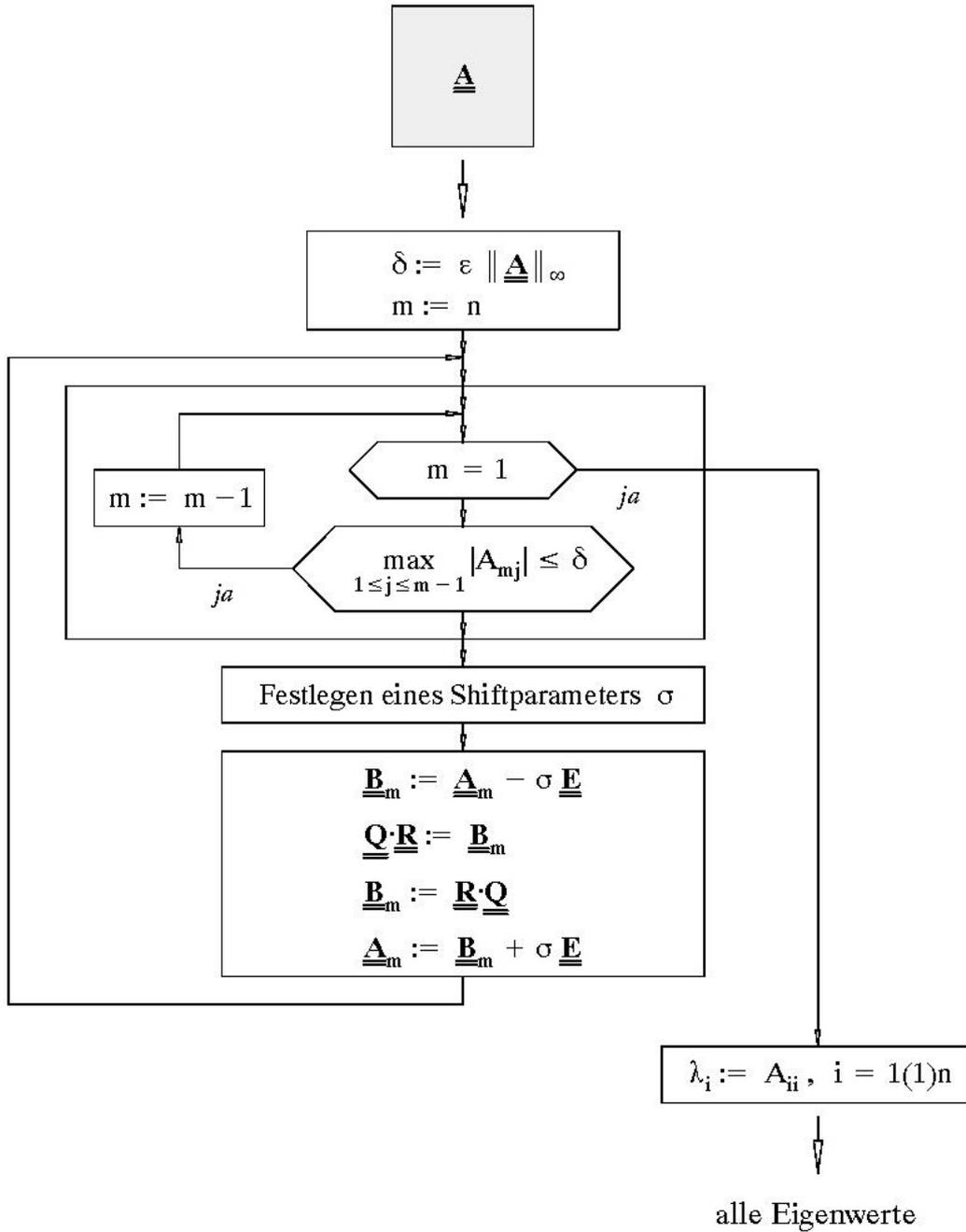
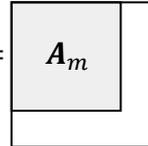
$$\lambda_1 \approx \text{-----}, \lambda_2 \approx \text{-----}, \lambda_3 \approx \text{-----}.$$



## QR-Verfahren mit Shift- und Deflationstechnik

Voraussetzung:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalisierbar mit  $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Notation:  $A_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $m \leq n$ , linker oberer Block:  $A =$





**Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der verbesserten Shiftstrategie einen geeigneten Shiftparameter für den ersten Iterationsschritt:

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \rightarrow p(\mu) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{pmatrix}$$
$$= \mu^2 - \text{---} \mu + \text{---}$$
$$\mu_{1,2} = \text{---}$$
$$\sigma = \text{---}$$



Die Iteration liefert folgende Ergebnisse:

```
Iterationsschritt: 0
  4.0000      -1.0000      1.0000
  9.0000      -8.0000      9.0000
 11.0000     -11.0000     12.0000
```

```
Iterationsschritt: 1
Ordnung: 3      Shift: 3.00000
  4.0099      -20.831      13.039
-.80278E-02   1.0065      -.11391
 .13980      -.11391      2.9836
```

```
Iterationsschritt: 2
Ordnung: 3      Shift: 2.99015
  5.9253      -22.710      8.3369
 .21538      -.23204      1.8638
 .15100      -.86378      2.3067
```

```
Iterationsschritt: 3
Ordnung: 3      Shift: 1.07467
  5.1787      -16.462      -18.032
 .40157E-01   1.5998      -1.7251
-.51559E-02  -.77010E-01  1.2215
```

```
Iterationsschritt: 4
Ordnung: 3      Shift: 1.00000
  5.0429      -14.063      19.997
 .92735E-02   1.9571      1.4544
 .51366E-18   .53017E-16   1.0000
```

```
Iterationsschritt: 5
Ordnung: 2      Shift: 2.00000
  5.0000      14.072      19.997
 .25376E-18   2.0000      1.4544
 .51366E-18   .53017E-16   1.0000
```

