



## Stabilitätsgebiete von Einschrittverfahren

Für eine numerisch stabile Integration wird ein Abklingen der Fehlerbeiträge gefordert:

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} \stackrel{!}{<} 1 \quad (1)$$

Bei Einschrittverfahren gilt dabei für die Fehlerfortpflanzung

$$\delta_{i+1} = \delta_i + h[\phi(t_i, \eta_i, h) - \phi(t_i, x_i, h)] \quad (2)$$

mit

$$\delta_i = \eta_i - x_i \quad (3)$$

Die Stabilität der numerischen Integration ist vom dynamischen Verhalten des zu untersuchenden Systems abhängig. Zur Untersuchung wird das skalare Referenzproblem

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(t_0) = x_0, \lambda \in \mathbb{C} \quad (4)$$

verwendet.

Das Stabilitätsverhalten des Polygonzugverfahrens ('Euler vorwärts') soll untersucht werden.

a) Wie lautet die Verfahrensfunktion des Polygonzugverfahrens?

$$\eta_{i+1} = \eta_i + h\phi(t_i, \eta_i, h), \quad \phi(t_i, \eta_i, h) = \text{-----} \quad (5)$$

b) Setzen Sie die Verfahrensfunktion (5) in (2) für die Stützstellen  $\phi(t_i, \eta_i, h)$  und  $\phi(t_i, x_i, h)$  ein:

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \text{-----} \quad (6)$$

c) Setzen Sie nun das skalare Referenzproblem (4) in (6) ein und beachten Sie (3). Welcher Zusammenhang ergibt sich für die Fehlerfortpflanzung?

$$\frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} = \text{-----}$$

d) Welche Stabilitätsaussage leitet sich daraus mit (1) ab?

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} = \text{-----} < 1. \quad (7)$$



Gleichung (7) beschreibt eine Abhängigkeit der maximal zulässigen Schrittweite  $h$  von der Systemdynamik  $\lambda$ . Dieser Zusammenhang kann in der komplexen  $\lambda h$ -Ebene übersichtlich dargestellt werden.

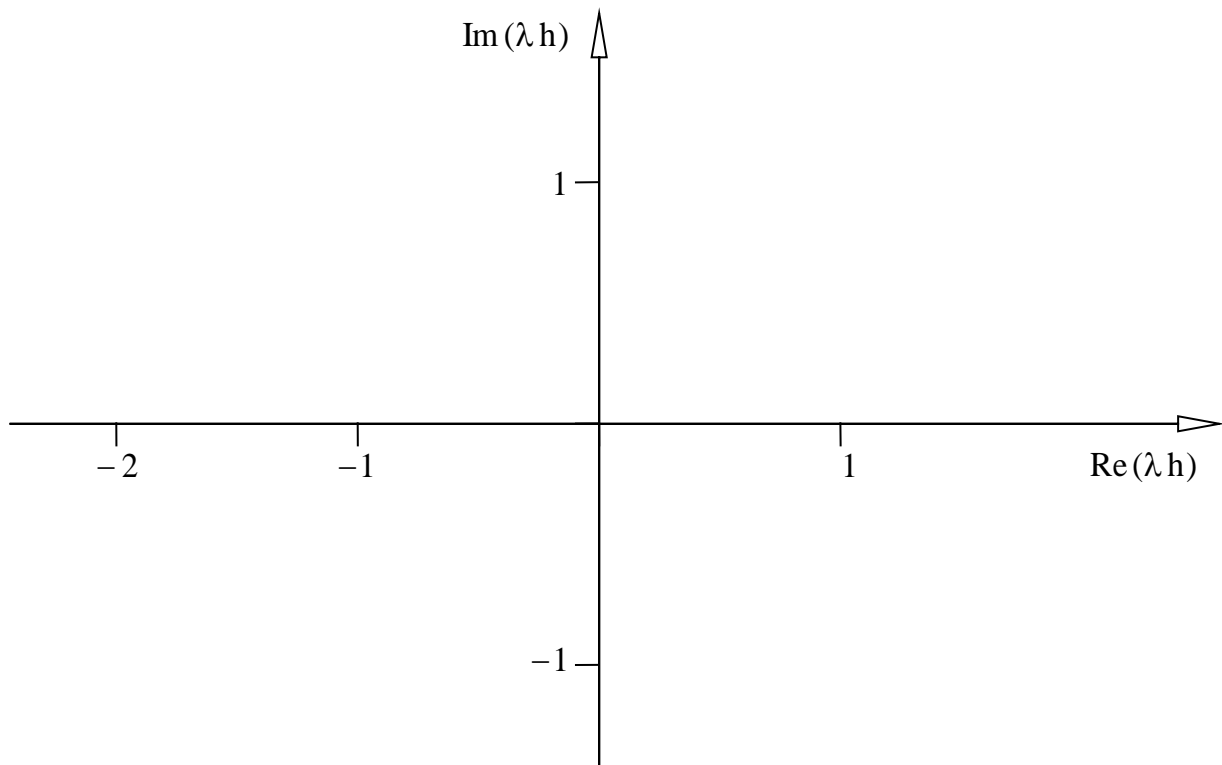
- e) Berechnen Sie die Linie der Grenzstabilität mit

$$\frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_i|} = 1,$$

indem Sie eine komplexe Betragsbildung mit  $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$  durchführen. Welcher Zusammenhang ergibt sich?

-----

- f) Tragen Sie das Stabilitätsgebiet in die komplexe  $\lambda h$ -Ebene ein





## Stabilitätsgebiete der wichtigsten Einschrittverfahren

