Stabilitätsgebiete von Einschrittverfahren

Für eine numerisch stabile Integration wird ein Abklingen der Fehlerbeiträge gefordert:

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} \overset{!}{<} 1 \tag{1}$$

Bei Einschrittverfahren gilt dabei für die Fehlerfortpflanzung

$$\delta_{i+1} = \delta_i + h[\phi(t_i, \eta_i, h) - \phi(t_i, x_i, h)] \tag{2}$$

mit

$$\delta_i = \eta_i - x_i \tag{3}$$

Die Stabilität der numerischen Integration ist vom dynamischen Verhalten des zu untersuchenden Systems abhängig. Zur Untersuchung wird das skalare Referenzproblem

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(t_0) = x_0, \lambda \in \mathbb{C} \tag{4}$$

verwendet.

Das Stabilitätsverhalten des Polygonzugverfahrens ('Euler vorwärts') soll untersucht werden.

a) Wie lautet die Verfahrensfunktion des Polygonzugverfahrens?

$$\eta_{i+1} = \eta_i + h\phi(t_i, \eta_i, h), \qquad \phi(t_i, \eta_i, h) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} . \tag{5}$$

b) Setzen Sie die Verfahrensfunktion (5) in (2) für die Stützstellen $\phi(t_i, \eta_i, h)$ und $\phi(t_i, x_i, h)$ ein:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} . \tag{6}$$

c) Setzen Sie nun das skalare Referenzproblem (4) in (6) ein und beachten Sie (3). Welcher Zusammenhang ergibt sich für die Fehlerfortpflanzung?

$$\frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} .$$

d) Welche Stabilitätsaussage leitet sich daraus mit (1) ab?

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} < 1. \tag{7}$$

Gleichung (7) beschreibt eine Abhängigkeit der maximal zulässigen Schrittweite h von der Systemdynamik λ. Dieser Zusammenhang kann in der komplexen λh–Ebene übersichtlich dargestellt werden.