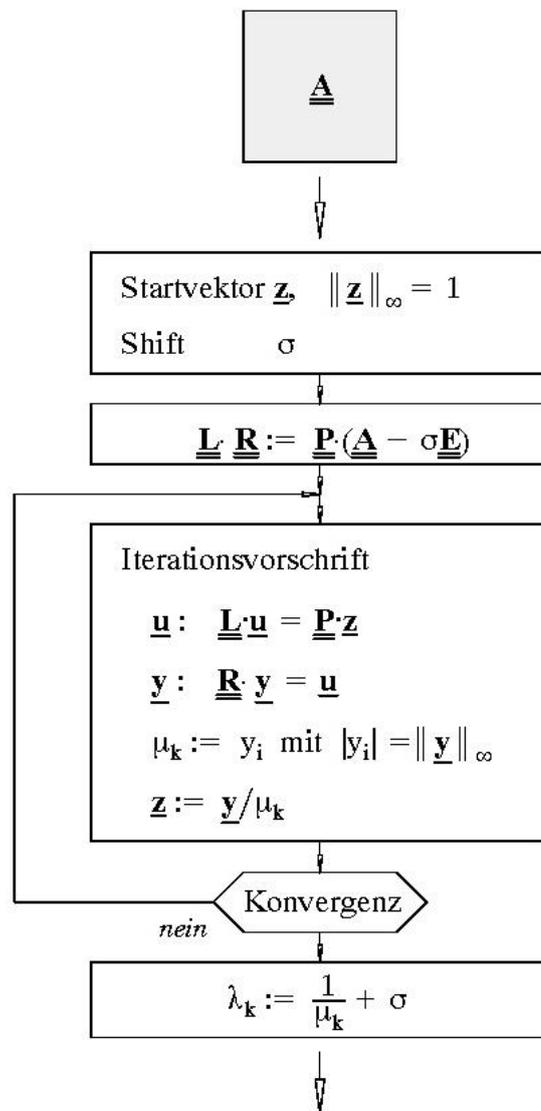
Damit erhält man folgende Näherungswerte für die Eigenwerte:

$\lambda_1 \approx$  \_\_\_\_\_ ,  $\lambda_2 \approx$  \_\_\_\_\_ ,  $\lambda_3 \approx$  \_\_\_\_\_ .



## Inverse Vektoriteration

Voraussetzung:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hat reelle Eigenwerte  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  mit  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$



zum Shift  $\sigma$  nächstgelegener Eigenwert  $\lambda_k$   
und Eigenvektor  $\underline{x}_k = \underline{z}$



**Beispiel:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, \quad T = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{11}{9} & \frac{11}{9} & 1 \\ \frac{11}{1} & \frac{11}{1} & 1 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmung des 1. Eigenvektors:

Shift:  $\sigma := 5.1$        $A - \sigma E =$   $\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$

LR-Zerlegung:       $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.818 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0.512 & 1 \end{bmatrix}$   
 $R = \begin{bmatrix} 11 & -11 & 6.9 \\ 0 & -4.1 & 3.35 \\ 0 & 0 & -0.028 \end{bmatrix}$   
 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Iteration:

Startvektor:       $z^{(0)} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Abbildung:  $\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$



Normierung:  $\|\mathbf{y}^{(1)}\|_\infty :=$  \_\_\_\_\_

$\mu_k^{(1)} :=$  \_\_\_\_\_,  $\lambda_k^{(1)} :=$  \_\_\_\_\_

$$\mathbf{z}^{(1)} := \frac{\mathbf{y}^{(1)}}{\mu_k^{(1)}} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

Die weitere Iteration liefert:

s	Eigenvektor $\mathbf{z}^{(s)}$			$\lambda_1^{(s)}$
0	1.0000	.00000	.00000	
1	.19091	.81818	1.00000	5.0718182
2	.18210	.81818	1.00000	5.0031250
3	.18183	.81818	1.00000	5.0001007
4	.18182	.81818	1.00000	5.0000032
5	.18182	.81818	1.00000	5.0000001
6	.18182	.81818	1.00000	5.0000000

b) Bestimmung des 2. Eigenvektors:

Shift:  $\sigma := 2.0001$

s	Eigenvektor $\mathbf{z}^{(s)}$			$\lambda_2^{(s)}$
0	1.0000	.00000	.00000	
1	-.09090	.81818	1.00000	2.0001273
2	-.09091	.81818	1.00000	2.0000000

c) Bestimmung des 3. Eigenvektors:

Shift:  $\sigma := 1.0001$

s	Eigenvektor $\mathbf{z}^{(s)}$			$\lambda_3^{(s)}$
0	1.0000	.00000	.00000	
1	-.18181	.81818	1.00000	.6365091
2	-.10909	.81818	1.00000	1.8000317
3	-.09556	.81756	1.00000	1.9556243
4	-.00267	.99472	1.00000	1.0287075
5	.00000	1.00000	1.00000	.9999970
6	.00000	1.00000	1.00000	1.0000000



## Einschrittverfahren 2. Ordnung

Die Integrationsvorschrift eines Einschrittverfahrens lautet

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \text{-----}, \quad (1)$$

wobei sich die Verfahrensfunktion  $\phi(t_i, \eta_i, h)$  durch Vergleich mit der Taylor-Reihe

$$\bar{x}(t_i + h) = \eta_i + h \left[ f + \frac{h}{2} (f_t + f_x f) + \dots \right]_{t_i, \eta_i} \quad (2)$$

ergibt.

Als Ansatz für ein explizites Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung wählt man

$$\phi(t, x, h) = b_1 f^{(1)} + b_2 f^{(2)}, \quad (3)$$

mit

$$f^{(1)} = f(t, x),$$

$$f^{(2)} = f(t + c_2 h, x + a_{21} h f^{(1)}).$$

Durch Entwicklung der Hilfssteigungen  $f^{(1)}$  und  $f^{(2)}$  in Taylor-Reihen nach  $h$  findet man bei Abbruch nach dem linearen Glied

