



Mehrschrittverfahren mit konstanter Schrittweite

Integrationsformel:

$$\eta_{p+k} = \eta_{p-j} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}$$

$$f_{p-i} = f(t_{p-i}, \eta_{p-i}), \quad \beta_{qi} = \int_{-j}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{s+l}{l-i} ds, \quad i = 0(1)q$$

○ Adams–Bashforth Prädiktor–Verfahren ($k = 1, j = 0$)

Beispiel: $q = 2$

$$\beta_{20} = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{s+2}{s+1} \right) \left(\frac{s+1}{s} \right) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{3s^2}{2} + 2s \right]_0^{-1} = \dots$$

$$\beta_{21} = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{s+2}{s+1} \right) \left(\frac{s+1}{s} \right) ds = - \left[\frac{s^3}{3} + s^2 \right]_0^{-1} = \dots$$

$$\beta_{22} = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{s+2}{s+1} \right) \left(\frac{s+1}{s} \right) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} \right]_0^{-1} = \dots$$

$$\rightarrow \eta_{p+1} = \eta_p + \frac{h}{12} \left[f_p + 4f_{p-1} + f_{p-2} \right]$$

allgemein: $\eta_{p+1} = \eta_p + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}$

Verfahrens- ordnung	q		i				
			0	1	2	3	4
1	0	β_{0i}	1				
2	1	$2\beta_{1i}$	3	-1			
3	2	$12\beta_{2i}$					
4	3	$24\beta_{3i}$	55	-59	37	-9	
5	4	$720\beta_{4i}$	1901	-2774	2616	-1274	251



- Adams–Moulton Korrektor–Verfahren ($k = 0, j = 1$)

Beispiel: $q = 2$

$$\beta_{20} = \int_{-1}^0 \left(\frac{s+1}{2} \right) \left(\frac{s+1}{2} \right) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{3s^2}{2} + 2s \right]_{-1}^0 = \dots$$

$$\beta_{21} = \int_{-1}^0 \left(\frac{s+1}{2} \right) \left(\frac{s}{2} \right) ds = - \left[\frac{s^3}{3} + s^2 \right]_{-1}^0 = \dots$$

$$\beta_{22} = \int_{-1}^0 \left(\frac{s+1}{2} \right) \left(\frac{s^2}{2} \right) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} \right]_{-1}^0 = \dots$$

$$\rightarrow \eta_p = \eta_{p-1} + \frac{h}{12} \left[f_p + f_{p-1} + f_{p-2} \right]$$

allgemein: $\eta_p = \eta_{p-1} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p-i}$

bzw. nach Umbenennung des Index $p \rightarrow p + 1$: $\eta_{p+1} = \eta_p + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{p+1-i}$

Verfahrens- ordnung	q		i				
			0	1	2	3	4
1	0	β_{0i}	1				
2	1	$2\beta_{1i}$	1	1			
3	2	$12\beta_{2i}$					
4	3	$24\beta_{3i}$	9	19	-5	1	
5	4	$720\beta_{4i}$	251	646	-264	106	-19

- Nyström Prädiktor–Verfahren ($k = 1, j = 1$)
speziell: midpoint–rule ($q = 0$): $\eta_{p+1} = \eta_{p-1} + 2hf_p$
- Milne Korrektor–Verfahren ($k = 0, j = 2$)