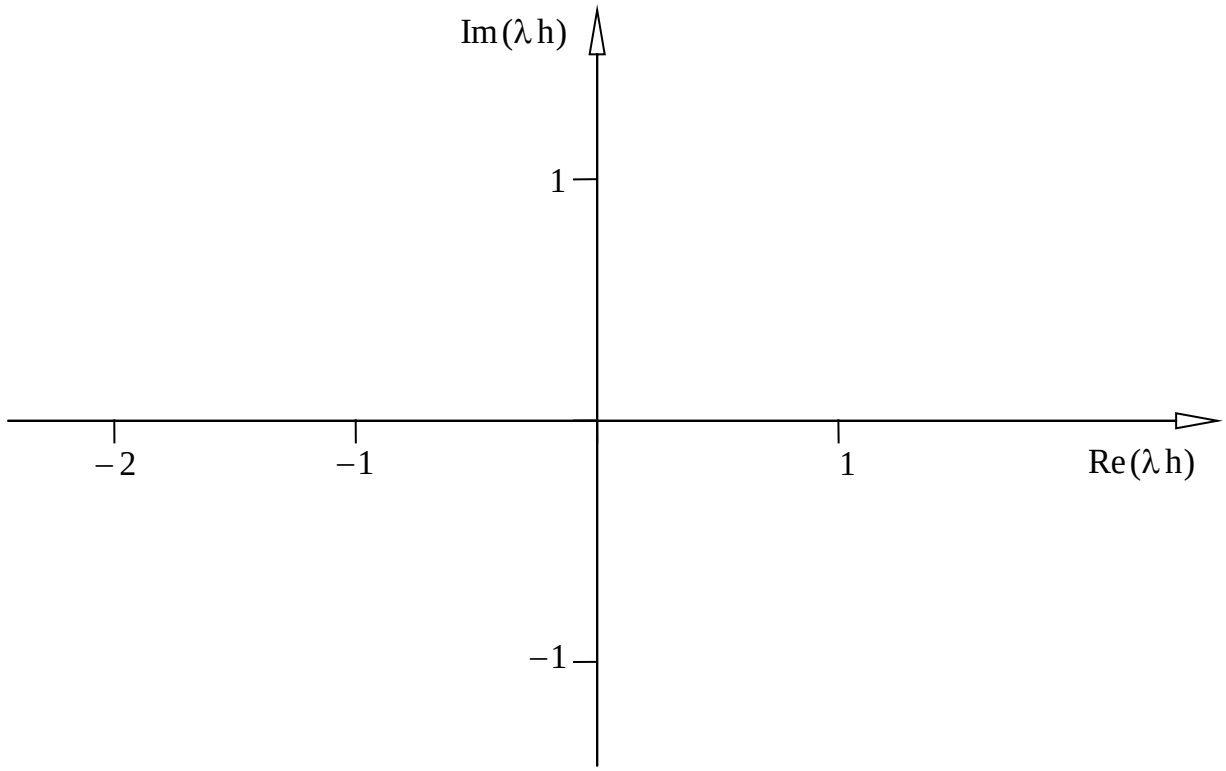
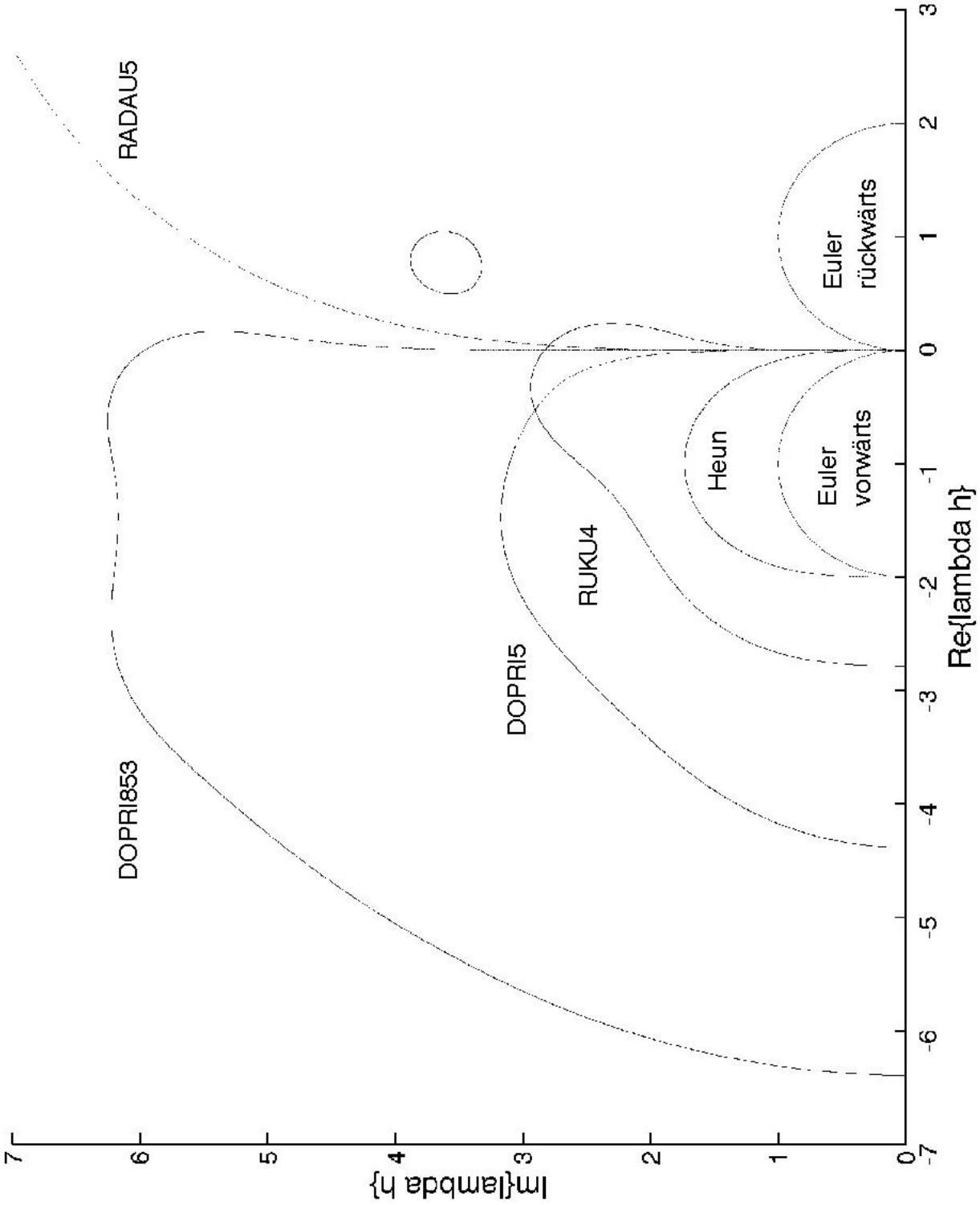
e) Berechnen Sie die Linie der Grenzstabilität mit

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} = 1,$$

indem Sie eine komplexe Betragsbildung mit $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ durchführen. Welcher Zusammenhang ergibt sich?

– –

f) Tragen Sie das Stabilitätsgebiet in die komplexe λh–Ebene ein



Stabilitätsgebiete der wichtigsten Einschrittverfahren