$$f^{(1)} = \text{-----},$$

$$f^{(2)} = \text{-----} + \dots$$

Eingesetzt in den Ansatz (3) ergibt sich

$$\phi(t, x, h) = \text{-----} f + \text{-----} h f_t + \text{-----} h f_x f$$

und durch Vergleich mit der Taylor-Reihe (2) das Gleichungssystem

-----	= 1
-----	= $\frac{1}{2}$
-----	= $\frac{1}{2}$



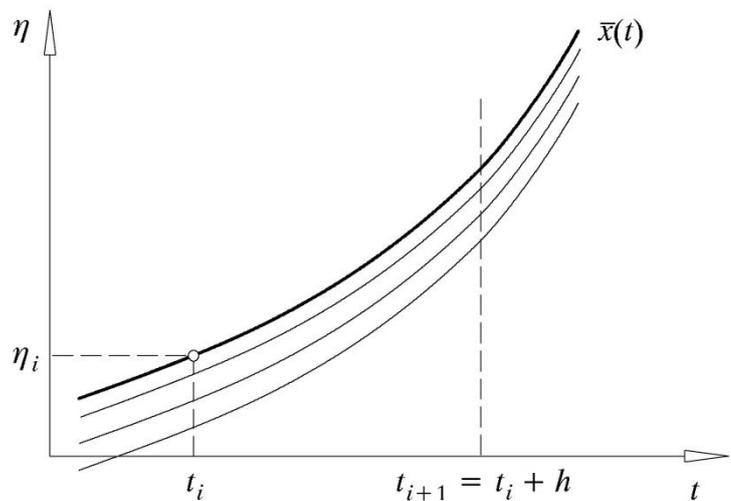
Mögliche Lösungen sind (dargestellt im BUTCHER-Block):

**Verfahren von HEUN (1900):**

0	0	0
1	1	0
	1/2	1/2

→  $\phi(t, x, h) =$  \_\_\_\_\_ .

Konstruieren Sie einen  
 Integrationsschritt:

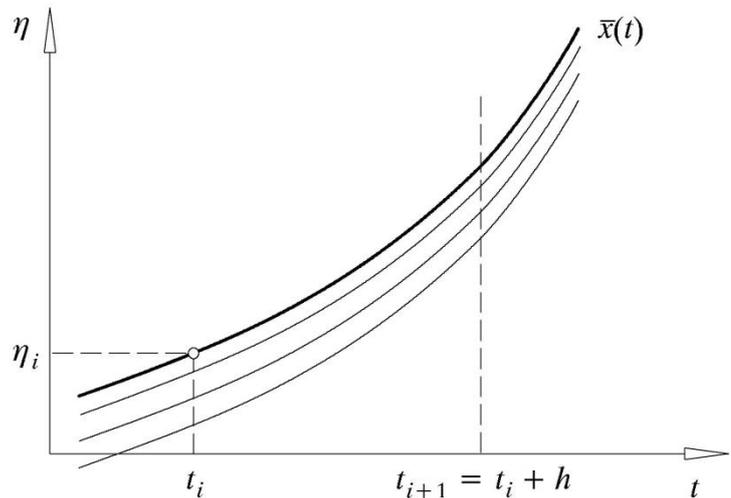


**Verfahren von COLLATZ (1960):**

0	0	0
1/2	1/2	0
	0	1

→  $\phi(t, x, h) =$  \_\_\_\_\_ .

Konstruieren Sie einen  
 Integrationsschritt:





## Runge–Kutta–Verfahren 4. Ordnung

Butcher–Block:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

$$\rightarrow \Phi = \frac{1}{6} f^{(1)} + \frac{4}{6} f^{(2)} + \frac{2}{6} f^{(3)} + \frac{1}{6} f^{(4)}$$

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} \phantom{f^{(1)}} \\ \phantom{f^{(1)}} \\ \phantom{f^{(1)}} \\ \phantom{f^{(1)}} \end{pmatrix}$$

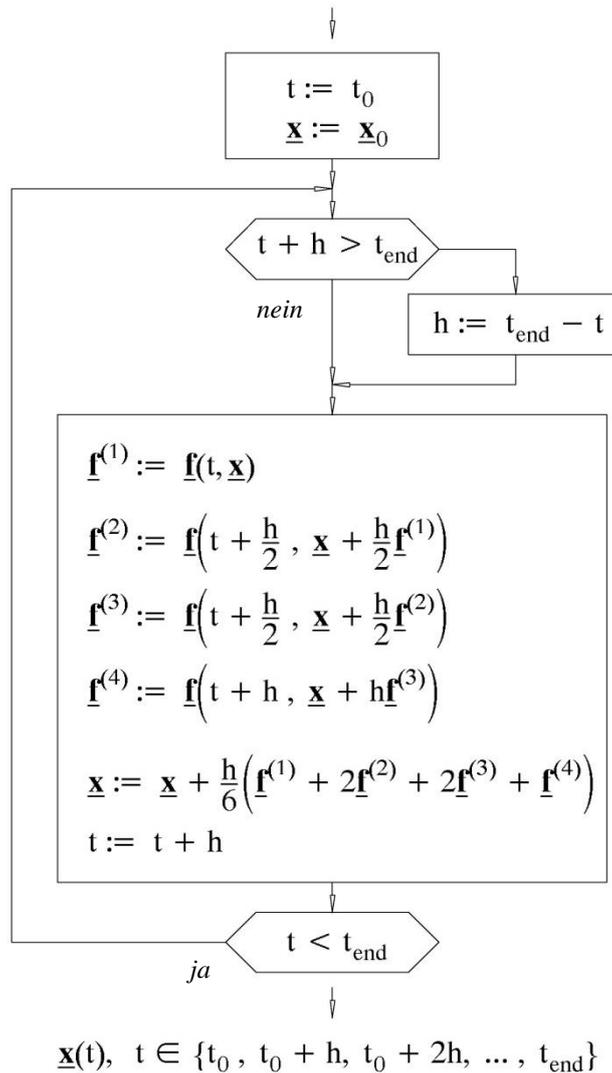
$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} \phantom{f^{(2)}} \\ \phantom{f^{(2)}} \\ \phantom{f^{(2)}} \\ \phantom{f^{(2)}} \end{pmatrix}$$

$$f^{(3)} = \begin{pmatrix} \phantom{f^{(3)}} \\ \phantom{f^{(3)}} \\ \phantom{f^{(3)}} \\ \phantom{f^{(3)}} \end{pmatrix}$$

$$f^{(4)} = \begin{pmatrix} \phantom{f^{(4)}} \\ \phantom{f^{(4)}} \\ \phantom{f^{(4)}} \\ \phantom{f^{(4)}} \end{pmatrix}$$

Algorithmus:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(t, \underline{x}), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$





## Stabilitätsgebiete von Einschrittverfahren

Für eine numerisch stabile Integration wird ein Abklingen der Fehlerbeiträge gefordert:

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} \stackrel{!}{<} 1 \quad (1)$$

Bei Einschrittverfahren gilt dabei für die Fehlerfortpflanzung

$$\delta_{i+1} = \delta_i + h[\phi(t_i, \eta_i, h) - \phi(t_i, x_i, h)] \quad (2)$$

mit

$$\delta_i = \eta_i - x_i \quad (3)$$

Die Stabilität der numerischen Integration ist vom dynamischen Verhalten des zu untersuchenden Systems abhängig. Zur Untersuchung wird das skalare Referenzproblem

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(t_0) = x_0, \lambda \in \mathbb{C} \quad (4)$$

verwendet.

Das Stabilitätsverhalten des Polygonzugverfahrens ('Euler vorwärts') soll untersucht werden.

a) Wie lautet die Verfahrensfunktion des Polygonzugverfahrens?

$$\eta_{i+1} = \eta_i + h\phi(t_i, \eta_i, h), \quad \phi(t_i, \eta_i, h) = \text{-----} \quad (5)$$

b) Setzen Sie die Verfahrensfunktion (5) in (2) für die Stützstellen  $\phi(t_i, \eta_i, h)$  und  $\phi(t_i, x_i, h)$  ein:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \text{-----} \quad (6)$$

c) Setzen Sie nun das skalare Referenzproblem (4) in (6) ein und beachten Sie (3). Welcher Zusammenhang ergibt sich für die Fehlerfortpflanzung?

$$\frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} = \text{-----}$$

d) Welche Stabilitätsaussage leitet sich daraus mit (1) ab?

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} = \text{-----} < 1. \quad (7)$$



Gleichung (7) beschreibt eine Abhängigkeit der maximal zulässigen Schrittweite  $h$  von der Systemdynamik  $\lambda$ . Dieser Zusammenhang kann in der komplexen  $\lambda h$ -Ebene übersichtlich dargestellt werden.

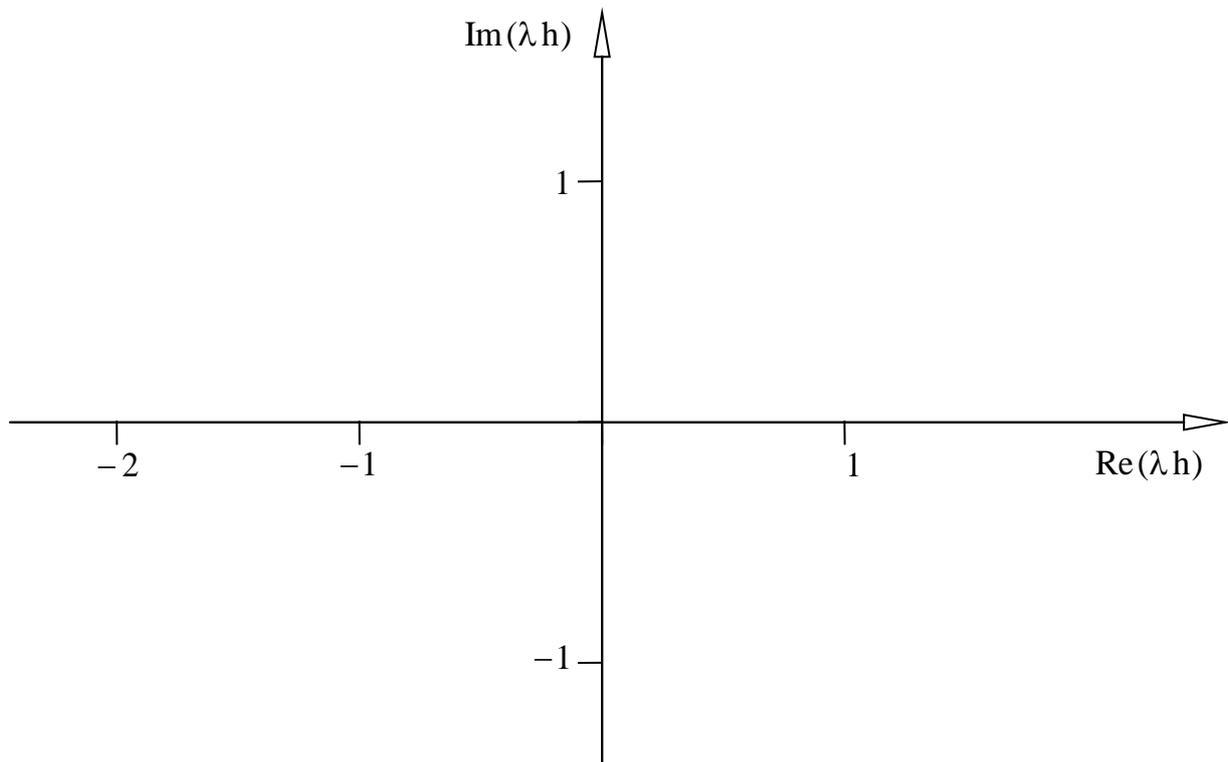
- e) Berechnen Sie die Linie der Grenzstabilität mit

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} = 1,$$

indem Sie eine komplexe Betragsbildung mit  $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$  durchführen. Welcher Zusammenhang ergibt sich?

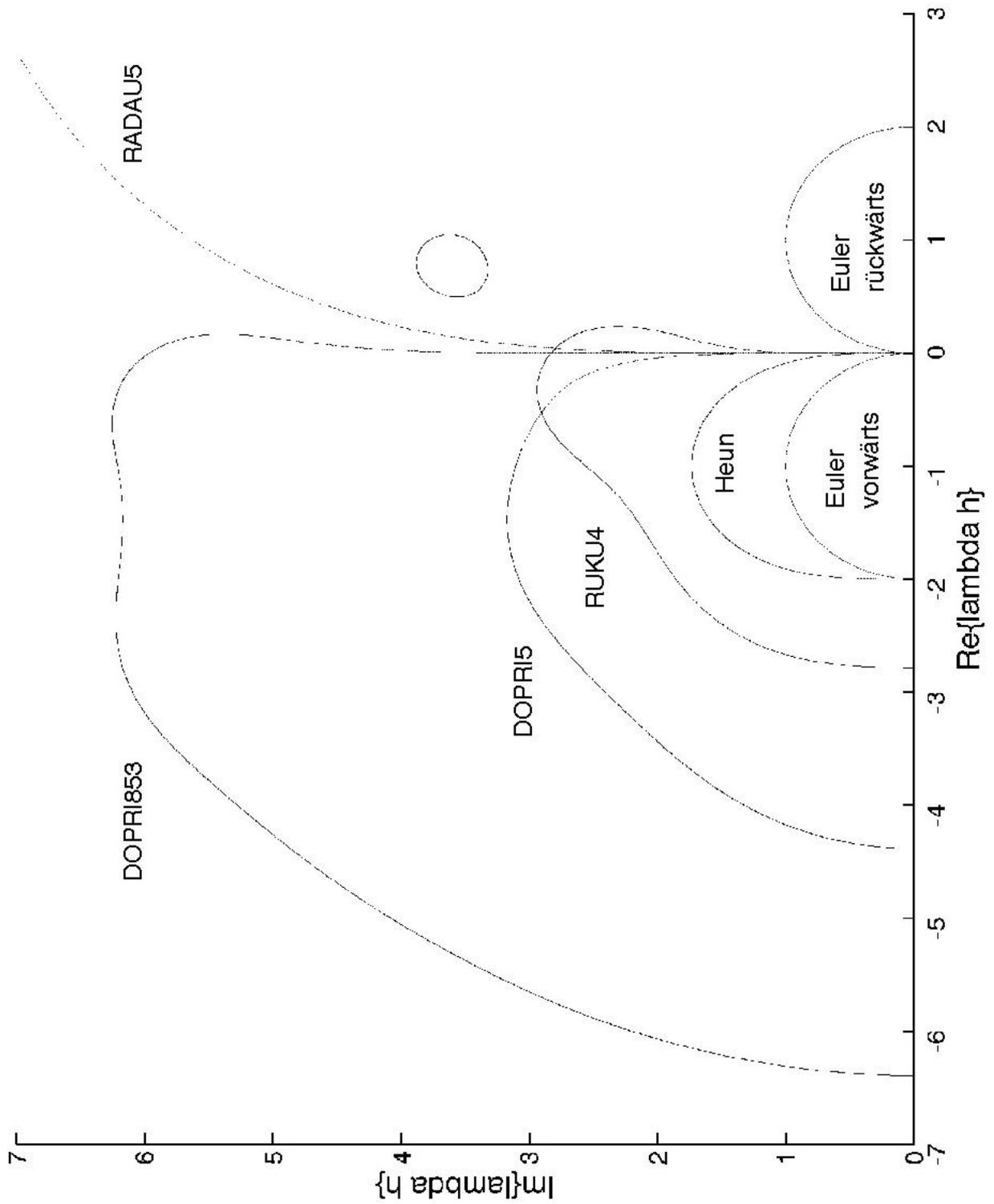
-----

- f) Tragen Sie das Stabilitätsgebiet in die komplexe  $\lambda h$ -Ebene ein





## Stabilitätsgebiete der wichtigsten Einschrittverfahren





## Integrationsfehler

Gesamtfehler:

$$\Delta x(t, h) = r(t, h) + e(t, h)$$

*Rundungsfehler*  $\sim \frac{1}{h}$       *globaler Diskretisierungsfehler*  $\sim h^p$

**Beispiel:**

$$\dot{x} = -200tx^2, \quad x(-1) = \frac{1}{101}$$

exakte Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{1+100t^2}$$

Probe:

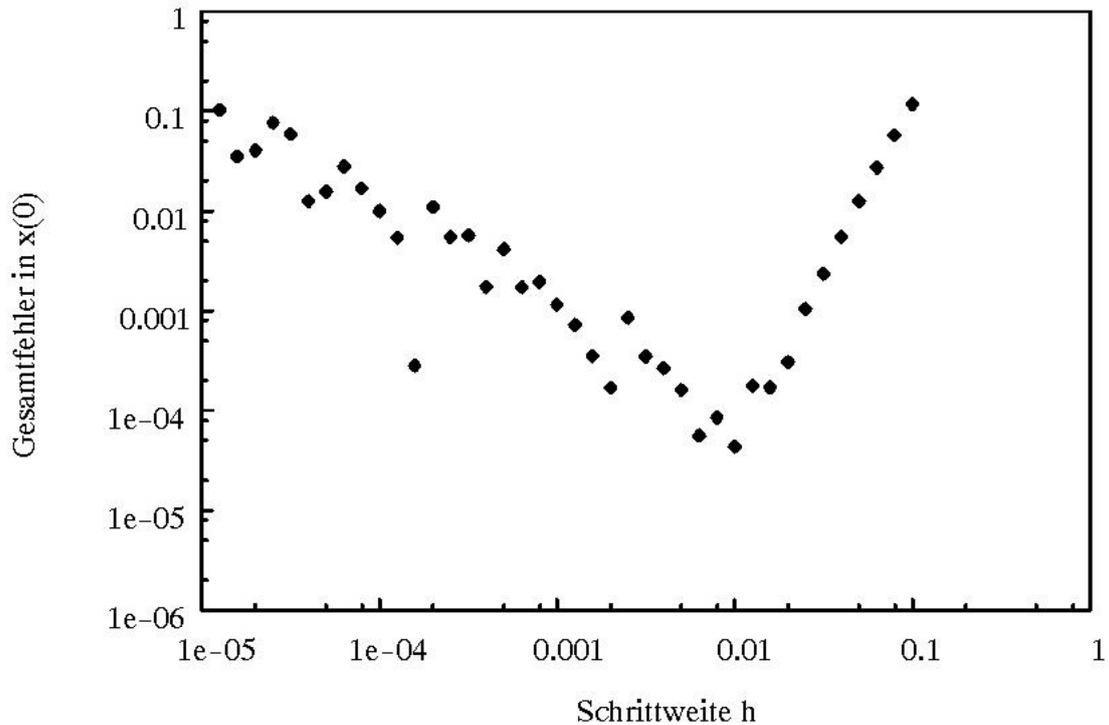
$$x(-1) =$$

-----

$$\dot{x}(t) =$$

-----

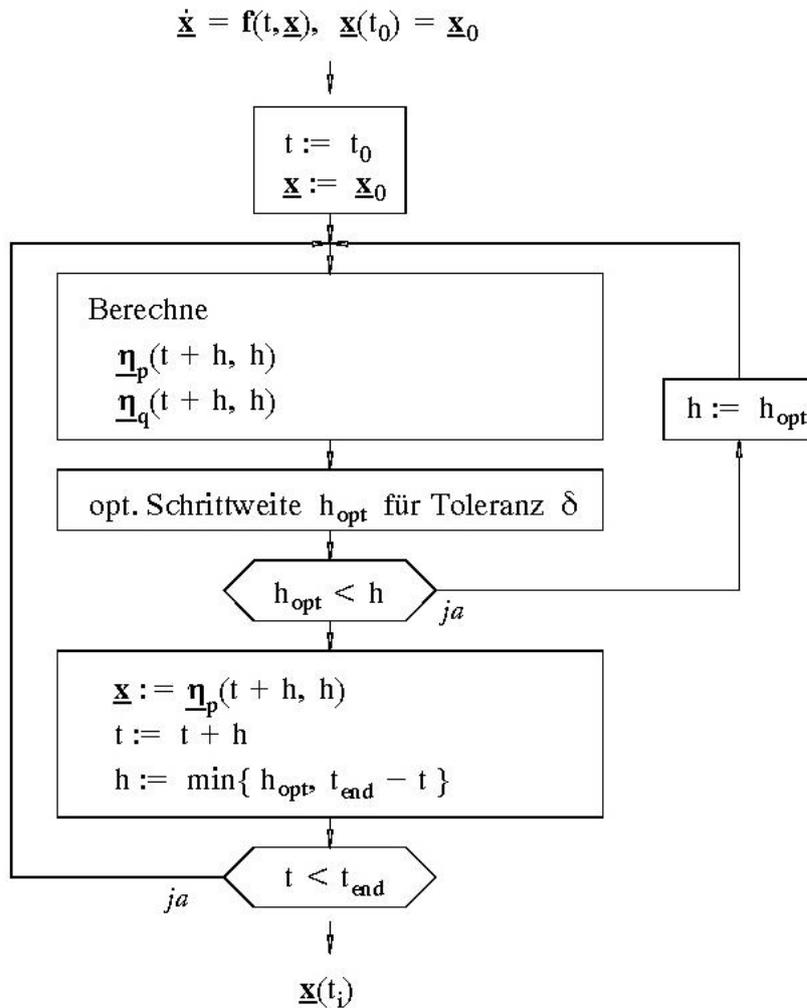
numerische Lösung: Runge–Kutta Verfahren 4.Ordnung  
(gerechnet mit REAL)





## Fehlberg–Schrittweitensteuerung

gegeben: Schrittweiten–Vorschlag  $h = h_0$   
Fehlertoleranz  $\delta$



**Beispiel:** (vgl. A20):

$$\dot{x} = -200tx^2, \quad x(-3) = \frac{1}{901}$$

numerische Lösung: Runge–Kutta Verfahren 5/4. Ordnung (DOUBLE)

	Funktionsauswertungen	Fehler in $x(0)$
Fehlberg–Schrittw.steuerung ( $h_0 = 5. E - 2, \quad EPS = 1. E - 7$ )	427	6.4504E - 6
$h = h_{\text{mittel}} = 4.2155E - 2$	427	1.3939E - 4
$h = h_{\text{max}} = 1.44244E - 1$	127	1.92075E - 1
$h = h_{\text{min}} = 1.05495E - 2$	1711	3.05471E - 7



## Rekursiver Aufbau eines Extrapolationspolynoms $k$ -ter Ordnung nach dem Aitken–Neville Schema

Definition:  $P_{j,l}(h)$  Polynom  $l$ -ter Ordnung mit den Stützstellen  

$$P_{j,l}(h_{j-i}) = \eta^{(j-i)}, \quad i = 0(1)l.$$
 speziell:  $P_{j,0} \equiv \eta^{(j)}, \quad j = 0(1)k$   
 $P_{k,k}(h)$  gesuchtes Interpolationspolynom  $k$ -ter Ordnung

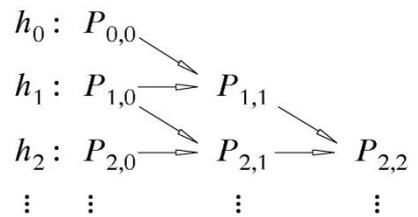
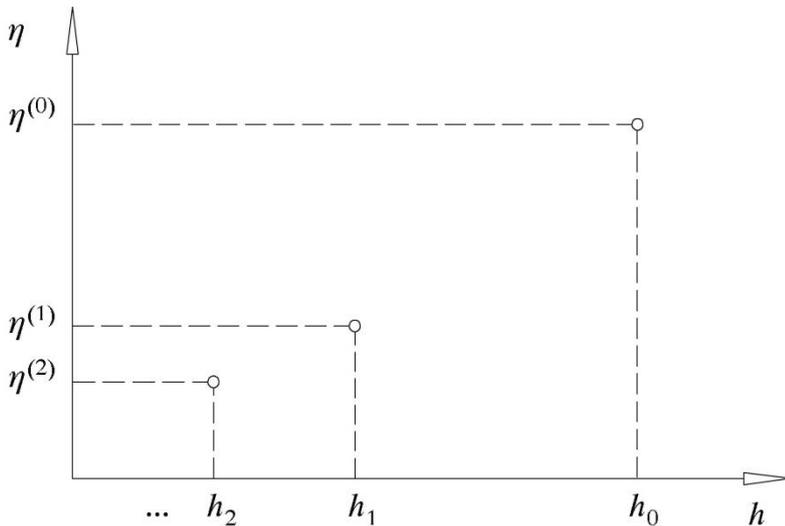
Rekursion:  $P_{j,l}(h)$  und  $P_{j-1,l}(h)$  sind Polynome  $l$ -ter Ordnung mit  $l$  gemeinsamen Stützstellen  $h_{j-1}, \dots, h_{j-l}$   

$$\rightarrow P_{\gamma}(h) := \gamma P_{j,l}(h) + (1 - \gamma)P_{j-1,l}(h), \quad \gamma \in \mathbb{R},$$
 hat die gleichen Stützstellen

speziell: 
$$\gamma := \frac{h - h_{j-l-1}}{h_j - h_{j-l-1}} \rightarrow \gamma = 0 \text{ für } h = h_{j-l-1}$$

$$\gamma = 1 \text{ für } h = h_j$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P_{\gamma}(h) \equiv P_{j,l+1}(h) &= \frac{(h - h_{j-l-1})P_{j,l}(h) + (h_j - h)P_{j-1,l}(h)}{h_j - h_{j-l-1}} \\ &= P_{j,l}(h) + \frac{h_j - h}{h_{j-l-1} - h_j} (P_{j,l}(h) - P_{j-1,l}(h)) \end{aligned}$$





## Mehrschrittverfahren mit konstanter Schrittweite

Integrationsformel:

$$\eta_{p+k} = \eta_{p-j} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}$$

$$f_{p-i} = f(t_{p-i}, \eta_{p-i}), \quad \beta_{qi} = \int_{-j}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{l-i} ds, \quad i = 0(1)q$$

○ Adams–Bashforth Prädiktor–Verfahren ( $k = 1, j = 0$ )

**Beispiel:**  $q = 2$

$$\beta_{20} = \int_{-2}^{-1} \left( \frac{s+2}{s+1} \right) \left( \frac{s+1}{s} \right) ds = \frac{1}{2} \left[ \frac{s^3}{3} + \frac{3s^2}{2} + 2s \right]_0^{-1} = \dots$$

$$\beta_{21} = \int_{-2}^{-1} \left( \frac{s+2}{s+1} \right) \left( \frac{s+1}{s} \right) ds = - \left[ \frac{s^3}{3} + s^2 \right]_0^{-1} = \dots$$

$$\beta_{22} = \int_{-2}^{-1} \left( \frac{s+2}{s+1} \right) \left( \frac{s+1}{s} \right) ds = \frac{1}{2} \left[ \frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} \right]_0^{-1} = \dots$$

$$\rightarrow \eta_{p+1} = \eta_p + \frac{h}{12} \left[ f_p + 4f_{p-1} + f_{p-2} \right]$$

allgemein:  $\eta_{p+1} = \eta_p + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}$

Verfahrens- ordnung	$q$		$i$				
			0	1	2	3	4
1	0	$\beta_{0i}$	1				
2	1	$2\beta_{1i}$	3	-1			
3	2	$12\beta_{2i}$					
4	3	$24\beta_{3i}$	55	-59	37	-9	
5	4	$720\beta_{4i}$	1901	-2774	2616	-1274	251



- Adams–Moulton Korrektor–Verfahren ( $k = 0, j = 1$ )

**Beispiel:**  $q = 2$

$$\beta_{20} = \int_{-1}^0 \left( \frac{s+1}{2} \right) \left( \frac{s+1}{2} \right) ds = \frac{1}{2} \left[ \frac{s^3}{3} + \frac{3s^2}{2} + 2s \right]_{-1}^0 = \dots$$

$$\beta_{21} = \int_{-1}^0 \left( \frac{s+1}{2} \right) \left( \frac{s}{2} \right) ds = - \left[ \frac{s^3}{3} + s^2 \right]_{-1}^0 = \dots$$

$$\beta_{22} = \int_{-1}^0 \left( \frac{s+1}{2} \right) \left( \frac{s^2}{2} \right) ds = \frac{1}{2} \left[ \frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} \right]_{-1}^0 = \dots$$

$$\rightarrow \eta_p = \eta_{p-1} + \frac{h}{12} \left[ f_p + f_{p-1} + f_{p-2} \right]$$

allgemein:  $\eta_p = \eta_{p-1} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}$

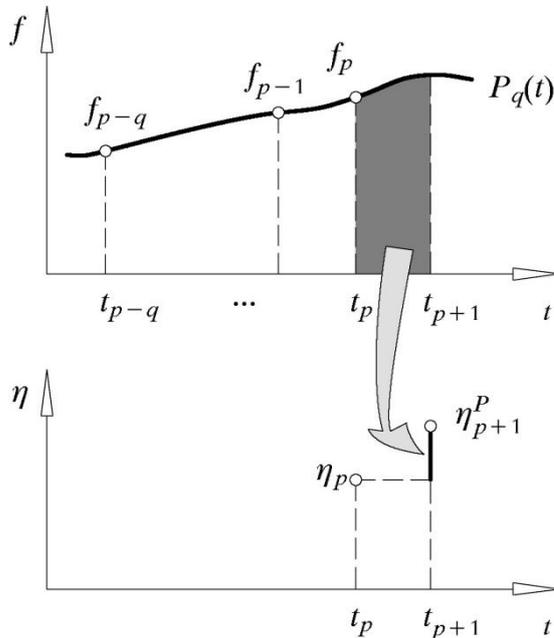
bzw. nach Umbenennung des Index  $p \rightarrow p + 1$ :  $\eta_{p+1} = \eta_p + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p+1-i}$

Verfahrens- ordnung	$q$		$i$				
			0	1	2	3	4
1	0	$\beta_{0i}$	1				
2	1	$2\beta_{1i}$	1	1			
3	2	$12\beta_{2i}$					
4	3	$24\beta_{3i}$	9	19	-5	1	
5	4	$720\beta_{4i}$	251	646	-264	106	-19

- Nyström Prädiktor–Verfahren ( $k = 1, j = 1$ )  
speziell: midpoint–rule ( $q = 0$ ):  $\eta_{p+1} = \eta_{p-1} + 2hf_p$
- Milne Korrektor–Verfahren ( $k = 0, j = 2$ )

## PECE-Verfahren (Predict-Evaluate-Correct-Evaluate)

**P**



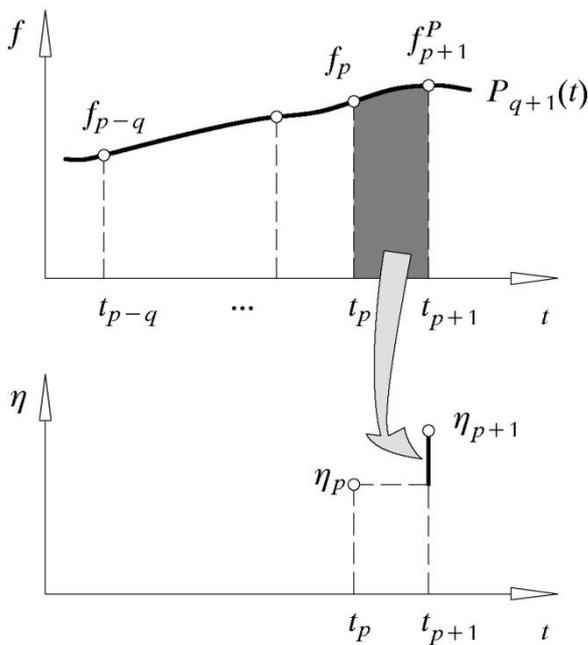
Adams-Bashforth  
( $q + 1$ )-ter Ordnung

$$\eta_{p+1}^P = \eta_p + h \sum_{i=0}^q \beta_{q,i}^{AB} f_{p-i}$$

**E**

$$f_{p+1}^P := f(t_{p+1}, \eta_{p+1}^P)$$

**C**



Adams-Moulton  
( $q + 2$ )-ter Ordnung

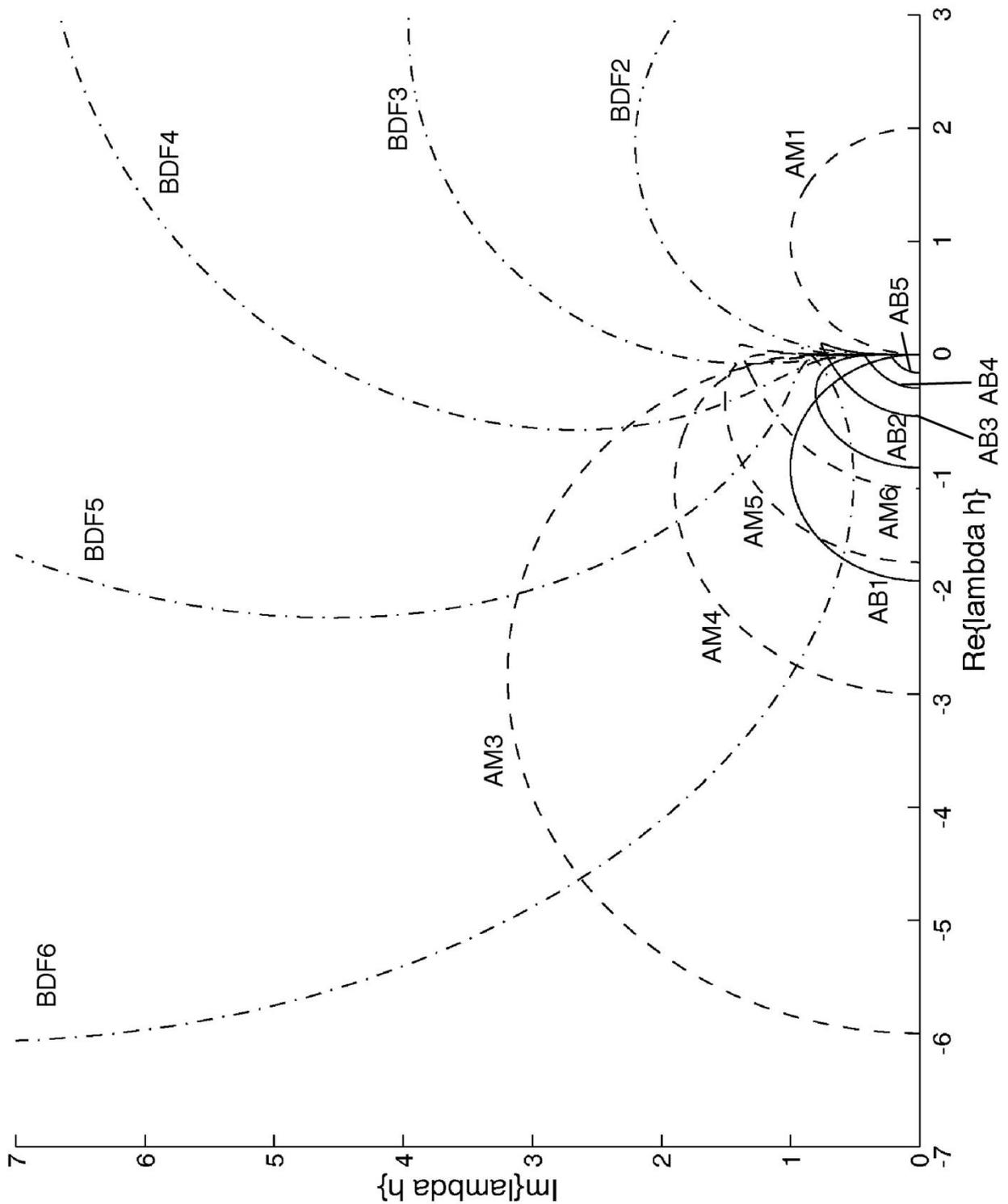
$$\eta_{p+1} = \eta_p + h \sum_{i=1}^{q+1} \beta_{(q+1),i}^{AM} f_{p+1-i} + h \beta_{(q+1),0}^{AM} f_{p+1}^P$$

**E**

$$f_{p+1} := f(t_{p+1}, \eta_{p+1})$$



## Stabilitätsgebiete der wichtigsten Mehrschrittverfahren



- AB: Adams Bashforth methods  
AM: Adams Moulton methods  
BDF: Backward differentiation formula